Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

A. Douady

L'espace analytique des sous modules d'un module de Banach

Séminaire Jean Leray, nº 4 (1964-1965), p. 60-73
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964-1965___4_60_0>

L'ESPACE ANALYTIQUE DES SOUS MODULES D'UN MODULE DE BANACH

par

A. DOUADY

1. Variété de morphismes directs (complément au premier exposé).

Soient E et E' deux espaces de Banach, notons $\mathcal{S}(E,E')$ l'ensemble des triplets $(F,h,F') \in \mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{G}(E')$ tels que $F = \operatorname{Ker} h$ et $F' = \operatorname{Im} h$.

PROPOSITION 0. a) *Soient E et E' deux espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{S}(E,E')$ est une sous-variété directe localement fermée de*

$$\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{G}(E').$$

La projection p_2 induit une immersion directe injective de $\mathcal{S}(E,E')$ dans $\mathcal{L}(E,E')$. Les projections p_{12} et p_{23} induisent des isomorphismes de $\mathcal{S}(E,E')$ sur des sous-variétés directes localement fermées de $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E,E')$ et $\mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{G}(E')$ respectivement. La projection p_{13} induit une submersion directe de $\mathcal{S}(E,E')$ dans $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{G}(E')$.

b) *Soient E, E' et E'' trois espaces de Banach. L'ensemble*

$$\mathcal{S}(E,E',E'') = \mathcal{S}(E,E') \times_{\mathcal{G}(E')} \mathcal{S}(E',E'')$$

est une sous-variété directe localement fermée de

$$\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{G}(E') \times \mathcal{L}(E',E'') \times \mathcal{G}(E'').$$

La projection p_{24} induit un isomorphisme de $\mathcal{S}(E,E',E'')$ sur une sous-variété directe localement fermée de $\mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{L}(E',E'')$, qui est ouverte dans l'ensemble $\Phi(E,E',E'')$ des couples $(h,h') \in \mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{L}(E',E'')$ tels que

$h' \circ h = 0$. <u>La projection</u> p_{135} <u>induit une submersion directe de</u> $\mathcal{S}(E,E',E'')$ <u>dans</u> $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{G}(E') \times \mathcal{G}(E'')$.

<u>Démonstration</u>. a) Soient (F_o,G_o) et (F'_o,G'_o) des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E et E' respectivement. L'expression de $\mathcal{S}(E,E')$ dans la carte

$$\psi_{F_o,G_o} \times I_{\mathcal{L}(E,E')} \times \psi_{F'_o,G'_o} : U_{G_o} \times \mathcal{L}(E,E') \times U_{G'_o} \to W ,$$

où

$$W = \mathcal{L}(F_o,G_o) \times \mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{L}(F'_o,G'_o)$$

est l'ensemble des triplets $(f,\ h = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix},\ f')$ vérifiant les conditions :

(i) : c inversible ;

(ii) : $b = dc^{-1} a$;

(iii): $f = - c^{-1} a$;

(iv) : $f' = dc^{-1}$.

En identifiant W à $V \times V'$, où

$$V = \{(a,c,d)\} \quad \text{et} \quad V' = \{(b,f,f')\} ,$$

on voit que l'expression de $\mathcal{S}(E,E')$ est le graphe d'une application analytique d'un ouvert de V dans V'. Ceci montre que $\mathcal{S}(E,E')$ est une sous-variété directe de $\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{G}(E')$ et que p_2 est une immersion. L'injectivité de p_2 est évidente. Les projections p_{12} et p_{23} sont donc aussi des immersions injectives, nous devons voir que ce sont des homéomorphismes sur leurs images. Cela résulte de ce que deux des conditions :

$$\text{Ker } h \in U_{G_o} \ ; \ c \text{ inversible} \ ; \ \text{Im } h \in U_{G'_o} \ ;$$

entraînent la troisième.

