Jean Leray
Lucien Waelbroeck

Norme formelle d'une fonction composée (préliminaire à l'étude des systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts)

Séminaire Jean Leray, nº 1 (1964), p. 72-82
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1964___1_72_0>

NORME FORMELLE D'UNE FONCTION COMPOSÉE
(PRÉLIMINAIRE A L'ÉTUDE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES, HYPERBOLIQUES NON STRICTS)

par

Jean LERAY et Lucien WAELBROECK

Introduction

1. RELATION AVEC LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. J. Leray et Y. Ohya [4], en employant une suggestion de L. Waelbroeck, ont étudié les systèmes hyperboliques non stricts, dans le cas linéaire. Cette méthode s'adapte au cas non linéaire : on opère [5] par approximations successives, comme le fait P. Dionne [2] dans le cas strictement hyperbolique, mais en remplaçant les espaces de Sobolev par des classes de Gevrey, les normes de Sobolev par des normes formelles ; la majoration de ces approximations successives résulte de la résolution d'un problème de Cauchy formel, non linéaire, qu'on ramène au problème de Cauchy-Kowalewski[1] par des opérateurs transformant les classes de Gevrey formelles en classes de fonctions holomorphes.

C'est possible, parce que le théorème de Sobolev sur la norme d'une fonction composée s'étend aux normes formelles et parce que ces opérateurs respectent l'inégalité exprimant ce théorème ; cet article le prouve ; il complète donc les n°4 et 5 de [4].

2. SOMMAIRE. Etant donnée une algèbre normée de fonctions, nous définissons la norme formelle de ces fonctions ; <u>nous majorons la norme formelle d'une</u>

---

1) problème de Cauchy à données holomorphes.

fonction composée par la composée des normes formelles : voir (4.3). Nous définissons sur les séries formelles, des opérateurs, tels que la transformée d'une série composée soit majorée par la composée des séries transformées : voir (7.2). Parmi ces opérateurs se trouvent en particulier ceux qu'emploie [4] : les opérateurs de Gevrey.

Note.- L'une des conséquences évidentes de ces formules est le théorème classique de Gevrey [3] : une classe de Gevrey est une algèbre, contenant les composés de ses éléments.

§ 1. Norme formelle.

3. NOTATIONS.- Nous nous donnons : un domaine $X \subset \underline{\underline{R}}^{\ell}$ $(\ell < \infty)$;

un espace vectoriel $\underline{\underline{R}}^m (m < \infty)$;

une algèbre de Banach $A(X)$ de fonctions $a : X \to \underline{\underline{R}}$;

l'espace vectoriel $V(X)$ ayant pour éléments les applications

$$v = (v_1, \ldots, v_m) : X \to \underline{\underline{R}}^m \quad \text{telles que} \quad v_1, \ldots, v_m \in A(X) .$$

L'algèbre $A(X)$ ne contient pas nécessairement d'élément unité ; la norme $|a,X|$ de $a \in A(X)$ est une norme d'algèbre :

$$|a_1.a_2, X| \leqslant |a_1,X| . |a_2,X| \quad ;$$

$|v,X|$ est le vecteur à composantes $\geqslant 0$:

$$|v,X| = (|v_1,X|, \ldots, |v_m,X|).$$

Nous nous donnons en outre :

un domaine $Y \subset R^m$;

un espace vectoriel $B(X,Y)$ de fonctions $b : X \times Y \to \underline{\underline{C}}$;

sur cet espace vectoriel B, une quasi-norme[1] $\| b, X \times Y, n \|$ dépendant d'un paramètre $n = (n_1, \ldots, n_m)$, où $n_1, \ldots, n_m \geq 0$.

