A. Douady

Appendice. Espaces de morphismes

Séminaire Jean Leray, nº 4 (1964-1965), p. 101-109
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_101_0>

APPENDICE

ESPACES DE MORPHISMES

par

A. DOUADY

Sauf mention expresse du contraire, tous les espaces analytiques sont supposés de dimension finie.

1. Morphismes d'espaces analytiques au-dessus de S .

Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, x un point de X , et $y = f(x)$. On dit que f est fini (resp. plat) en x si $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module de type fini (resp. plat). D'après un théorème connu, f est fini en x si et seulement si x est isolé dans $f^{-1}(y)$. Si X et Y sont deux espaces analytiques au-dessus de S et f un S-morphisme, pour tout point $s \in S$, notons $X(s)$ et $Y(s)$ les fibres de s dans X et Y et $f(s) : X(s) \to Y(s)$ le morphisme induit par f. Si $x \in X(s)$, le morphisme f est fini en x si et seulement si $f(s)$ est fini en x.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques ; l'ensemble des points où f est fini (resp. plat) est ouvert dans X .

Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et propre. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, le faisceau image directe $f_* \mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Y et

$$(f_* \mathcal{F})_y = \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} \mathcal{F}_x .$$

Si X et Y sont des espaces analytiques au-dessus de S et f un S-morphisme on a $(f_* \mathcal{F})(s) = f(s)_* \mathcal{F}(s)$, et $f_* \mathcal{F}$ est S-plat si et seulement si $\mathcal{F}$ est S-plat. Le morphisme f définit un morphisme de faisceaux d'anneaux

$$\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X .$$

Pour qu'un morphisme d'espaces analytiques $f : X \to Y$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que f soit fini et propre, et que $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ soit un isomorphisme.

PROPOSITION 1. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces analytiques propres et plats au-dessus de</u> S , <u>et</u> $f : X \to Y$ <u>un</u> S-<u>morphisme</u>. <u>L'ensemble</u> S' <u>des points</u> $s \in S$ <u>tels que</u> $f(s) : X(s) \to Y(s)$ <u>soit un isomorphisme est ouvert dans</u> S , <u>et</u> f <u>induit un isomorphisme de</u> $X|_{S'}$ <u>sur</u> $Y|_{S'}$.

<u>Démonstration</u>. Soit s un point de S tel que f(s) soit un isomorphisme ; alors f(s) est fini, donc f est fini sur un voisinage de X(s), qu'on peut supposer de la forme $X|_{S_1}$, où S_1 est un voisinage de s dans S. Le morphisme f induit un morphisme fini et propre de $X|_{S_1}$ dans $Y|_{S_1}$, et définit sur $Y|_{S_1}$ un homomorphisme $\tilde{f}$ de $\mathcal{O}_Y$ dans le faisceau cohérent $f_* \mathcal{O}_X$. L'homomorphisme $\tilde{f}(s)$ est un isomorphisme. Il résulte de la proposition 1 de l'exposé sur les faisceaux anaplats(*) que $\tilde{f}$ est un isomorphisme sur un voisinage de Y(s), qu'on peut supposer de la forme $Y|_{S_2}$, où S_2 est un voisinage de s dans S. Alors f induit un isomorphisme de $X|_{S_2}$ sur $Y|_{S_2}$, et ceci démontre la proposition.

(*) On peut aussi faire le raisonnement suivant :

Soit $\mathcal{Q} = \operatorname{Coker} \tilde{f}$, on a $\mathcal{Q}(s) = 0$, d'où $\mathcal{Q} = 0$ par Nakayama. Soit $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} f$; comme $f_* \mathcal{O}_X$ est S-plat, $\mathcal{K}(s) = \operatorname{Ker} \tilde{f}(s) = 0$, donc $\mathcal{K} = 0$, de nouveau par Nakayama.

2. L'espace des morphismes.

THÉORÈME 1. *Soient* X *et* Y *deux espaces analytiques,* X *compact, soient* H *l'espace analytique des sous-espaces analytiques compacts de* $X \times Y$ *, et* R *le sous-espace analytique universel de* $H \times X \times Y$.

a) *L'ensemble* $M = \mathrm{Mor}(X,Y)$ *des points* $s \in H$ *tels que* $R(s)$ *soit le graphe d'un morphisme de* X *dans* Y *est ouvert dans* H .

b) $R|_M$ *est le graphe d'un morphisme* m *de* $M \times X$ *dans* Y .

c) *Le morphisme* m *jouit de la propriété universelle suivante : Pour tout espace analytique* S *et pour tout morphisme* $u : S \times X \to Y$, *il existe un morphisme et un seul* $f : S \to M$ *tel que* $u = m \circ (f \times I_X)$.