En identifiant W à $V_1 \times V_1'$, où $V_1 = \{(f,f',c)\}$ et $V_1' = \{(a,b,d)\}$, on voit que l'expression de $\mathcal{G}(E,E')$ est le graphe d'une application analytique de V_1 dans V_1'. On en déduit que p_{13} est une submersion directe.

b) Le fait que $\mathcal{G}(E,E',E'')$ soit une sous-variété directe de

$$\mathcal{G}(E) \times \mathcal{L}(E,E') \times \mathcal{G}(E') \times \mathcal{L}(E',E'') \times \mathcal{G}(E'')$$

résulte de ce que $p_3 : \mathcal{G}(E,E') \to \mathcal{G}(E')$ et $p_1 : \mathcal{G}(E',E'') \to \mathcal{G}(E')$ sont des submersions directes. Il est également immédiat que p_{135} est une submersion directe et que p_{24} est une immersion directe injective. Nous devons voir que p_{24} induit un homéomorphisme de $\mathcal{G}(E,E',E'')$ sur un ouvert de $\mathcal{D}(E,E',E'')$. Si (F_0,G_0), (F_0',G_0'), (F_0'',G_0'') sont des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E, E', E'' respectivement, et si

$$h = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \in \mathcal{L}(E,E') \qquad \text{et} \qquad h' = \begin{vmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{vmatrix} \in \mathcal{L}(E',E''),$$

les relations

$$\ll h' \circ h = 0 \ ; \quad c \ \text{inversible} \ ; \quad c' \ \text{inversible} \ ;\gg$$

entraînent

$$\ll \operatorname{Ker} h \in U_{G_0} \ ; \quad \operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} h' \in U_{G_0'} \ ; \quad \operatorname{Im} h' \in U_{G_0''} \gg .$$

Notre dernière assertion en découle et la proposition est démontrée.

2. <u>L'espace analytique des sous modules directs d'un module de Banach</u>.

Soient A une algèbre de Banach, et E un A-module de Banach. On appellera sous A-module direct de E tout sous A-module fermé de E qui admette un supplémentaire topologique <u>en tant qu'espace vectoriel</u>. Nous allons munir l'ensemble $\mathcal{G}_A(E)$ des sous A-modules directs de E d'une structure de sous-espace analytique banachique de $\mathcal{G}(E)$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E ; définissons une application analytique φ de l'ouvert U_G de $\mathcal{G}(E)$ (formé des sous-espaces de E admettant G comme supplémentaire) dans $\mathcal{L}(A \hat{\otimes} F, G)$ (qui n'est autre que l'espace des applications bilinéaires continues de $A \times F$ dans G, la topologie dont on munit le produit tensoriel étant ici la topologie π), en posant

$$\varphi(F') = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}),$$

où $p_{F'}$ désigne la projection de E sur G de noyau F' , où $m : A \hat{\otimes} E \to E$ est la multiplication, et où $j_{F'}$ est l'injection de F dans E d'image F' telle que $j_{F'}(x) - x \in G$ pour $x \in F$. On a $\varphi^{-1}(0) = \mathcal{G}_A(E) \cap U_G$.

Soient (F_0, G_0) et (F_1, G_1) deux couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E , et définissons φ_0 et φ_1 comme ci-dessus. Posons $U_i = U_{G_i}$. Les structures de sous-espace analytique banachique de $\mathcal{G}(E)$ induites sur $\mathcal{G}_A(E) \cap U_0 \cap U_1$ par les modèles $\mu(U_0, \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F_0, G_0), \varphi_0)$ et $\mu(U_1, \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F_1, G_1), \varphi_1)$ coïncident, comme on le voit en se ramenant aux deux cas particuliers suivants :

(i) $G_0 = G_1$. Dans ce cas, $\varphi_1 = \varepsilon^* \circ \varphi_0$, où ε est l'isomorphisme de F_1 sur F_0 parallèlement à $G = G_0 = G_1$, et

$$\varepsilon^* : \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F_0, G) \to \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F_1, G)$$

l'isomorphisme associé à ε .

(ii) $F_0 = F_1$. Dans ce cas, $\varphi_1(F') = \varepsilon(F') \circ \varphi_0(F') \circ (I_A \hat{\otimes} \gamma(F'))$ pour $F' \in U_0 \cap U_1$, où $\varepsilon(F')$ est l'isomorphisme de G_0 sur G_1 parallèlement à F' et $\gamma(F') = j_0(F')^{-1} \circ j_1(F')$, en notant $j_i(F')$ l'isomorphisme de

F sur F' parallèlement à G_i. Les applications ε et γ de $U_0 \cap U_1$ dans $\mathcal{L}(G_0,G_1)$ et $\mathcal{L}(F,F)$ respectivement sont analytiques.

