Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

A. Douady

Notion d'espace analytique banachique

Séminaire Jean Leray, n° 4 (1964-1965), p. 26-32
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_26_0>

NOTION D'ESPACE ANALYTIQUE BANACHIQUE

par

A. DOUADY

1. Les modèles.

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, f une application analytique de U dans F, et posons $X = f^{-1}(0)$. Pour tout espace de Banach G, notons $\mathcal{H}(U,G)$ l'espace vectoriel des applications analytiques de U dans G. Si on a une application bilinéaire continue $G' \times G'' \to G$, notée comme un produit, il lui correspond un produit bilinéaire

$$\mathcal{H}(U,G') \times \mathcal{H}(U,G'') \to \mathcal{H}(U,G).$$

Appliquons ceci au produit $\mathcal{L}(F,G) \times F \to G$; nous noterons $\mathcal{N}(f,G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(U,G)$ formé des fonctions de la forme $\lambda.f$ avec $\lambda \in \mathcal{H}(U,\mathcal{L}(F,G))$. Si $g \in \mathcal{N}(f,G)$, on a $g(x) = 0$ pour $x \in X$.

Pour tout ouvert U' de U, posons $\psi(U',G) = \mathcal{H}(U',G)/\mathcal{N}(f_{U'},G)$. On obtient ainsi un préfaisceau $U' \mapsto \psi(U',G)$ sur U. Le faisceau associé à ce préfaisceau a pour support X ; notons $\Phi(G)$ ce faisceau, restreint à X. A une section de $\Phi(G)$ sur un ouvert de X correspond une fonction continue à valeurs dans G définie sur le même ouvert, appelée fonction (ensembliste) sous-jacente. Deux sections différentes peuvent avoir même fonction sous-jacente comme toujours dans les théories "avec nilpotents".

Si W est un ouvert de G, notons $\Phi(W)$ le sous-faisceau d'ensembles de $\Phi(G)$ ayant pour sections les sections de $\Phi(G)$ dont la fonction sous-jacente prend ses valeurs dans W.

Soient G et G' deux espaces de Banach, W et W' des ouverts de G et G' respectivement, h une application analytique de W dans W'. Nous allons associer à h un morphisme $h_*: \Phi(W) \to \Phi(W')$ de faisceaux d'ensembles. Pour cela, nous aurons besoin du

LEMME 1. _Soit_ Ω _un ouvert de_ $U \times F$ _contenant_ $X \times 0$, _et_ η _une application analytique de_ Ω _dans_ G, _nulle sur_ $U \times 0 \cap \Omega$. _Il existe alors un voisinage ouvert_ U' _de_ X _dans_ U _tel que_ $(x,f(x)) \in \Omega$ _pour_ $x \in U'$ _et que la fonction_ $g \in \mathcal{H}(U',G)$ _définie par_ $g(x) = \eta(x,f(x))$ _appartienne à_ $\mathcal{N}(f|_{U'},G)$.

Démonstration. Pour $(x,y) \in \Omega$, soit $\eta_2'(x,y) \in \mathcal{L}(F,G)$ la dérivée partielle de η par rapport à y. Si $(x,ty) \in \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\eta(x,y) = \int_0^1 \eta_2'(x,ty).y \, dt = \left(\int_0^1 \eta_2'(x,ty)dt\right).y .$$

Soit U' l'ensemble des x tels que $(x,tf(x)) \in \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$, on a $g(x) = \lambda(x).f(x)$ pour $x \in U'$ en posant

$$\lambda(x) = \int_0^1 \eta_2'(x,tf(x))dt,$$

ce qui démontre le lemme.