Démonstration. Les espaces R et $H \times X$ sont propres et plats sur H ; considérons la projection $p : R \to H \times X$. Un point $s \in H$ appartient à M si et seulement si $p(s)$ est un isomorphisme de $R(s)$ sur X. D'après la proposition 1, M est ouvert dans H et $p|_M$ est un isomorphisme de $R|_M$ sur $M \times X$, donc $R|_M$ est le graphe d'un morphisme m de $M \times X$ dans Y.

Soit S un espace analytique. Les morphismes de $S \times X$ dans Y correspondent bijectivement aux sous-espaces Z de $S \times X \times Y$ tels que la projection $Z \to S \times X$ soit un isomorphisme, i.e. aux sous-espaces Z de $S \times X \times Y$ propres et plats sur S tels que, pour tout $s \in S$, $Z(s)$ soit le graphe d'un morphisme de X dans Y, donc aux morphismes $f : S \to H$ tels que, pour tout $s \in S$, $f(s) \in M$, i.e. aux morphismes de S dans M. Cette correspondance est fonctorielle en S , d'où le théorème.

Remarques.

1. Soient X, X' et Y trois espaces analytiques, X et X' compacts. A des morphismes $f : S \to \mathrm{Mor}(X,X')$ et $g : S \to \mathrm{Mor}(X',Y)$, on associe un morphisme $g.f : S \to \mathrm{Mor}(X,Y)$ de la façon suivante : f correspond à

$$u : S \times X \to X' ,$$

g correspond à $v : S \times X' \to Y$, $g.f$ correspond à $v \circ \tilde{u} : S \times X \to Y$, où $\tilde{u} : S \times X \to S \times X'$ est défini par $\tilde{u}(s,x) = (s,u(s,x))$. En prenant

$$S = \mathrm{Mor}(X,X') \times \mathrm{Mor}(X',Y) ,$$

on obtient un morphisme

$$\mathrm{Mor}(X,X') \times \mathrm{Mor}(X',Y) \to \mathrm{Mor}(X,Y) ,$$

appelé composition, qui a pour application sous-jacente $(f,g) \longmapsto g \circ f$.

2. Les espaces X et Y étant toujours supposés de dimension finie, X compact, on devrait pouvoir démontrer que pour tout espace analytique banachique S, les morphismes de $S \times X$ dans Y correspondent bijectivement aux morphismes de S dans $\mathrm{Mor}(X,Y)$.

3. Topologie sur l'espace des sections d'un faisceau.

Soient X un espace analytique à base dénombrable (i.e. dont la topologie admet une base dénombrable d'ouverts) et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur X . On va munir l'espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{E})$ d'une topologie de Fréchet : prenons des cartes φ_i de X (pour tout i , φ_i est un isomorphisme d'un ouvert de X_i de X sur un sous espace analytique fermé d'un ouvert U_i de $\underline{\underline{C}}^{n_i}$) et des polycylindres $K_i \subset U_i$, privilégiés pour $\mathcal{E}$, tels que

$$\bigcup \varphi_i^{-1}(\overset{\circ}{K}_i) = X .$$

Alors $H^{o}(X, \mathcal{E})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $\prod B(K_i, \mathcal{E})$. On peut supposer l'ensemble d'indice I dénombrable, on voit alors que la topologie induite est une topologie de Fréchet. Cette topologie ne dépend pas du choix des φ_i et des K_i, car étant donné deux telles familles, on obtient en les réunissant une famille qui donne une topologie de Fréchet plus fine que chacune, or on sait que deux topologies de Fréchet comparables sur un même espace coïncident. A posteriori on voit que les familles non dénombrables donnent également la même topologie.

Si $\mathcal{E}'$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{E}$, l'espace $H^o(X, \mathcal{E}')$ s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $H^o(X, \mathcal{E})$, comme on le voit en prenant des K_i privilégiés pour $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$.