Il existe donc sur $\mathcal{G}_A(E)$ une structure de sous-espace analytique banachique de $\mathcal{G}(E)$ et une seule qui, pour tout couple (F,G) de sous-espaces supplémentaires de E, induise sur $\mathcal{G}_A(E) \cap U_G$ la structure décrite ci-dessus. L'ensemble $\mathcal{G}_A(E)$ sera toujours muni de cette structure.

3. <u>Le morphisme</u> Im .

Soit A une algèbre de Banach, et soient E et E' deux A-modules de Banach. On notera $\mathcal{S}_A(E,E')$ l'espace analytique banachique

$$\mathrm{Hom}_A(E,E') \times_{\mathcal{L}(E,E')} \mathcal{S}(E,E').$$

PROPOSITION 1. <u>L'application analytique</u> $p_3 : \mathcal{S}(E,E') \to \mathcal{G}(E')$ <u>induit un morphisme</u> $\mathcal{S}_A(E,E') \to \mathcal{G}_A(E')$.

<u>Remarque</u> : Ensemblistement, cette proposition dit seulement que l'image d'une application A-linéaire de E dans E' est un sous A-module de E'.

<u>Démonstration</u>*. Soient (F_0,G_0) et (F_0,G'_0) des couples de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E et E' respectivement et soit $s = (F,f,F') \in \mathcal{S}_A(E,E')$, avec $F \in U_{G_0} \subset \mathcal{G}(E)$, $f \in \mathrm{Hom}_A(E,E')$, $F' \in U_{G'_0} \subset \mathcal{G}(E')$.

---

*) Dans le calcul qui suit, nous ferons l'abus de notation suivant : on se fixe un espace analytique banachique T quelconque ; quand nous écrirons $x \in X$, cela signifiera que x est un morphisme de T dans X ; si $\varphi : X \to Y$ est un morphisme, nous écrirons $\varphi(x)$ pour $\varphi \circ x$, etc...

Il s'agit de montrer que $F' \in \mathcal{G}_A(E')$. La question étant locale, cela suffira, et en vertu de la proposition 2 de l'exposé sur les espaces analytiques banachiques, cela se ramène à montrer que $\varphi'(F') = 0$, où $\varphi' : U_{G'_o} \to \mathcal{L}(A \hat{\otimes} F'_o, G'_o)$ est l'application définie au n° précédent, soit

$$\varphi'(F') = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}).$$

Or $j_{F'} = f_{|G_o} \circ u(f)^{-1}$, où u est l'application composée

$$\mathrm{Hom}_A(E,E') \to \mathcal{L}(E,E') \to \mathcal{L}(G_o,F'_o).$$

On a donc

$$\varphi'(F') = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} f_{|G_o}) \circ (I_A \hat{\otimes} u(f)^{-1})$$

$$= p_{F'} \circ f \circ m_{|A \hat{\otimes} G'_o} \circ (I_A \hat{\otimes} u(f)^{-1}) = 0 ,$$

car $p_{F'} \circ f = 0$ dès que $(F,f,F') \in \mathcal{S}(E,E')$. Ceci démontre la proposition.

On démontrerait de même que l'application analytique $p_1 : \mathcal{S}(E,E') \to \mathcal{G}(E)$ induit un morphisme $\mathcal{S}_A(E,E') \to \mathcal{G}_A(E)$.

PROPOSITION 2. Si E est de la forme $A \hat{\otimes} L$, où L est un espace de Banach, le morphisme

$$\mathcal{S}_A(E,E') \to \mathcal{G}_A(E')$$

est lisse.

Rappelons qu'un morphisme $Y \to X$ est dit lisse si, pour tout point $y \in Y$, il existe un voisinage V de l'image x de y dans X et un voisinage W de y dans Y tels que l'image de W soit dans V et que W soit isomorphe, comme espace analytique au-dessus de V, à un produit $V \times U$, où U est un ouvert d'un espace de Banach.

