

# SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. DOUADY

## Notion d'espace analytique banachique

*Séminaire Jean Leray*, n° 4 (1964-1965), p. 26-32

<[http://www.numdam.org/item?id=SJL\\_1964-1965\\_\\_4\\_26\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965__4_26_0)>

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

NOTION D'ESPACE ANALYTIQUE BANACHIQUE

par

A. DOUADY

1. Les modèles.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f$  une application analytique de  $U$  dans  $F$ , et posons  $X = f^{-1}(0)$ . Pour tout espace de Banach  $G$ , notons  $\mathcal{H}(U, G)$  l'espace vectoriel des applications analytiques de  $U$  dans  $G$ . Si on a une application bilinéaire continue  $G' \times G'' \rightarrow G$ , notée comme un produit, il lui correspond un produit bilinéaire

$$\mathcal{H}(U, G') \times \mathcal{H}(U, G'') \rightarrow \mathcal{H}(U, G).$$

Appliquons ceci au produit  $\mathcal{L}(F, G) \times F \rightarrow G$ ; nous noterons  $\mathcal{N}(f, G)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}(U, G)$  formé des fonctions de la forme  $\lambda.f$  avec  $\lambda \in \mathcal{H}(U, \mathcal{L}(F, G))$ . Si  $g \in \mathcal{N}(f, G)$ , on a  $g(x) = 0$  pour  $x \in X$ .

Pour tout ouvert  $U'$  de  $U$ , posons  $\Psi(U', G) = \mathcal{H}(U', G) / \mathcal{N}(f_{U'}, G)$ .

On obtient ainsi un préfaisceau  $U' \mapsto \Psi(U', G)$  sur  $U$ . Le faisceau associé à ce préfaisceau a pour support  $X$ ; notons  $\tilde{\Phi}(G)$  ce faisceau, restreint à  $X$ . A une section de  $\tilde{\Phi}(G)$  sur un ouvert de  $X$  correspond une fonction continue à valeurs dans  $G$  définie sur le même ouvert, appelée fonction (ensembliste) sous-jacente. Deux sections différentes peuvent avoir même fonction sous-jacente comme toujours dans les théories "avec nilpotents".

Si  $W$  est un ouvert de  $G$ , notons  $\tilde{\Phi}(W)$  le sous-faisceau d'ensembles de  $\tilde{\Phi}(G)$  ayant pour sections les sections de  $\tilde{\Phi}(G)$  dont la fonction sous-jacente prend ses valeurs dans  $W$ .

Soient  $G$  et  $G'$  deux espaces de Banach,  $W$  et  $W'$  des ouverts de  $G$  et  $G'$  respectivement,  $h$  une application analytique de  $W$  dans  $W'$ . Nous allons associer à  $h$  un morphisme  $h_*: \Phi(W) \rightarrow \Phi(W')$  de faisceaux d'ensembles. Pour cela, nous aurons besoin du

LEMME 1. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $U \times F$  contenant  $X \times 0$ , et  $\eta$  une application analytique de  $\Omega$  dans  $G$ , nulle sur  $U \times 0 \cap \Omega$ . Il existe alors un voisinage ouvert  $U'$  de  $X$  dans  $U$  tel que  $(x, f(x)) \in \Omega$  pour  $x \in U'$  et que la fonction  $g \in \mathcal{H}(U', G)$  définie par  $g(x) = \eta(x, f(x))$  appartienne à  $\mathcal{N}(f|_{U'}, G)$ .

Démonstration. Pour  $(x, y) \in \Omega$ , soit  $\eta'_2(x, y) \in \mathcal{L}(F, G)$  la dérivée partielle de  $\eta$  par rapport à  $y$ . Si  $(x, ty) \in \Omega$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\eta(x, y) = \int_0^1 \eta'_2(x, ty) \cdot y \, dt = \left( \int_0^1 \eta'_2(x, ty) \, dt \right) \cdot y.$$

Soit  $U'$  l'ensemble des  $x$  tels que  $(x, tf(x)) \in \Omega$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $g(x) = \lambda(x) \cdot f(x)$  pour  $x \in U'$  en posant

$$\lambda(x) = \int_0^1 \eta'_2(x, tf(x)) \, dt,$$

ce qui démontre le lemme.

