

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. DOUADY

Variétés d'application

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 15-25

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965__4_15_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS D'APPLICATION

par

A. DOUADY

On fait choix d'un corps de base qui est $\underline{\mathbb{R}}$ ou $\underline{\mathbb{C}}$. Lorsqu'on parlera d'espaces de Banach, d'applications analytiques ou de variétés analytiques sans préciser, il s'agira d'espaces de Banach, etc. sur le corps de base choisi.

1. Applications de classe \mathcal{C}^s :

Soit $s = r + \alpha$ un nombre réel ≥ 0 , avec $r \in \underline{\mathbb{N}}$ et $0 \leq \alpha < 1$. Si E est un espace de Banach sur $\underline{\mathbb{R}}$ et F un espace de Banach, on note $\mathcal{P}^k(E, F)$ l'espace de Banach des applications $\underline{\mathbb{R}}$ -polynomiales homogènes de degré k continues de E dans F . Si $f \in \mathcal{P}^k(E, F)$ et $t \in E$, on note pour $i \leq k$ $D_t^i f$ l'élément de $\mathcal{P}^{k-i}(E, F)$ défini par $f(t + u) = \sum D_t^i f(u)$.

Soit A une partie compacte de E . Si $\underline{f} = (f_0, \dots, f_r)$ est une suite où f_k est une application de A dans $\mathcal{P}^k(E, F)$, posons

$$\eta_k(x, t) = f_k(x + t) - \sum_{0 \leq i \leq r-k} D_t^i f_{k+i}(x) \quad \text{pour } x \in A \text{ et } x+t \in A.$$

Avec Whitney, on note $\mathcal{C}^s(A, F)$ l'espace vectoriel des suites $\underline{f} = (f_0, \dots, f_r)$ où f_k est une application de A dans $\mathcal{P}^k(E, F)$ telles que la fonction θ définie sur $A \times A$ par

$$\theta(x, y) = \frac{\|\eta_k(x, y-x)\|}{\|y-x\|^{s-k}} \quad \text{pour } x \neq y$$

et $\theta(x, x) = 0$ soit continue.

Pour $\underline{f} = (f_0, \dots, f_r) \in \mathcal{C}^s(A, F)$ on pose

$$\underline{f}(x) = f_0(x) \in F \quad \text{et} \quad \underline{f}_x = (f_0(x), \dots, f_r(x)) ;$$

ainsi \underline{f}_x sera considéré comme un jet à l'ordre r de E dans F en x .

Pour $\rho > 0$, on pose

$$\|\underline{f}\|_{s,\rho} = \sum_k \rho^k \sup \|f_k(x)\| + M \sum_k \rho^s \sup_{0 \leq t \leq \rho} \frac{\|\eta_k(x,t)\|}{\|t\|^{s-k}}.$$

Ces normes jouissent des propriétés suivantes :

(i) La topologie définie sur $\mathcal{C}^s(A,F)$ par la norme $\|\cdot\|_{s,\rho}$ ne dépend pas de ρ ni de M , ni du choix des normes sur E et F , et en fait un espace de Banach. (En fait, $\|\cdot\|_{s,\rho}$ s'obtient à partir de $\|\cdot\|_{s,1}$ en remplaçant la norme E par une norme proportionnelle).

(ii) Soient F, F', F'' trois espaces de Banach, $\mu: F' \times F'' \rightarrow F$ une application bilinéaire continue. On définit $\mu_*: \mathcal{C}^s(A,F') \times \mathcal{C}^s(A,F'') \rightarrow \mathcal{C}^s(A,F)$ par $\mu_*(\underline{f}', \underline{f}'') = \underline{f}$ si

$$f_k(x,t) = \sum_{i+j=k} \mu(f'_i(x,t), f''_j(x,t)) \quad \text{pour } x \in A \text{ et } t \in E.$$

Pour tout s , on peut choisir M de façon que, quels que soient F, F', F'', μ et ρ , on ait

$$\|\mu_*(\underline{f}', \underline{f}'')\|_{s,\rho} \leq \|\mu\| \|\underline{f}'\|_{s,\rho} \|\underline{f}''\|_{s,\rho}.$$

Dans la suite, on supposera toujours M choisi de cette façon.