Démonstration*. Soit (F'_o, G'_o) un couple de sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires de E', et notons π la projection de E' sur F'_o de noyau G'_o.

(i) Définissons un morphisme

$$\alpha : \mathcal{S}_A(E,E') \to \mathcal{G}_A(E') \times \mathcal{L}(L,F'_o)$$

par $\alpha(s) = (F', \pi \circ f_{|L})$ pour $s = (F,f,F') \in \mathcal{S}_A(E,E')$.

(ii) Définissons un morphisme

$$\beta : U_{G'_o} \times \mathcal{L}(L,F'_o) \to \mathrm{Hom}_A(E,E') \times U_{G'_o}$$

par $\beta(F',u) = (f,F')$, où $f = m \circ (I_A \hat{\otimes} (j_{F'} \circ u))$.

Si $F' \in \mathcal{G}_A(E')$, on a

$$p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}) = 0 ,$$

d'où

$$p_{F'} \circ f = p_{F'} \circ m \circ (I_A \hat{\otimes} j_{F'}) \circ (I_A \hat{\otimes} u) = 0.$$

Il en résulte que β induit un morphisme de Ω dans $\mathcal{S}_A(E,E')$, où Ω désigne l'ouvert de $\mathcal{G}_A(E') \times \mathcal{L}(L,F'_o)$ formé des couples (F',u) tels que F' appartienne à $U_{F'_o}$ et que $\pi \circ f \in \mathcal{L}(E,F'_o)$ soit un épimorphisme direct, et où $\mathcal{S}_A(E,E')$ est plongé dans $\mathrm{Hom}_A(E,E') \times \mathcal{G}(E')$.

(iii) Il est immédiat que $\alpha \circ \beta = I_\Omega$. Montrons que $\beta \circ \alpha$ est l'identité de l'ouvert W de $\mathcal{S}_A(E,E')$ formé des couples (f,F') tels que F' appartienne à $U_{G'_o}$. Pour $s = (f,F') \in W$, posons $\beta(\alpha(s)) = t = (g,F')$. On a $\alpha(t) = \alpha \circ \beta \circ \alpha(s) = \alpha(s)$, soit $\pi \circ g_{|L} = \pi \circ f_{|L}$. Comme $f = j_{F'} \circ \pi \circ f$ et $g = j_{F'} \circ \pi \circ g$, ceci entraîne $g_{|L} = f_{|L}$, d'où $g = f$ car $\mathrm{Hom}_A(E,E') = \mathcal{L}(L,E')$.

La proposition est démontrée.

*) Voir note précédente.

COROLLAIRE : <u>Soient</u> A <u>une algèbre de Banach,</u> E <u>un</u> A-<u>module de Banach,</u> $L_0, \ldots, L_r$ <u>des espaces de Banach. Le morphisme</u>

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_r, \ldots, A \hat{\otimes} L_0, E) \to \mathcal{G}_A(E)$$

<u>est lisse</u>.

<u>Démonstration par récurrence</u>. Le morphisme

$$\mathcal{P}A(A \hat{\otimes} L_r, \ldots, A \hat{\otimes} L_0, E) \to \mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_{r-1}, \ldots, A \hat{\otimes} L_0, E)$$

se déduit du morphisme

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_r, A \hat{\otimes} L_{r-1}) \to \mathcal{G}_A(A \hat{\otimes} L_{r-1})$$

par changement de base. Il est donc lisse. Comme le morphisme

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_{r-1}, \ldots, A \hat{\otimes} L_0, E) \to \mathcal{G}_A(E)$$

est lisse par hypothèse de récurrence, le morphisme

$$\mathcal{P}_A(A \hat{\otimes} L_r, \ldots, A \hat{\otimes} L_0, E) \to \mathcal{G}_A(E) ,$$

composé de deux morphismes lisses, est lisse.

4. <u>Présentations finies directes</u>.

Soit A une algèbre de Banach. Un A-module de Banach F sera dit de type fini direct s'il existe un épimorphisme direct A-linéaire $\varepsilon : A^r \to F$, où $r \in \underline{\underline{N}}$.