Revenons à l'application analytique  $h$  de  $W$  dans  $W'$ . Soient  $x_0 \in X$  et  $\varphi \in \Phi_{x_0}(W)$  un germe de section du faisceau  $\Phi(W)$ . Soit  $\gamma \in \mathcal{H}_{x_0}(U, W)$  un représentant de  $\varphi$ . On a  $h \circ \gamma \in \mathcal{H}_{x_0}(U, W')$ , et l'image  $h_*(\varphi)$  de  $h \circ \gamma$  dans  $\Phi_{x_0}(W')$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$ . En effet, soit  $\gamma' = \gamma + \lambda \cdot f$  un autre représentant, définissons  $\eta \in \mathcal{H}_{(x_0, 0)}(U \times F, G')$

par

$$h(\gamma(x) + \lambda(x).y) = h(\gamma(x)) + \eta(x,y) ;$$

et  $g \in \mathcal{H}_{x_0}^c(U, G')$  par  $g(x) = \eta(x, f(x))$  ; on a  $h \circ \gamma' = h \circ \gamma + g$  et  $g \in \mathcal{N}_x(f, G')$  d'après le lemme 1, ce qui démontre notre assertion.

Ceci permet d'associer  $h_*$  à  $h$ , et la correspondance  $W \rightarrow \Phi(W)$  devient un foncteur de la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et applications analytiques dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur  $X$ .

Nous dirons que l'espace topologique  $X$ , muni de ce foncteur, est le modèle d'espace analytique banachique défini par  $(U, F, f)$  et nous le noterons  $\mu(U, F, f)$ .

#### Remarques.

1) Si  $f = 0$ , on a  $X = U$  et le foncteur  $\Phi$  n'est autre que celui qui associe à  $W$  le faisceau des applications analytiques dans  $W$ . On dit alors que le modèle  $(X, \Phi)$  est lisse.

2) Si  $\dot{U} = E$ , et si  $f : E \rightarrow F$  est linéaire continue,  $X = \text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ . Le foncteur  $\Phi$  s'identifie au foncteur structural du modèle lisse défini par l'espace de Banach  $X$  si et seulement si  $f$  est un homomorphisme direct.

## 2. Définition des espaces analytiques banachiques.

Soit  $\mathcal{K}$  une catégorie, on appelle espace  $\mathcal{K}$ -foncté un espace topologique muni d'un foncteur de  $\mathcal{K}$  dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur  $X$ . Soient  $(X, \Phi)$  et  $(X', \Phi')$  deux espaces  $\mathcal{K}$ -fonctés, un morphisme de  $(X, \Phi)$  dans  $(X', \Phi')$  est un couple  $(f_0, f_1)$  où  $f_0$  est une application continue de  $X$  dans  $X'$  et  $f_1$  un morphisme de foncteurs de  $f_0^* \circ \Phi'$

dans  $\bar{\Phi}$ , où  $f_0^*$  est le foncteur "image réciproque par  $f_0$ " de la catégorie des faisceaux sur  $X'$  dans la catégorie des faisceaux sur  $X$ .

Prenant pour  $\mathcal{K}$  la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et applications analytiques, on appelle espace analytique banachique un espace  $\mathcal{K}$ -foncté dont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe, pour la structure induite, à un modèle.

PROPOSITION 1. Soit  $(X, \bar{\Phi})$  un espace analytique banachique et  $W$  un ouvert d'un espace de Banach. L'ensemble des morphismes de  $(X, \bar{\Phi})$  dans le modèle lisse  $W$  s'identifie à  $\bar{\Phi}(X, W)$ .

La démonstration est asinitrottante (une page). Nous ne la ferons pas ici

PROPOSITION 2. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f$  une application analytique de  $U$  dans  $F$ , et  $X = (X, \bar{\Phi})$  le modèle défini par  $(U, F, f)$ . Pour tout espace analytique banachique  $X' = (X', \bar{\Phi}')$ , l'ensemble des morphismes de  $X'$  dans  $X$  s'identifie à l'ensemble des morphismes  $u$  de  $X'$  dans  $U$  tels que  $f \circ u = 0$ .

Remarque.

La proposition 2 peut aussi s'énoncer en disant que  $\mu(U, F, f)$  est noyau de la double flèche  $U \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{0} \end{array} F$  dans la catégorie des espaces analytiques banachiques (et même dans celle des espaces  $\mathcal{K}$ -fonctés).

Démonstration. Soit  $i$  le morphisme canonique de  $X$  dans  $U$ . Comme  $f \in \mathcal{N}(f, F)$ , l'image de  $f$  dans  $\bar{\Phi}(X, F)$  est nulle, et  $f \circ i = 0$  d'après la proposition 1.