(iii) Pour tout $\underline{f} \in \mathcal{C}^s(A,F)$, pour tout $x \in A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\rho > 0$ et un voisinage fermé A' de x dans A tels que

$$\|(\underline{f} - \underline{f}(x))|_{A'}\|_{s,\rho} < \varepsilon, \quad \text{où } \underline{f}(x) \text{ désigne l'élément constant.}$$

$$(\underline{f}(x), 0, \dots, 0) \in \mathcal{C}^s(A,F).$$

THÉORÈME 1 (Whitney). Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\underline{\underline{R}}$, F un espace de Banach, A et B deux parties compactes de E telles que $B \subset A$. Alors pour tout s la restriction $\mathcal{C}^s(A, F) \rightarrow \mathcal{C}^s(B, F)$ est un épimorphisme direct.

La démonstration de ce théorème ne sera pas donnée ici. Elle a fait l'objet d'un exposé de Malgrange dans son séminaire de l'I.H.E.S. à Bures et se trouve dans la thèse de Glaeser*.

2. Fonctorialité.

Soient E et E' deux espaces de Banach sur $\underline{\underline{R}}$, F un espace de Banach, A et A' des parties compactes de E et E' respectivement. Si $\underline{\underline{f}} \in \mathcal{C}^s(A, F)$ et si $\underline{\underline{g}} \in \mathcal{C}^s(A', E)$ et vérifie $g(A') \subset A$, on définit $\underline{\underline{f}} \circ \underline{\underline{g}} \in \mathcal{C}^s(A', F)$ par $(\underline{\underline{f}} \circ \underline{\underline{g}})_x = \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{g}}(x)} \circ \underline{\underline{g}}_x$ (composition des jets) pour tout $x \in A'$. Pour $\underline{\underline{g}}$ fixé, l'application $\underline{\underline{g}}^* : \mathcal{C}^s(A, F) \rightarrow \mathcal{C}^s(A', F)$ définie par $\underline{\underline{g}}^*(\underline{\underline{f}}) = \underline{\underline{f}} \circ \underline{\underline{g}}$ est linéaire continue.

Si U est un ouvert de F , on note $\mathcal{C}^s(A, U)$ l'ouvert de $\mathcal{C}^s(A, F)$ formé des $\underline{\underline{f}} \in \mathcal{C}^s(A, F)$ telles que $\underline{\underline{f}}(A) \subset U$. Si h est une application analytique de U dans un espace de Banach F' et $\underline{\underline{f}} \in \mathcal{C}^s(A, U)$, on définit également $h \circ \underline{\underline{f}} \in \mathcal{C}^s(A, F')$ par composition des jets.

PROPOSITION 1. Soient E un espace de Banach sur $\underline{\underline{R}}$, F et F' deux espaces de Banach, A une partie compacte de E , et h une application analytique d'un ouvert U de F dans F' . Alors pour tout s l'application

$$h_* : \mathcal{C}^s(A, U) \longrightarrow \mathcal{C}^s(A, F')$$

définie par $h_*(\underline{\underline{f}}) = h \circ \underline{\underline{f}}$ est analytique.

(*) Cette démonstration n'est écrite que pour $F = \underline{\underline{R}}$, mais s'étend sans changement au cas où F est un espace de Banach quelconque. Par contre le principe de la démonstration repose sur un quadrillage de E qui suppose E de dimension finie. J'ignore si le théorème est vrai sans cette hypothèse.

Démonstration : Soit $y \in U$, et soit $\tilde{R} = \tilde{R}(y)$ un nombre > 0 , inférieur au rayon de convergence strict de h en y , et tel que h soit représentée par son développement sur la boule de centre y et de rayon \tilde{R} . Notons $B_\rho(y, R)$ la boule de $\mathcal{C}^S(A, F)$ ayant pour centre l'élément constant $\underline{y} = (y, 0, \dots, 0)$, et de rayon \tilde{R} pour la norme $\| \cdot \|_{s, \rho}$. Montrons d'abord que h est analytique sur $B_\rho(y, \tilde{R})$. Soit

$$h(y + u) = \sum p_k(u) = \sum \tilde{p}_k(u, \dots, u)$$

le développement de h en y . Considérons la série $S(\underline{f}) = \sum \tilde{p}_{k*}(\underline{f}, \dots, \underline{f})$, où \tilde{p}_{k*} est l'application k -linéaire de $\mathcal{C}^S(A, F) \times \dots \times \mathcal{C}^S(A, F)$ dans $\mathcal{C}^S(A, F')$ induite par \tilde{p}_k . Il résulte de la propriété (ii) que le rayon de convergence strict de la série S est supérieur à celui de h en y , et on vérifie immédiatement que sa somme est $h_*(\underline{y} + \underline{f})$ pour $\|f\| < \tilde{R}$.