Notons $b \circ v$ la composée de $b \in B(X,Y)$ et $v \in V(X)$, c'est-à-dire la fonction qui est définie quand $x \in X$ et $v(x) \in Y$ et qui vaut alors

$$(b \circ v)(x) = b(x, v(x)).$$

Nous supposons que ces données satisfont <u>la condition suivante</u>[2] :

$$(3.1)\begin{cases} \text{si} \quad b \in B(X,Y),\ v \in V(X) \quad \text{et} \quad \| b, X \times Y, |v, X| \| < \infty, \\ \text{alors} \quad b \circ v \in A(X) \quad \text{et} \quad |b \circ v, X| \leq \| b, X \times Y, |v, X| \| . \end{cases}$$

Etant donnés

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_\ell), \quad \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \quad (\beta_1, \ldots, \gamma_m : \text{entiers} \geq 0),$$

nous notons

$$D_x^\beta = \frac{\partial^{\beta_1 + \ldots + \beta_\ell}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_\ell^{\beta_\ell}}, \quad D_y^\gamma = \frac{\partial^{\gamma_1 + \ldots + \gamma_m}}{\partial y_1^{\gamma_1} \ldots \partial y_m^{\gamma_m}} .$$

Si $a \in A(X)$ et $D_x^\beta a \notin A(X)$, alors nous convenons que

$$|D_x^\beta a, X| = +\infty ;$$

de même, si $b \in B(X,Y)$, $D_x^\beta D_y^\gamma b \notin B(X,Y)$, nous convenons que

---

1) C'est une fonction, définie sur B, à valeurs ≥ 0 et $\leq +\infty$, telle que :

$$\| \lambda b, X \times Y, n \| = |\lambda| . \| b, X \times Y, n \| , \quad \forall \lambda \in \underline{\underline{C}} ;$$

$$\| b_1 + b_2, X \times Y, n \| \leq \| b_1, X \times Y, n \| + \| b_2, X \times Y, n \| .$$

2) Le théorème de composition de S. Sobolev et les compléments que P. Dionne [2] lui a apportés permettent de satisfaire cette condition.

$$\| D_x^\beta D_y^\gamma b,\ X \times Y, n \| = +\infty$$

4. DÉFINITIONS.- Introduisons des variables commutatives :

$$\rho, \eta_1, \ldots, \eta_m \quad ;$$

notons

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \ , \quad \eta^\gamma = \eta_1^{\gamma_1} \ldots \eta_m^{\gamma_m} .$$

Nous nommons <u>normes formelles</u> de a et b les séries formelles

$$(4.1) \qquad |D^\infty a, X, \rho| = \sum_s \frac{\rho^s}{s!} \sup_\beta |D_x^\beta\ a, X|, \quad \text{où} \quad |\beta| = s \ ;$$

$$(4.2) \qquad \|D^\infty b, X \times Y, \rho, \eta, n\| = \sum_{s,\gamma} \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta^\gamma}{\gamma!} \sup_\beta \|D_x^\beta D_y^\gamma b, X \times Y, n\| \ , \quad \text{où} \quad |\beta| = s.$$

Si $v = (v_1, \ldots v_m) \in V(X)$, nous notons $|D^\infty v, X, \rho|$ le vecteur, ayant pour composantes des séries formelles, que voici :

$$|D^\infty v, X, \rho| = (|D^\infty v_1, X, \rho|, \ldots, |D^\infty v_m, X, \rho|).$$

Ces séries formelles et toutes celles que nous allons considérer sont $\gg 0$, c'est-à-dire à coefficients $\geqslant 0$; ces coefficients peuvent valoir $+\infty$.

Donnons-nous une série formelle $\psi(\rho, \eta)$ et un vecteur

$$\Phi(\rho) = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m),$$

dont les composantes $\Phi_1(\rho), \ldots, \Phi_m(\rho)$ sont des séries formelles ; supposons leurs premiers coefficients nuls, c'est-à-dire

$$\Phi(0) = 0 \ .$$

Alors <u>la série formelle composée</u> $\psi \circ \Phi = \psi(\rho, \Phi(\rho))$ a une définition évidente ; évidemment : elle est $\gg 0$ comme Φ et ψ ; ses coefficients sont $<\infty$, si ceux de Φ et ψ sont $<\infty$.