Si F est de type fini direct, tout épimorphisme A-linéaire $\varepsilon' : A^{r'} \to F$ est direct. En effet, soit $\varepsilon : A^r \to F$ un épimorphisme direct, on peut construire une application A-linéaire, nécessairement continue, $f : A^r \to A^{r'}$ telle que $\varepsilon = \varepsilon' \circ f$; si $\sigma \in \mathcal{L}(F, A^r)$ est une section de ε, l'application $\sigma' = f \circ \sigma \in \mathcal{L}(F, A^{r'})$ est une section de ε'.

Si F admet une présentation finie directe, i.e. une suite exacte directe A-linéaire $A^q \to A^r \to F \to 0$, toute présentation finie de F est directe. En effet, si $\varepsilon : A^r \to F$ et $\varepsilon' : A^{r'} \to F$ sont deux épimorphismes directs, considérons $\varepsilon'' = (\varepsilon , \varepsilon') : A^{r+r'} \to F$; on a

$$\operatorname{Ker} \varepsilon'' \approx \operatorname{Ker} \varepsilon \oplus A^{r'} \approx A^r \oplus \operatorname{Ker} \varepsilon' ,$$

donc si $\operatorname{Ker} \varepsilon$ est de type fini direct, il en est de même de $\operatorname{Ker} \varepsilon'$.

Soit E un A-module de Banach. Il résulte du corollaire de la proposition 2 que l'ensemble des sous A-modules directs de E admettant une présentation finie directe est ouvert dans $\mathcal{G}_A(E)$.

5. Changement d'algèbre.

Soient A et A' deux algèbres de Banach, E un A-module de Banach, E' un A'-module de Banach, $\rho_0 : A \to A'$ un homomorphisme d'algèbres continu, qu'on ne suppose pas d'image fermée, et $\rho_1 : E \to E'$ une application continue ρ_0-linéaire (i.e. A-linéaire quand on considère E' comme un A-module au moyen de ρ_0), de sorte que $\rho = (\rho_0, \rho_1)$ est un dimorphisme.

Soit $F \in \mathcal{G}_A(E)$ un sous A-module admettant une présentation finie directe, que nous considèrerons comme un point $s \in \mathcal{S}_A(A^q,A^r,E)$. L'espace analytique banachique $\mathcal{S}_A(A^q,A^r,E)$ s'identifie à un ouvert du sous-espace $\mathcal{D}_A(A^q,A^r,E)$ de $\operatorname{Hom}_A(A^q,A^r) \times \operatorname{Hom}_A(A^r,E)$ formé des couples (u,v) tels que $v \circ u = 0$(*).

(*) Comme $\operatorname{Hom}_A(A^q,E)$ est un sous-espace direct de $\mathcal{L}(A^q,E)$, les modèles définis par la multiplication

$$m : \operatorname{Hom}_A(A^q,A^r) \times \operatorname{Hom}_A(A^r,E) \to \operatorname{Hom}_A(A^q,E)$$

et par $i \circ m$, où :

$$i : \operatorname{Hom}_A(A^q,E) \to \mathcal{L}(A^q,E)$$

est l'injection canonique, coïncident.

On définit

$$\rho_* : \mathrm{Hom}_A(A^q,A^r) \times \mathrm{Hom}_A(A^r,E) \to \mathrm{Hom}_A(A'^q,A'^r) \times \mathrm{Hom}_{A'}(A'^r,E')$$

par extension des scalaires de A à A' et au moyen de ρ_1, et ρ_* induit un morphisme de $\mathcal{D}_A(A^q,A^r,E)$ dans $\mathcal{D}_{A'}(A'^q,A'^r,E')$.

Considérons l'hypothèse suivante :

(H) $$\rho_*(s) \in S_{A'}(A'^q,A'^r,E') .$$

Remarquons que cette hypothèse porte seulement sur F : elle signifie que ρ_1 identifie $A' \otimes_A F$ à un sous A'-module direct F' de E' admettant une présentation finie directe.