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> X <u>un espace analytique à base dénombrable REDUIT</u>. <u>La topologie de</u> $H^o(X, \mathcal{O}_X)$ <u>coïncide avec la topologie de la convergence compacte des fonctions analytiques</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit $\tilde{X}$ le normalisé de X, et $p : \tilde{X} \to X$ la projection canonique. L'espace des fonctions analytiques sur $\tilde{X}$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $\mathcal{C}(\tilde{X})$ des fonctions continues sur $\tilde{X}$ à valeurs dans $\underline{\underline{C}}$, muni de la topologie de la convergence compacte, car c'est l'espace des fonctions continues sur $\tilde{X}$, holomorphes aux points réguliers de $\tilde{X}$. L'espace $H^o(X, p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ s'envoie sur cet espace par une application linéaire continue bijective, donc bicontinue. La topologie de $H^o(X, p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ coïncide donc avec la topologie de la convergence compacte des fonctions analytiques sur $\tilde{X}$. Comme $\mathcal{O}_X$ est un sous faisceau cohérent de $p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$, l'espace $H^o(X, \mathcal{O}_X)$ est un sous espace de $H^o(X, p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})$, muni de la topologie induite. D'autre part,

comme p est surjective et propre, $\mathcal{C}(X)$ s'identifie à un sous espace de $\mathcal{C}(\tilde{X})$, muni de la topologie induite. On en déduit que la topologie de $H^o(X, \mathcal{O}_X)$ est induite par celle de $\mathcal{C}(X)$, et la proposition est démontrée.

4. La topologie de Mor(X,Y) .

Nous commencerons par un lemme.

Soient U' et U" des ouverts de $\underline{\underline{C}}^{n'}$ et $\underline{\underline{C}}^{n''}$ respectivement, X un sous espace analytique réduit de U' et Y un sous espace analytique de U". Notons $\mathcal{H}$ l'espace des applications analytiques de X dans Y , muni de la topologie de la convergence compacte. Si $h \in \mathcal{H}$, notons $\mathcal{O}_h$ le faisceau structural du graphe de h , et $\mathcal{J}_h$ le noyau de l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_{X \times Y} \to \mathcal{O}_h .$$

LEMME 1. Soient $K' \subset U'$ et $K'' \subset U''$ des polycylindres privilégiés pour $\mathcal{O}_{X'}$ et $\mathcal{O}_{X''}$ respectivement, et $K = K' \times K''$. L'ensemble W des $h \in \mathcal{H}$ tels que K soit privilégié pour $\mathcal{O}_h$ et $\mathcal{J}_h$ est ouvert dans $\mathcal{H}$ et l'application $h \to B(K, \mathcal{J}_h)$ de W dans $\mathcal{G}_K(\mathcal{O}_{X \times Y})$ est continue.

Démonstration. $\mathcal{H}$ est un sous espace de $H^o(X, \mathcal{O}_X^{n''})$. D'autre part, $B(K, \mathcal{O}_{X \times Y})$ est quotient direct de $B(K, \mathcal{O}_{X \times U''})$, donc $\mathcal{G}_K(\mathcal{O}_{X \times Y})$ s'identifie à un sous espace de $\mathcal{G}_K(\mathcal{O}_{X \times U''})$; enfin on peut montrer que si K est privilégié pour $\mathcal{O}_h$, il l'est aussi pour $\mathcal{J}_h$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble W des $h \in H^o(X, \mathcal{O}_X^{n''})$ telles que K soit privilégié pour $\mathcal{O}_h$ est ouvert dans $H^o(X, \mathcal{O}_X^{n''})$ et que l'application $h \to B(K, \mathcal{O}_h)$ de W dans $\mathcal{G}_K(\mathcal{O}_{X \times U''})$ (identifié à l'ensemble des modules quotients de $B(K, \mathcal{O}_{X \times U''})$ admettant une résolution finie directe) est continue.

Soit $K'_1 \subset U'$ un polycylindre $\mathcal{O}_X$-privilégié tel que $K' \subset \mathring{K}'_1$ (par exemple le transformé de K' par une homothétie de centre $x' \in \mathring{K}'$ et de rapport $1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Posons $S = B(K'_1)^{n''}$; l'application $(h,x) \longmapsto h(x)$ de $S \times K'_1$ dans $\underline{\underline{C}}^{n''}$ est analytique. Soit Υ l'automorphisme de variété analytique <u>banachique</u> de $S \times K'_1 \times \underline{\underline{C}}^{n''}$ défini par

$$\Upsilon(h,x',x'') = (h,x',x''+h(x')) \ ;$$

notons Γ le sous espace analytique <u>banachique</u> de $S \times K'_1 \times \underline{\underline{C}}^{n''}$ image de $S \times (X \cap K'_1 \times \{0\}$ par Υ. Le faisceau $\mathcal{O}_{S \times X \times \{0\}}$ est S-anaplat, il en est donc de même de $\mathcal{O}_\Gamma$; d'autre part $\mathcal{O}_\Gamma(h) = \mathcal{O}_{h|X}$. Par suite l'ensemble S_1 des $h \in S$ tels que K soit $\mathcal{O}_{h|X}$-privilégié est ouvert dans S et l'application $h \longmapsto B(K, \mathcal{O}_{h|X})$ de S_1 dans $\mathcal{G}_K(\mathcal{O}_{X \times U''})$ est analytique, donc continue. En prenant une section de l'épimorphisme direct

$$S = B(K'_1)^{n''} \longmapsto B(K'_1, \mathcal{O}_X^{n''}) \ ,$$

et en remarquant que

$$H^0(X, \mathcal{O}_X^{n''}) \mapsto B(K'_1, \mathcal{O}_X^{n''})$$

est continue, on en déduit le lemme.