Revenons à l'application analytique h de W dans W'. Soient $x_0 \in X$ et $\varphi \in \Phi_{x_0}(W)$ un germe de section du faisceau $\Phi(W)$. Soit $\gamma \in \mathcal{H}_{x_0}(U,W)$ un représentant de φ. On a $h \circ \gamma \in \mathcal{H}_{x_0}(U,W')$, et l'image $h_*(\varphi)$ de $h \circ \gamma$ dans $\Phi_{x_0}(W')$ ne dépend pas du choix de γ. En effet, soit $\gamma' = \gamma + \lambda.f$ un autre représentant, définissons $\eta \in \mathcal{H}_{(x_0,0)}(U \times F,G')$

par

$$h(\gamma(x) + \lambda(x).y) = h(\gamma(x)) + \eta(x,y) \ ;$$

et $g \in \mathcal{H}_{x_0}(U,G')$ par $g(x) = \eta(x,f(x))$; on a $h \circ \gamma' = h \circ \gamma + g$ et $g \in \mathcal{N}_x(f,G')$ d'après le lemme 1, ce qui démontre notre assertion.

Ceci permet d'associer h_* à h , et la correspondance $W \to \Phi(W)$ devient un foncteur de la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et applications analytiques dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X .

Nous dirons que l'espace topologique X , muni de ce foncteur, est le modèle d'espace analytique banachique défini par (U,F,f) et nous le noterons $\mu(U,F,f)$.

Remarques.

1) Si $f = 0$, on a $X = U$ et le foncteur Φ n'est autre que celui qui associe à W le faisceau des applications analytiques dans W . On dit alors que le modèle (X, Φ) est lisse.

2) Si $U = E$, et si $f : E \to F$ est linéaire continue, $X = \operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel fermé de E . Le foncteur Φ s'identifie au foncteur structural du modèle lisse défini par l'espace de Banach X si et seulement si f est un homomorphisme direct.

2. Définition des espaces analytiques banachiques.

Soit $\mathcal{K}$ une catégorie, on appelle espace $\mathcal{K}$-foncté un espace topologique muni d'un foncteur de $\mathcal{K}$ dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X . Soient (X, Φ) et (X', Φ') deux espaces $\mathcal{K}$-fonctés, un morphisme de (X, Φ) dans (X', Φ') est un couple (f_0, f_1) où f_0 est une application continue de X dans X' et f_1 un morphisme de foncteurs de $f_0^* \circ \Phi'$

dans $\bar{\Phi}$, où f_o^* est le foncteur "image réciproque par f_o " de la catégorie des faisceaux sur X' dans la catégorie des faisceaux sur X .

Prenant pour $\mathcal{K}$ la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et applications analytiques, on appelle espace analytique banachique un espace $\mathcal{K}$-foncté dont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe, pour la structure induite, à un modèle.

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> (X, Φ) <u>un espace analytique banachique et</u> W <u>un ouvert d'un espace de Banach.</u> <u>L'ensemble des morphismes de</u> (X, Φ) <u>dans le modèle lisse</u> W <u>s'identifie à</u> $\Phi(X,W)$.

La démonstration est asinitrottante (une page). Nous ne la ferons pas ici

PROPOSITION 2. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach,</u> U <u>un ouvert de</u> E , f <u>une application analytique de</u> U <u>dans</u> F , <u>et</u> $X = (X, \Phi)$ <u>le modèle défini par</u> (U,F,f) . <u>Pour tout espace analytique banachique</u> $X' = (X', \Phi')$, <u>l'ensemble des morphismes de</u> X' <u>dans</u> X <u>s'identifie à l'ensemble des morphismes</u> u <u>de</u> X' <u>dans</u> U <u>tels que</u> $f \circ u = 0$.

<u>Remarque</u>.

La proposition 2 peut aussi s'énoncer en disant que $\mu(U,F,f)$ est noyau de la double flèche $U \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F$ dans la catégorie des espaces analytiques banachiques (et même dans celle des espaces $\mathcal{K}$-danctés).

<u>Démonstration</u>. Soit i le morphisme canonique de X dans U . Comme $f \in \mathcal{N}(f,F)$, l'image de f dans $\Phi(X,F)$ est nulle, et $f \circ i = 0$ d'après la proposition 1.