Soit maintenant $\underline{f} \in \mathcal{C}^S(A, U)$ un élément quelconque. D'après la propriété (iii), pour tout $x \in A$, il existe un voisinage A' de x dans A et un $\rho_x > 0$ tels que

$$\|(\underline{f} - \underline{f}(x))|_{A'}\|_{\alpha, \rho} < \tilde{R}(\underline{f}(x));$$

comme A est compact, on peut trouver une famille finie (x_i) de points de A , des voisinages A'_i des x_i dont les intérieurs recouvrent A et un $\rho > 0$ tels que cette relation soit satisfaite pour tout i . L'application

$$h_* : \prod \mathcal{C}^S(A'_i, U) \rightarrow \prod \mathcal{C}^S(A'_i, F')$$

est alors analytique sur $\prod B(\underline{f}(x_i), \tilde{R}_i)$, qui est un voisinage de $(\underline{f}|_{A'_i})$. Mais $\mathcal{C}^S(A, F)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $\prod \mathcal{C}^S(A'_i, F)$ par $g \mapsto (g|_{A'_i})$; et de même pour $\mathcal{C}^S(A, F')$. Il en résulte

que

$$h_* : \mathcal{C}^S(A, U) \rightarrow \mathcal{C}^S(A, F')$$

est analytique au voisinage de \underline{f} , et la proposition est démontrée.

3. Variétés d'applications.

Soient M une variété de dimension finie sur $\underline{\mathbb{R}}$ de classe \mathcal{C}^S , A une partie compacte de M , et X une variété analytique banachique. On note $\mathcal{C}^S(A, X)$ l'ensemble des applications \underline{f} qui à chaque point x de A font correspondre un jet à l'ordre r de M dans X en x , et telles que, pour tout fermé A' de A contenu dans le domaine d'une carte φ de M et tel que $\underline{f}(A')$ soit contenu dans le domaine d'une carte $\psi : U \rightarrow U'$ de X , l'expression de \underline{f} dans les cartes φ, ψ soit un élément de $\mathcal{C}^S(\varphi(A'), U')$.

Nous nous proposons de montrer que $\mathcal{C}^S(A, X)$ est muni naturellement d'une structure de variété analytique banachique.

Dans le cas particulier où A est contenu dans le domaine d'une carte de M et où X admet un atlas à une carte, on peut identifier A à un compact d'un espace vectoriel sur $\underline{\mathbb{R}}$ et X à un ouvert d'un espace de Banach F , ainsi $\mathcal{C}^S(A, X)$ s'identifie à un ouvert de l'espace de Banach $\mathcal{C}^S(A, F)$, et il résulte du n°2 que la structure de variété analytique banachique ainsi définie sur $\mathcal{C}^S(A, X)$ ne dépend pas des cartes choisies. Cette structure sera appelée la structure canonique.

THÉORÈME 2. Soient M une variété de dimension finie sur $\underline{\mathbb{R}}$ de classe \mathcal{C}^S , A une partie compacte de M , et X une variété analytique banachique. Alors il existe une structure de variété analytique banachique et une seule sur

$\mathcal{C}^S(A, X)$ telle que, pour tout fermé A' de A contenu dans le domaine d'une carte de M et tout ouvert U de X qui soit le domaine d'une carte, l'ensemble $\Omega = \mathcal{C}^S(A, A'; X, U)$ des $\underline{f} \in \mathcal{C}^S(A, X)$ tels que $\underline{f}(A') \subset U$ soit ouvert dans $\mathcal{C}^S(A, X)$ et que la restriction $\rho: \Omega \rightarrow \mathcal{C}^S(A', U)$ soit analytique, $\mathcal{C}^S(A', U)$ étant muni de sa structure canonique.