PROPOSITION 3. <u>L'ensemble</u> W <u>des</u> $F \in \mathcal{G}_A(E)$ <u>vérifiant</u> (H) <u>est ouvert dans</u> $\mathcal{G}_A(E)$, <u>et il existe un morphisme et un seul</u> ρ_* <u>de</u> W <u>dans</u> $\mathcal{G}_{A'}(E')$ <u>tel que, quels que soient</u> q <u>et</u> r, <u>le diagramme</u> :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_A(A^q,A^r,E)|_W & \xrightarrow{\rho_*} & \mathcal{S}_{A'}(A'^q,A'^r,E') \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\rho_*} & \mathcal{G}_{A'}(E') \end{array}$$

<u>soit commutatif</u>.

<u>Démonstration</u>. Pour tous q,r le morphisme $p : \mathcal{S}_A(A^q,A^r,E) \to \mathcal{G}_A(E)$ est lisse, donc ouvert, et en posant

$$X_{q,r} = \mathcal{S}_A(A^q,A^r,E) \cap \rho_*^{-1}(\mathcal{S}_{A'}(A'^q,A'^r,E')) ,$$

$W_{q,r} = p(X_{q,r})$ est ouvert dans $\mathcal{G}_A(E)$. Donc $W = \bigcup W_{q,r}$ est ouvert.

Le morphisme $X_{q,r} \to W_{q,r}$ étant lisse et surjectif, c'est un <u>épimorphisme</u>

effectif(*) dans la catégorie des espaces analytiques banachiques, et pour montrer l'existence et l'unicité d'un morphisme $\rho_{q,r} : W_{q,r} \to \mathcal{G}_{A'}(E')$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{q,r} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{A'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{q,r} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{A'} \end{array}$$

commutatif, il suffit de montrer que $\rho_* \times \rho_*$ induit un morphisme de $X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r}$ dans $\mathcal{S}_{A'} \times_{\mathcal{G}_{A'}} \mathcal{S}_{A'}$.

Considérons l'ensemble H des sextuplets (u,v,u',v',f_o,f_1) d'applications A-linéaires tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^q & \xrightarrow{f_1} & A^q \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ A^r & \xrightarrow{f_o} & A^r \\ & v \searrow \quad \swarrow v' & \\ & E & \end{array}$$

soit commutatif et que les couples (u,v) et (u',v') appartiennent à $\mathcal{S}_A(A^q,A^r,E)$. On munit de façon évidente H d'une structure d'espace analytique banachique.

(*) Dans une catégorie avec produits fibrés, on dit qu'un morphisme $X \to W$ est un épimorphisme effectif si W est conoyau de la double flèche

$$X \times_W X \rightrightarrows X .$$

LEMME. <u>On a un morphisme lisse surjectif</u> φ <u>d'un ouvert</u> Y <u>de</u> H <u>dans</u>

$$\mathcal{S}_A(A^q,A^r,E)\times_{\mathcal{G}_A(E)}\mathcal{S}_A(A^q,A^r,E)$$

<u>défini par</u>

$$\varphi(u,v,u',v',f_o,f_1) = ((u,v),(u',v')).$$

<u>Démonstration du lemme</u>(*). Soit $h = (u,v,u',v',f_o,f_1)\in H$, et supposons qu'il existe un couple (F_o,G_o) de sous-espaces supplémentaires de E tel que $F = \operatorname{Im} v\in U_{G_o}$ et $F' = \operatorname{Im} v'\in U_{G_o}$. Soit $p_{F'}\in\mathcal{L}(E,G)$ la projection de noyau F' ; on a $p_{F'}\circ v = p_{F'}\circ v'\circ f_o = 0$, ce qui entraîne $F = F'$. Il en résulte qu'on a un morphisme φ d'un ouvert Y de H dans $\mathcal{S}_A\times_{\mathcal{G}_A}\mathcal{S}_A$ défini par la formule de l'énoncé. La surjectivité est un résultat classique. Nous nous contenterons de montrer que φ a des sections locales, ce qui nous suffira pour démontrer la proposition, laissant au lecteur le soin de montrer qu'il est lisse.