Nous allons compléter le n°4 de [4] par la majoration suivante de la norme formelle d'une fonction composée :

Formule de composition.- Sous l'hypothèse (3.1), on a :

$$(4.3)\quad |D^{\infty}(b \circ v),X,\rho| \ll \| D^{\infty}b,X\times Y,\rho,|D^{\infty}v,X,\rho|-|v,X|,|v,X|\| \quad .$$

si $b\in B(X,Y)$ et $v\in V(X)$.

Notons que $|v,X|=|D^{\infty}v,X,0|$.

Par exemple, on a la formule du produit (voir [4] (4.3)) :

$$|D^{\infty}(v_1\ v_2),X,\rho| \ll |D^{\infty}v_1,X,\rho|\,.\,|D^{\infty}v_2,X,\rho| \quad .$$

si v_1 et $v_2\in A(X)$.

5. PREUVE DE LA FORMULE DE COMPOSITION (4.3).- Introduisons des variables $\xi_1,\dots,\xi_{\ell}$, commutant avec $\eta_1,\dots,\eta_m$.

Définissons les séries formelles

$$(5.1)\qquad |D^{\infty}a,X\ ;\xi| = \sum_{\beta}\frac{\xi^{\beta}}{\beta!}\,|D_x^{\beta}a,X|$$

$$(5.2)\qquad \|D^{\infty}b,X\times Y\ ;\xi,\eta\ ,n\| = \sum_{\beta,\gamma}\frac{\xi^{\beta}}{\beta!}\,\frac{\eta^{\gamma}}{\gamma!}\,\|D_x^{\beta}D_y^{\gamma}b,X\times Y\| \quad .$$

Notons

$$b_{\beta\gamma}(x,y) = D_x^{\beta}D_y^{\gamma}\,b(x,y)$$

et notons comme suit la formule de dérivation de la fonction composée $b\circ v$:

$$D_x^{\alpha}(b\circ v) = \sum_{\beta\gamma}(b_{\beta\gamma}\circ v).(P_{\gamma}^{\alpha-\beta}\circ D^{|\alpha-\beta|}v),\quad (|\beta+\gamma|\leqslant|\alpha|),$$

où $P_{\gamma}^{\alpha-\beta}$ est un polynome à coefficients $\geqslant 0$, qui ne dépend que de

$\alpha - \beta$ et γ ; (il est de degré $|\gamma|$; on le compose avec $D^{|\alpha - \beta|}v$; plus précisément avec les dérivées de v d'ordres $\leqslant |\alpha - \beta|$ et > 0).

D'où, vu que $|v_j, X|$ est une norme d'algèbre :

$$|D_x^\alpha (b \circ v), X| \leqslant \sum_{\beta,\gamma} |b_{\beta\gamma} \circ v, X| .(P_\gamma^{\alpha-\beta} \circ |D^{|\alpha-\beta|}v, X|) =$$

$$[D_\xi^\alpha \| D^\infty (b \circ v), X ; |D^\infty v, X, \xi| - |v, X| \|]_{\xi = 0} ;$$

d'où, vu la condition (3.1) :

$$|D_x^\alpha (b \circ v), X| < [D_\xi^\alpha \| D^\infty b, X \times Y ; \xi , |D^\infty v, X ; \xi| - |v, X| , |v, X| \|]_{\xi = 0}$$

c'est-à-dire

$$(5.3) \quad |D^\infty (b \circ v), X ; \xi| \ll \| D^\infty b, X \times Y ; \xi , |D^\infty v, X, \xi| - |v, X|, |v, X| \| .$$

Notons $\rho = \xi_1 + \ldots + \xi_\ell$; la formule du binome donne, pour $|\sigma| = s$

$$\frac{\rho^s}{s!} = \sum_\sigma \frac{\xi^\sigma}{\sigma!} .$$

D'où, en comparant les définitions (4.1) et (5.1), (4.2) et (5.2) :

$$| D^\infty b, X \times Y ; \xi, |D^\infty v, X, \xi| - |v, X| , |v, X| \| \ll$$

$$\| D^\infty b, X \times Y, \rho, |D^\infty v, X, \rho| - |v, X| , |v, X| \| .$$