LEMME 1. Soient U_1, \dots, U_n des domaines de cartes de X , et V_1, \dots, V_n des domaines de cartes de M , et soit A un compact contenu dans $V_1 \cup \dots \cup V_n$. Il existe alors des fermés A_1, \dots, A_n de A tels que $A_i \subset A \cap V_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et que, pour tout fermé A' de A , l'ensemble

$$W = \mathcal{C}^S(A', (A'_i); X, (U_i))$$

des $\underline{f} \in \mathcal{C}^S(A', X)$ tels que $\underline{f}(A'_i) \subset U_i$ pour $1 \leq i \leq n$ où $A'_i = A_i \cap A'$ s'identifie par $\underline{f} \mapsto (\underline{f}|_{A'_i})$ à une sous-variété directe de $\prod \mathcal{C}^S(A'_i, U_i)$.

Démonstration par récurrence sur n . C'est évident pour $n = 1$, supposons le résultat acquis pour $n-1$. On peut trouver deux fermés A^* et A_n de A dont les intérieurs (dans A) recouvrent A et tels que

$$A^* \subset V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} \quad \text{et} \quad A_n \subset V_n.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe des fermés A_1, \dots, A_{n-1} de A^* tels que $A_i \subset A^* \cap V_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et que, pour tout fermé A'^* de A^* ,

$$W^* = \mathcal{C}^S(A'^*, (A'_i)_{1 \leq i \leq n-1}; X, (U_i)_{1 \leq i \leq n-1})$$

soit une sous-variété directe de

$$\prod_{1 \leq i \leq n-1} \mathcal{C}^S(A'_i, U_i).$$

Soit A' un fermé de A , posons $B_i = A'_i \cap A'_n$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $B = \bigcup B_i$. L'ensemble $S = \mathcal{C}^S(B, (B_i); X, (U_i \cap U_n))$ est une sous-variété directe de $\prod \mathcal{C}^S(B_i, U_i \cap U_n)$, mais c'est aussi un ouvert de $\mathcal{C}^S(B, U_n)$ et les deux structures de variété ainsi obtenues sur S coïncident. De même l'ensemble W' des $\underline{f} \in W^*$ tels que $\underline{f}(B) \subset U_n$ est ouvert dans W^* . L'application de restriction $W' \rightarrow S$ est analytique car elle est induite par $\prod \rho_i$, où

$$\rho_i : \mathcal{C}^S(A'_i, U_i) \rightarrow \mathcal{C}^S(B_i, U_i)$$

est la restriction. L'application de restriction

$$\mathcal{C}^S(A'_n, U_n) \rightarrow \mathcal{C}^S(B, U_n)$$

est une submersion directe d'après le Théorème 1. Il en résulte que

$$W = W' \times_{\mathcal{C}^S(B, U_n)} \mathcal{C}^S(A'_n, U_n)$$

est une sous-variété directe de $W' \times \mathcal{C}^S(A'_n, U_n)$, ce qui démontre le lemme.

Démonstration du Théorème. Avec les notations du lemme, pour tout fermé A' de A contenu dans le domaine d'une carte de M et tout ouvert U de X qui soit le domaine d'une carte, $W \cap \Omega$ est ouvert dans W et la restriction $W \cap \Omega \rightarrow \mathcal{C}^S(A', U)$ est analytique. On en déduit que si (A_1, \dots, A_n) et $(A_1^1, \dots, A_{n_1}^1)$ sont deux suites de fermés de A vérifiant les conditions du lemme, en posant

$$W = \mathcal{C}^S(A, (A_i); X, (U_i)) \quad \text{et} \quad W^1 = \mathcal{C}^S(A, (A_j^1); X, (U_j^1)),$$

l'ensemble $W \cap W_1$ est ouvert dans W et W_1 pour les topologies sous-jacentes à leurs structures de variété respectives, et que les structures de variété induites sur $W \cap W_1$ par celles de W et de W_1 coïncident. Or les ensembles de la forme W recouvrent $\mathcal{C}^s(A, X)$. La structure de variété obtenue sur $\mathcal{C}^s(A, X)$ en recollant les structures des W répond à la question, et c'est évidemment la seule ; le théorème est démontré.