Soit $u = (u_o, u_1)$ un morphisme de X' dans U tel que $f \circ u = 0$. On a $u_o(X') \subset X$, et quels que soient l'espace de Banach G, l'ouvert U' de U et $g \in \mathcal{N}(f_{U'}, G)$ on a $u_1(g) = 0$. L'homomorphisme $u_1(G)$ du faisceau $u_o^*(\mathcal{H}_U(G))$ dans $\Phi'(G)$ se factorise donc de façon unique par $u_o^*(\Phi(G))$, et cette propriété subsiste si on remplace G par un de ses ouverts W. Ceci démontre la proposition.

Si X est un espace analytique banachique dont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe à un modèle lisse, on dira que X est lisse. La notion d'espace analytique banachique lisse est équivalente à celle de variété analytique banachique.

Soit (X, Φ) un espace analytique. Un sous-espace analytique de (X, Φ) est un espace analytique (X', Φ') tel que X' soit un sous-espace de X, que pour tout objet W de $\mathcal{K}$, le faisceau $\Phi'(W)$ soit un faisceau quotient du faisceau induit sur X' par $\Phi(W)$, et que pour tout morphisme $h : W \to W'$ de $\mathcal{K}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Phi(W) & \xrightarrow{\Phi(h)} & \Phi(W') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi'(W) & \xrightarrow{\Phi'(h)} & \Phi'(W') \end{array},$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques, soit commutatif.

3. Un critère de finitude.

Un espace analytique banachique X sera dit de dimension finie en un point $x \in X$ s'il existe un voisinage ouvert de x isomorphe à un modèle $\mu(U,F,f)$ où U est un ouvert d'un espace de dimension finie. On verra dans le prochain exposé que, dans ce cas, on peut également supposer F de dimension finie.

Soient X et X' deux espaces analytiques banachiques, h un morphisme de X dans X', et x un point de X ; posons $x' = h(x)$. On dira que h est <u>compact</u> en x s'il existe un isomorphisme φ d'un voisinage ouvert X_1 de x sur un modèle $\mu(U,F,f)$, un isomorphisme φ' d'un voisinage ouvert X'_1 de x' sur un modèle $\mu(U', F',f')$ et une application analytique $\bar{h}$ de U dans U' tels que :

a) $h(X_1) \subset X'_1$,

b) le diagramme

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X'_1 \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} \\ U & \xrightarrow{\bar{h}} & U' \end{array}$$

soit commutatif ,

c) l'application linéaire tangente à $\bar{h}$ en $\varphi(x)$ soit compacte.

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> X <u>un espace analytique banachique et</u> x <u>un point de</u> X. <u>Si le morphisme identique de</u> X <u>est compact en</u> x, <u>alors</u> X <u>est de dimension finie en</u> x .

<u>Démonstration</u>. Dans le diagramme (1), où $h = I$, on peut supposer $U' = U$ et $\varphi' = \varphi$. Notons E l'espace de Banach dont U est un ouvert, et $\lambda : E \to E$ l'application linéaire tangente à $\bar{h}$ en $\varphi(x)$. Comme λ est compacte par hypothèse, $\mathrm{Ker}(I - \lambda)$ et $\mathrm{Coker}(I - \lambda)$ sont de dimension finie et $I - \lambda$ est un homomorphisme direct. Posons $E' = \mathrm{Im}(I - \lambda)$ et soit

$p : E \to E'$ une projection linéaire. On a $p \circ \bar{h} \circ \varphi = p \circ \varphi$, ce qui montre que le modèle $\varphi(X_1)$ est un sous-espace analytique de

$$\mu(U, E', p \circ (I - \bar{h})) .$$

Or $p \circ (I - \bar{h})$ est une submersion directe en $\varphi(x)$ et le modèle

$$\mu(U, E', p \circ (I - \bar{h}))$$

est lisse de dimension finie au voisinage de $\varphi(x)$. Ceci démontre la proposition.