Soit $((u,v),(u',v'))\in\mathcal{S}_A\times_{\mathcal{G}_A}\mathcal{S}_A$; soient (F_o,G_o), (T_o,S_o) et (T_1,S_1) des couples de sous-espaces supplémentaires de E, A^r et A^q respectivement, et supposons que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} v'\in U_{G_o}$, $\operatorname{Ker} v'\in U_{S_o}$ et $\operatorname{Ker} v'\in U_{S_1}$. Nous allons construire

$$f_o\in\operatorname{Hom}_A(A^r,A^r) \quad\text{et}\quad f_1\in\operatorname{Hom}_A(A^q,A^q)$$

tels que (u,v,u',v',f_o,f_1) H . Vu les conventions faites, cela suffira.

Notons π les projections $E\to F_o$, $A^r\to T_o$ et $A^q\to T_1$ de noyau G_o , S_o et S_1 respectivement, et notons i les injections canoniques $G_o\to E$, $S_o\to A^r$ et $S_1\to A^q$. Alors

$$a = \pi\circ u'\circ i\in\mathcal{L}(S_1,T_o) \quad\text{et}\quad b = \pi\circ v'\circ i\in\mathcal{L}(S_o,F_o)$$

(*) Même convention que pour la démonstration des propositions 1 et 2.

sont inversibles. Définissons $f_o \in \mathrm{Hom}_A(A^r,A^r)$ et $f_1 \in \mathrm{Hom}_A(A^q,A^q)$ par

$$f_o\Big|_{\underline{\underline{C}}^r} = i \circ b^{-1} \circ \pi \circ v \in \mathcal{L}(\underline{\underline{C}}^r, A^r)$$

et

$$f_1\Big|_{\underline{\underline{C}}^q} = i \circ a^{-1} \circ \pi \circ f_o \circ u \in \mathcal{L}(\underline{\underline{C}}^q, A^q) .$$

Maintenant f_o et f_1 répondent à la question, ce qui démontre notre assertion.

<u>Fin de la démonstration de la proposition</u>. Soient Y' et φ' les analogues de Y et φ relativement au A'-module E'. Notons Z l'ouvert

$$\varphi^{-1}(X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r})$$

de Y. On définit par extension des scalaires et au moyen de ρ_1 un morphisme ρ_* de Z dans Y'. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
Z & \xrightarrow{\rho_*} & Y' \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\
X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r} & & \mathcal{S}_{A'} \times_{\mathcal{G}_{A'}} \mathcal{S}_{A'} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_{q,r} \times X_{q,r} & \xrightarrow[\rho_* \times \rho_*]{} & \mathcal{S}_{A'} \times \mathcal{S}_{A'}
\end{array} .$$

Comme φ est surjectif et admet des sections locales, on voit que $\rho_* \times \rho_*$ induit un morphisme de $X_{q,r} \times_{W_{q,r}} X_{q,r}$ dans $\mathcal{S}_{A'} \times_{\mathcal{G}_{A'}} \mathcal{S}_{A'}$, ce qui permet comme on l'a vu de construire un morphisme $\rho_{q,r}$ de $W_{q,r}$ dans $\mathcal{G}_{A'}(E')$. Si $r' \geqslant r$ et $q' - r' \geqslant q - r$, on a $W_{q',r'} \supset W_{q,r}$, et on vérifie immédiatement que $\rho_{q',r'}$ et $\rho_{q,r}$ coïncident sur $W_{q,r}$. Ceci permet de construire ρ par recollement et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 4. <u>Avec les notations de la proposition</u> 3, <u>si les applications</u> ρ_0 <u>et</u> ρ_1 <u>sont compactes, le morphisme</u> ρ_* <u>de</u> W <u>dans</u> $\mathcal{G}_{A'}(E')$ <u>est compact en tout point</u>.

<u>Démonstration.</u> L'application

$$\rho_* : \mathrm{Hom}_A(A^q,A^r) \times \mathrm{Hom}_A(A^r,E) \to \mathrm{Hom}_{A'}(A'^q,A'^r) \times \mathrm{Hom}_{A'}(A'^r,E')$$

est compacte. Le morphisme $\rho_* : \mathcal{S}_{A|W} \to \mathcal{S}_{A'}$ est donc compact en tout point, et comme le morphisme $\mathcal{S}_{A|W} \to W$ est surjectif et admet des sections locales, il en résulte que $\rho_* : W \to \mathcal{G}_{A'}$ est compact en tout point et la proposition est démontrée.