L'inégalité (5.3) donne donc :

$$(5.4) \quad \| D^\infty (b \circ v), X ; \xi \| \ll$$

$$\| D^\infty b, X \times Y, \rho , |D^\infty v, X, \rho| - |v, X|, |v, X| \| .$$

Or une inégalité du type

$$\theta(\xi) \ll \Omega(\rho) ,$$

où

$$\theta(\xi) = \sum_\sigma \frac{\xi^\sigma}{\sigma!} \theta_\sigma ,$$

signifie

$$\Theta(\rho) \ll \Omega(\rho), \quad \text{si} \quad \Theta(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \sup_{\sigma} \theta_{\sigma}, \quad \text{où} \quad |\sigma| = s ;$$

car $\Theta(\rho)$ est la plus petite série en $\rho = \xi_1 + \ldots + \xi_\ell$ majorant $\theta(\xi)$. (voir [4], preuve du lemme 5). Donc (5.4) prouve la formule de composition (4.3).

§ 2. Opérateurs sur les séries formelles.

Le § 4 de [4], pour employer les normes formelles, leur applique des opérateurs, opérant sur les séries formelles ; Beurling [1] les a employés depuis longtemps.

6. DÉFINITION D'OPÉRATEURS.- (Voir : [4], n°19). Donnons-nous une suite de nombres > 0

$$\lambda = (\lambda_0 = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, \ldots) .$$

Etant données des séries formelles

$$\Phi(\rho) = \sum_{s \geq 0} \frac{\rho^s}{s!} f_s \quad , \quad \psi(\rho, \eta) = \sum_{s,\gamma} \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta^\gamma}{\gamma!} \psi_{s,\gamma} \quad ,$$

nous définissons comme suit des séries formelles $\lambda\Phi$ et $\lambda\psi$:

$$\lambda\Phi(\rho) = \sum_{s} \lambda_s \frac{\rho^s}{s!} f_s \, , \, \lambda\psi(\rho, \eta) = \sum_{s,\gamma} \lambda_{s+|\gamma|} \frac{\rho^s}{s!} \frac{\eta^\gamma}{\gamma!} \psi_{s,\gamma} \quad .$$

Si $\Phi(\rho) = (\Phi_1(\rho), \ldots, \Phi_m(\rho))$ est un vecteur ayant pour composantes les séries formelles $\Phi_1(\rho), \ldots, \Phi_m(\rho)$, alors on définit

$$\lambda\Phi(\rho) = (\lambda\Phi_1(\rho), \ldots, \lambda\Phi_m(\rho)) .$$

Il est évident que le produit des deux opérateurs $\lambda' = (\dots,\lambda'_s,\dots)$, $\lambda'' = (\dots,\lambda''_s,\dots)$ est $\lambda = (\dots,\lambda'_s\lambda''_s,\dots)$.

Si $\lambda_s = \lambda_1^s$ on a $\lambda\,\psi(\rho,\eta) = \psi(\lambda_1\rho,\lambda_1\eta)$; il nous suffira donc de nous limiter au cas où

$$\lambda_1 = 1 \quad .$$

7. PROPRIÉTÉS DE CES OPÉRATEURS.- Nous aurons besoin des propriétés que voici.

1°) <u>Propriété du produit</u> : Si ψ_1 et $\psi_2 \gg 0$, alors :

$$\lambda[\psi_1(\rho,\eta)\psi_2(\rho,\eta)] \ll [\lambda\,\psi_1(\rho,\eta)].[\lambda\,\psi_2(\rho,\eta)] \tag{7.1}$$

2°) <u>Propriété de la série composée</u> : Si

$$\Theta(\rho) = \psi \circ \Phi \quad ,$$

où

$$\Phi = (\Phi_1,\dots,\Phi_m),\quad \Phi_i \gg 0,\quad \Phi(0) = 0,\quad \psi \gg 0 \ ,$$

alors

$$\lambda\Theta(\rho) \ll (\lambda\,\psi) \circ (\lambda\,\Phi) \ . \tag{7.2}$$

<u>Pour que ces deux propriétés aient lieu, il faut et il suffit que</u> λ <u>vérifie les conditions suivantes</u> :

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda_1 = 1 \geqslant \lambda_2 \ ; \\ \lambda_{r+s-1} \leqslant \lambda_r\,\lambda_s \qquad \text{si} \quad r \ \text{et} \ s \geqslant 1 \ . \end{cases} \tag{7.3}$$

Exemple.- Les conditions (7.3) sont vérifiées quand

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_{s-1} \cdot \lambda_{s+1} \leqslant \lambda_s^2 \ , \tag{7.4}$$

c'est-à-dire quand λ_s^{-1} est une fonction de s logarithmiquement convexe.