4. Description de l'espace tangent à $\mathcal{C}^s(A, X)$.

Soit M une variété de dimension finie sur $\underline{\mathbb{R}}$ de classe \mathcal{C}^s , et A une partie compacte de M . Soit \mathcal{E} un ensemble muni d'une projection p sur A . Une structure de fibré vectoriel de classe \mathcal{C}^s sur \mathcal{E} est donnée par :

- une famille (A_i) de parties fermées de A dont les intérieurs recouvrent A ,
 - pour chaque i une bijection φ_i de $p^{-1}(A_i)$ sur le produit de A_i par un espace de Banach E_i ,
 - pour chaque couple (i, j) un élément $\gamma_{i, j}$ de $\mathcal{C}^s(A_i \cap A_j, \mathcal{L}(E_i, E_j))$;
- ces données étant soumises aux conditions suivantes :

$$(i) \text{ pour } x \in A_i \cap A_j \text{ et } y \in p^{-1}(x), \quad \varphi_j(y) = \gamma_{i, j}(x) \cdot \varphi_i(y),$$

$$(ii) \gamma_{i, k}|_{A_i \cap A_j \cap A_k} = \gamma_{j, k}|_{A_i \cap A_j \cap A_k} \cdot \gamma_{i, j}|_{A_i \cap A_j \cap A_k}$$

(la relation induite par (ii) sur les applications sous-jacentes aux $\gamma_{i, j}$ est une conséquence de (i)).

Pour tout fermé A' de A , on pose $A'_i = A' \cap A_i$ et on note $\Gamma^s(A', \mathcal{E})$ l'ensemble des familles (f_i) telles que

$$f_i \in \mathcal{C}^s(A'_i, E_i) \quad \text{et} \quad f_j|_{A_i \cap A_j} = \sum_{i,j} f_i|_{A_i \cap A_j} .$$

Si $f \in \Gamma^s(A', \mathcal{E})$, il existe une section de \mathcal{E} au-dessus de A' et une seule f telle que $\varphi_i(f(x)) = (x, f_i(x))$ pour tout i .

Si X est une variété analytique et si \mathcal{F} est un fibré vectoriel analytique sur X , on définit de façon évidente un fibré $f^*(\mathcal{F})$ de classe \mathcal{C}^s sur A pour tout $f \in \mathcal{C}^s(A, X)$. Il résulte de la construction faite au n°3 de la structure de variété sur $\mathcal{C}^s(A, X)$ que

$$T_f \mathcal{C}^s(A, X) = \Gamma^s(A, f^*(TX))$$

où TX désigne le fibré tangent de X .

Le théorème de Whitney s'étend aux fibrés de classe \mathcal{C}^s de la façon suivante : pour tout fermé B de A , la restriction $\Gamma^s(A, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma^s(B, \mathcal{E})$ est un épimorphisme direct. En effet, soit (A_i) une famille de fermés de A dont les intérieurs recouvrent A , définissant la structure de fibré de \mathcal{E} , et contenus dans des domaines de cartes de \mathbb{R}^n . Posons $B_i = B \cap A_i$. D'après le Théorème 1, il existe une section linéaire continue

$$\sigma_i : \Gamma^s(B_i, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma^s(A_i, \mathcal{E})$$

de l'application de restriction. Si (φ_i) est une partition de l'unité sur A , de classe \mathcal{C}^s , subordonnée au recouvrement de A par les intérieurs des A_i , on obtient une section linéaire continue

$$\sigma : \Gamma^s(B, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma^s(A, \mathcal{E})$$

de l'application de restriction en posant $\sigma(f) = \sum \varphi_i \cdot \sigma_i(f|_{B_i})$.

Il en résulte que si X est une variété analytique, la restriction $\mathcal{C}^s(A, X) \rightarrow \mathcal{C}^s(B, X)$ est une submersion directe.

5. Variétés de plongements.

Soient M une variété de dimension finie sur $\underline{\mathbb{R}}$ et de classe \mathcal{C}^s ,
 $s \geq 1$, A une partie compacte de M , et X une variété analytique séparée.
 On note $\mathcal{P}^s(A, X)$ la partie de $\mathcal{C}^s(A, X)$ formée des \underline{f} dont l'application
 sous-jacente est injective et tels que pour tout $x \in A$, l'application linéaire

$$f_1(x) : T_x M \rightarrow T_{\underline{f}(x)} X$$

soit injective.