THÉORÈME 2. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces analytiques,</u> X <u>compact et réduit</u>. <u>La topologie sous jacente à la structure d'espace analytique de</u> Mor(X,Y) <u>coïncide avec la topologie de la convergence compacte des applications analytiques de</u> X <u>dans</u> Y .

<u>Démonstration</u>. Notons $\mathcal{H}$ l'espace des applications analytiques de X dans Y, muni de la topologie de la convergence compacte.

a) <u>L'application identique</u> : $\mathcal{H} \mapsto \mathrm{Mor}(X,Y)$ <u>est continue</u>. Soit $h \in \mathcal{H}$. On peut trouver une cuirasse $M' = ((\varphi_i),(K_i),\ldots)$ sur $X \times Y$ telle que, pour tout i, la carte φ_i soit de la forme $\varphi_i' \times \varphi_i''$, où $\varphi_i' : X_i \to U_i'$ et $\varphi_i'' : Y_i \to U_i''$ sont des cartes de X et Y respectivement, et K_i de la forme $K_i' \times K_i''$, et que h vérifie les conditions suivantes :

(i) $h(\overline{X_i}) \subset Y_i$,

(ii) M est $(\mathcal{O}_{X \times Y}, \mathcal{O}_h)$-privilégiée, où $\mathcal{O}_h$ est le faisceau structural du graphe de h .

Par définition de la topologie de $\mathcal{H}$, l'ensemble $\mathcal{H}'$ des $h' \in \mathcal{H}$ vérifiant (i) est ouvert, et le lemme 1 montre que l'ensemble $\mathcal{H}''$ des $h' \in \mathcal{H}'$ vérifiant (ii) est ouvert dans $\mathcal{H}'$ et que l'application $h \mapsto (B(K_i, \mathcal{O}_h))$ de $\mathcal{H}''$ dans $\prod \mathcal{G}_{K_i}(\mathcal{O}_{X \times Y})$ est continue. Comme $H_M(X \times Y)$ est un sous espace de $\prod \mathcal{G}_{K_i}(\mathcal{O}_{X \times Y})$, l'assertion (a) en résulte.

b) <u>L'application identique</u> $\mathrm{Mor}(X,Y) \mapsto \mathcal{H}$ <u>est continue</u>. Le sous espace Γ de $\mathrm{Mor}(X,Y) \times X \times Y$ formé des $(h,x,h(x))$ est le sous espace universel, donc la projection $\Gamma \mapsto \mathrm{Mor}(X,Y)$ est propre. Par suite, pour tout ouvert W de $X \times Y$, l'ensemble des h dont le graphe est contenu dans W est ouvert dans $\mathrm{Mor}(X,Y)$, d'où (b), et le théorème est démontré.

5. <u>Conséquences</u>.

Voici, pour terminer, deux exemples de conséquences des théorèmes 1 et 2.

COROLLAIRE 1. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces analytiques</u>, X <u>compact et réduit</u>, *et soit* $f : X \to Y$ *une application analytique. Il existe un voisinage* W *de* f *pour la topologie de la convergence compacte et des points* $x_1, \dots, x_n$ *dans* X *tels que si deux applications analytiques de* X *dans* Y *appartiennent à* W *et coïncident aux points* $x_1, \dots, x_n$ *, elles sont égales.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$, soit D_x le sous espace analytique de $Mor(X,Y) \times Mor(X,Y)$ formé des couples (f', f'') tels que $f'(x) = f''(x)$. On a

$$\bigcap_{x \in X} D_x = \Delta \qquad ,$$

diagonale de $Mor(X,Y) \times Mor(X,Y)$. Il existe donc des points $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} D_{x_i}$$

coïncide avec Δ sur un voisinage $W \times W$ de (f,f).

COROLLAIRE 2. *Soit* X *un espace analytique compact. Le groupe des automorphismes de* X *est muni d'une structure de groupe de Lie complexe dont la topologie coïncide, si* X *est réduit, avec la topologie de la convergence compacte.*

Démonstration. D'après la proposition 1, l'ensemble des automorphismes de X est ouvert dans $Mor(X,X)$. D'après la remarque 1 qui suit le théorème 1, la loi de composition est analytique.