Preuve de (7.3).- Pour que (7.1) ait lieu, il faut et suffit qu'il ait lieu quand ψ_1 et ψ_2 sont des monomes :

$$\psi_1 = \rho^s \eta^\gamma \quad , \quad \psi_2 = \rho^{s'} \eta^{\gamma'} \ ;$$

donc que

$$\lambda_{r+s} \leqslant \lambda_r \cdot \lambda_s \ . \tag{7.5}$$

En faisant $r = 1$, on voit que cette condition implique

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_s \geqslant \dots \ . \tag{7.6}$$

Pour que (7.2) ait lieu, il faut et suffit que (7.2) ait lieu quand Φ et ψ sont monomes :

$$\Phi(\rho) = (\rho^{s_1}, \dots, \rho^{s_m}), \quad \psi(\rho, \eta) = \rho^{s_0} \eta^\gamma, \ s_1, \dots, s_m \geqslant 1 \ ;$$

c'est-à-dire que

$$\lambda_{s_0 + \gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_m s_m} \leqslant \lambda_{s_0 + |\gamma|} (\lambda_{s_1})^{\gamma_1} \dots (\lambda_{s_m})^{\gamma_m} \ ,$$

$$\text{si} \quad s_1 \dots s_m \geqslant 1 \ .$$

Cette condition est vérifiée si elle l'est pour $m = 1$, $\gamma_1 = 1$; elle équivaut donc à la condition :

$$\lambda_{r+s-1} \leqslant \lambda_r \cdot \lambda_s \quad \text{pour} \quad r \text{ et } s \geqslant 1 \ . \tag{7.7}$$

Or (7.7) implique (7.5), vu (7.6) ; et (7.6) résulte de (7.7), où l'on prend $r = 2$, si $\lambda_2 \leqslant 1$.

<u>Preuve que l'exemple</u> (7.4) <u>vérifie</u> (7.3).- En faisant $s = 1$ dans (7.4), on obtient $\lambda_2 \leqslant 1$. D'autre part, vu (7.4), $\frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1}}$ est une fonction croissante de s ; donc $\frac{\lambda_s}{\lambda_{s+r}}$ aussi ; donc

$$\frac{1}{\lambda_{r+1}} \leqslant \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+r}} \quad \text{si} \quad s \geqslant 1 \; .$$

8. OPÉRATEURS DE GEVREY $\lambda^{(\alpha)}$.- Ces opérateurs dépendent d'un paramètre numérique $\alpha \geqslant 1$; ils se définissent comme suit :

$$\lambda_s = (s!)^{1-\alpha} \; .$$

Si $\Phi(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s!} \Phi_s$, alors $\lambda^{(\alpha)}\Phi(\rho) = \sum_s \frac{\rho^s}{(s!)^\alpha} \Phi_s$.

<u>La propriété</u> (7.1) <u>du produit et la propriété</u> (7.2) <u>de la série composée valent pour ces opérateurs</u>.

<u>Preuve</u>.- La vérification de (7.4) est immédiate : d'où (7.3) ; d'où (7.1) et (7.2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING, Congrès scandinave, 1938.

[2] P. DIONNE, Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés, Journal d'Analyse math., t.10 (1962), chap. V et VI, p.1-90.

[3] M. GEVREY, Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Annales Ecole norm. sup., t.35 (1917), p.129-189.

[4] J. LERAY et Y. OHYA, Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts (exposé précédent).

[5] J. LERAY et Y. OHYA, Systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts, CIME, Varenna (Italie), 1964.