Soit  $u = (u_0, u_1)$  un morphisme de  $X'$  dans  $U$  tel que  $f \circ u = 0$ . On a  $u_0(X') \subset X$ , et quels que soient l'espace de Banach  $G$ , l'ouvert  $U'$  de  $U$  et  $g \in \mathcal{N}(f|_{U'}, G)$  on a  $u_1(g) = 0$ . L'homomorphisme  $u_1(G)$  du faisceau  $u_0^*(\mathcal{H}_U(G))$  dans  $\Phi'(G)$  se factorise donc de façon unique par  $u_0^*(\Phi(G))$ , et cette propriété subsiste si on remplace  $G$  par un de ses ouverts  $W$ . Ceci démontre la proposition.

Si  $X$  est un espace analytique banachique dont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe à un modèle lisse, on dira que  $X$  est lisse. La notion d'espace analytique banachique lisse est équivalente à celle de variété analytique banachique.

Soit  $(X, \Phi)$  un espace analytique. Un sous-espace analytique de  $(X, \Phi)$  est un espace analytique  $(X', \Phi')$  tel que  $X'$  soit un sous-espace de  $X$ , que pour tout objet  $W$  de  $\mathcal{K}$ , le faisceau  $\Phi'(W)$  soit un faisceau quotient du faisceau induit sur  $X'$  par  $\Phi(W)$ , et que pour tout morphisme  $h : W \rightarrow W'$  de  $\mathcal{K}$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Phi(W) & \xrightarrow{\Phi(h)} & \Phi(W') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi'(W) & \xrightarrow{\Phi'(h)} & \Phi'(W') \end{array},$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques, soit commutatif.

### 3. Un critère de finitude.

Un espace analytique banachique  $X$  sera dit de dimension finie en un point  $x \in X$  s'il existe un voisinage ouvert de  $x$  isomorphe à un modèle  $\mu(U, F, f)$  où  $U$  est un ouvert d'un espace de dimension finie. On verra dans

le prochain exposé que, dans ce cas, on peut également supposer  $F$  de dimension finie.

Soient  $X$  et  $X'$  deux espaces analytiques banachiques,  $h$  un morphisme de  $X$  dans  $X'$ , et  $x$  un point de  $X$ ; posons  $x' = h(x)$ . On dira que  $h$  est compact en  $x$  s'il existe un isomorphisme  $\varphi$  d'un voisinage ouvert  $X_1$  de  $x$  sur un modèle  $\mu(U, F, f)$ , un isomorphisme  $\varphi'$  d'un voisinage ouvert  $X'_1$  de  $x'$  sur un modèle  $\mu(U', F', f')$  et une application analytique  $\bar{h}$  de  $U$  dans  $U'$  tels que :

a)  $h(X_1) \subset X'_1$  ,

b) le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X'_1 \\ \varphi \downarrow & & \varphi' \downarrow \\ U & \xrightarrow{\bar{h}} & U' \end{array}$$

soit commutatif ,

c) l'application linéaire tangente à  $\bar{h}$  en  $\varphi(x)$  soit compacte.

**PROPOSITION 3.** Soit  $X$  un espace analytique banachique et  $x$  un point de  $X$ . Si le morphisme identique de  $X$  est compact en  $x$ , alors  $X$  est de dimension finie en  $x$ .

Démonstration. Dans le diagramme (1), où  $h = I$ , on peut supposer  $U' = U$  et  $\varphi' = \varphi$ . Notons  $E$  l'espace de Banach dont  $U$  est un ouvert, et  $\lambda : E \rightarrow E$  l'application linéaire tangente à  $\bar{h}$  en  $\varphi(x)$ . Comme  $\lambda$  est compacte par hypothèse,  $\text{Ker}(I - \lambda)$  et  $\text{Coker}(I - \lambda)$  sont de dimension finie et  $I - \lambda$  est un homomorphisme direct. Posons  $E' = \text{Im}(I - \lambda)$  et soit

$p : E \rightarrow E'$  une projection linéaire. On a  $p \circ \bar{h} \circ \varphi = p \circ \varphi$ , ce qui montre que le modèle  $\varphi(X_1)$  est un sous-espace analytique de

$$\mu(U, E', p \circ (I - \bar{h})) .$$

Or  $p \circ (I - \bar{h})$  est une submersion directe en  $\varphi(x)$  et le modèle

$$\mu(U, E', p \circ (I - \bar{h}))$$

est lisse de dimension finie au voisinage de  $\varphi(x)$ . Ceci démontre la proposition.