PROPOSITION 2. L'ensemble $\mathcal{P}^s(A, X)$ est ouvert dans $\mathcal{C}^s(A, X)$.

Démonstration. Supposons d'abord $M = E$ espace vectoriel sur $\underline{\mathbb{R}}$ et $X = F$
 espace de Banach. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, posons

$$c(u) = \inf_{\|t\|=1} \|u(t)\|,$$

et pour

$$\underline{f} = (f_0, f_1, \dots) \in \mathcal{C}^s(A, F),$$

posons

$$c(\underline{f}) = \inf_{x \in A} c(f_1(x)).$$

Si $\underline{f} \in \mathcal{P}^s(A, F)$, $c(\underline{f}) > 0$. Il existe un $a > 0$ tel que

$$\|\eta(x, t)\| = \|f_0(x+t) - f_0(x) - f_1(x, t)\| \leq \frac{1}{4} c(\underline{f}) \|t\|$$

pour $\|t\| \leq a$.

Si $\underline{h} \in \mathcal{C}^s(A, F)$ et $\|\underline{h}\|_{s,1} \leq \frac{1}{4} c(\underline{f})$, on a en posant $\underline{g} = \underline{f} + \underline{h}$, les
 inégalités

$$c(\underline{g}) \geq \frac{3}{4} c(\underline{f}) \quad \text{et} \quad \|g_0(x+t) - g_0(x)\| \leq \frac{1}{4} c(\underline{f}) \|t\| \quad \text{pour} \quad \|t\| \leq a.$$

Ceci entraîne que $g_1(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ est une injection de E dans F pour tout

x et que $g_0(y) \neq g_0(x)$ si $\|y-x\| \leq a$. Si de plus

$$\|h\| < \frac{1}{2} \sup_{\|y-x\| \geq a} \|f_0(y) - f_0(x)\|,$$

g_0 sera injective et on aura $\underline{g} \in \mathcal{P}\mathcal{L}^s(A, \mathbb{F})$. L'ensemble $\mathcal{P}\mathcal{L}^s(A, \mathbb{F})$ est donc un voisinage de \underline{f} , ce qui démontre la proposition dans le cas particulier étudié. Dans le cas général, si $\underline{f} \in \mathcal{P}\mathcal{L}^s(A, X)$ soit (A_i) une famille finie de fermés de A contenus dans des domaines de cartes de M , dont les images par \underline{f} soient contenus dans des domaines U_i de cartes de X , et dont les intérieurs recouvrent A . Soit (A'_i) une famille de fermés de A telle que A'_i soit contenu dans l'intérieur de A_i pour tout i et que $A = \bigcup A'_i$. Si $\underline{g} \in \mathcal{C}^s(A, (A_i); X, (U_i))$, pour que $\underline{g} \in \mathcal{P}\mathcal{L}^s(A, X)$, il faut et il suffit que $\underline{g}|_{A'_i} \in \mathcal{P}\mathcal{L}^s(A'_i, U_i)$ et que $\underline{g}(A'_i) \cap \underline{g}(X - A'_i) = \emptyset$. Ces conditions définissent un voisinage de \underline{f} , et la proposition est démontrée.

Si M est une variété analytique compacte (donc de dimension finie) et $s \geq 1$, l'ensemble $\text{Diff}^s(M)$ des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^s de M est ouvert dans $\mathcal{C}^s(M, M)$, c'est en effet l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}\mathcal{L}^s(M, M)$ induisant une permutation de l'ensemble des composantes connexes de M . L'espace tangent à $\text{Diff}^s(M)$ en I (application identique) est l'espace de Banach des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^s sur M .

Une amère déception nous attend ici : la loi de composition sur $\text{Diff}^s(M)$ est continue, mais n'est pas différentiable, et $\text{Diff}^s(M)$ n'est pas un groupe de Lie banachique. On peut d'ailleurs trouver, si $\dim(M) > 0$, des difféomorphismes de M arbitrairement voisins de I pour la topologie \mathcal{C}^∞ qui ne sont pas obtenus par intégration d'un champ de vecteurs.