

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FRÉDÉRIC PHAM

Formules de Picard-Lefschetz

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1969), p. 15-22

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969__3_15_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULES DE PICARD-LEFSCHETZ

par Frédéric PHAU

(exposé fait le 12 mars 1969)

On va rappeler quelques généralités sur les formules de Picard-Lefschetz, dans le but d'illustrer un autre aspect du travail d'Arnold (cf. exposé précédent, cité «TRESSSES»), la «monodromie des queues d'aronde».

Soit $f : X \rightarrow T$ un morphisme propre surjectif de variétés analytiques complexes (lisses). On notera $L \subset T$ l'ensemble des valeurs critiques de f (image de l'ensemble des points où l'application tangente n'est pas surjective). L'espace $X|(T-L) = f^{-1}(T-L)$ est alors un espace fibré localement trivial, à fibres lisses, au-dessus de $T-L$.

Choisissant un point $t \in T-L$, on en déduit un homomorphisme

$$\pi_1(T-L, t) \rightarrow \text{Aut } H_*(X_t)$$

où $X_t = f^{-1}(t)$, et où H_* désigne l'homologie singulière à coefficients dans \mathbb{Z} . Cet homomorphisme est appelé «monodromie de f ». L'image par la monodromie d'un élément $\sigma \in \pi_1(T-L, t)$ sera notée σ_* .

On se limitera d'abord au cas où T est le plan complexe \mathbb{C} (ou, si l'on préfère, un disque du plan complexe), et où f a un seul point critique x_0 , avec $f(x_0) = 0$. Soit $\sigma \in \pi_1(\mathbb{C} - \{0\})$ la classe d'un lacet faisant un tour dans le sens positif autour de 0 et soit $B \subset X$ une boule ouverte suffisamment petite entourant le point critique x_0 ; pour $|t|$ assez petit, on notera $B_t = X_t \cap B$. Dans ces conditions, on montre que l'homomorphisme

$$\sigma_*^{-1} : H_*(X_t) \rightarrow H_*(X_t)$$

(homomorphisme de «variation des cycles»)

se factorise ainsi :

$$\begin{array}{ccc} H_*(X_t) & \xrightarrow{\sigma_*^{-1}} & H_*(X_t) \\ \downarrow \text{tr} & & \uparrow i_* \\ H_*^F(B_t) & \xrightarrow{\text{Var}} & H_*(B_t) \end{array}$$

où i_* est induit par l'inclusion $i : B_t \hookrightarrow X_t$, où H_*^F désigne l'homologie à supports fermés quelconques (et non plus à supports compacts), et où tr est l'homomorphisme défini en associant à toute chaîne de X_t sa «trace» dans la boule ouverte B_t (pour la définition précise, voir [1]); l'homomorphisme Var (de «variation») peut

se décrire ainsi : un cycle Γ à support fermé quelconque dans B_t est transformé, par la déformation induite par σ , en un cycle Γ' , qu'on peut s'arranger pour faire coïncider avec Γ en dehors d'un ouvert relativement compact de B_t ; la différence $\Gamma' - \Gamma$ définit alors un cycle à support compact de B_t .

Grâce à la factorisation précédente, le problème de la monodromie est ramené à un problème local, celui de la détermination de l'homomorphisme Var .

1. Cas du point critique quadratique non dégénéré : formule de Picard-Lefschetz classique (voir [1], [2])

C'est le cas où le Hessien de f au point x_0 ne s'annule pas. On peut alors choisir au voisinage de x_0 des coordonnées locales z_0, z_1, \dots, z_n (si $\dim X = n+1$) telles que

$$f = z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2$$

et telles que la boule B soit donnée par

$$B : |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 2 \quad (\text{disons}).$$

On voit alors facilement que $B_1 = B \cap f^{-1}(1)$ est homéomorphe à un sous-fibré en boules du fibré tangent à la sphère S^n , par un homéomorphisme que l'on peut construire explicitement comme suit :

$$z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto \xi = \frac{\text{Re } z}{\|\text{Re } z\|} \in S^n, \quad \text{Im } z \in T_\xi S^n$$

($z \cdot z = 1 \Rightarrow \text{Re } z \cdot \text{Im } z = 0$, de sorte que $\|\xi\| = 1$ et $\xi \cdot \text{Im } z = 0$).

Par conséquent, B_1 a le type d'homotopie de la sphère réelle S^n , de sorte que $H_i(B_1)$ est nulle en toutes dimensions $i \neq 0 \neq n$, et

$$\boxed{H_n(B_1) = \mathbb{Z}}.$$

Un générateur de $H_n(B_1)$ sera noté e , et appelé classe évanouissante.

Formule de Picard-Lefschetz : si $h \in H_n^{\mathbb{F}}(B_1)$,

$$\left| \begin{array}{l} \text{Var } h = N e, \text{ avec } N = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} \langle e, h \rangle, \\ \text{où } \langle e, h \rangle \text{ désigne l'indice d'intersection des classes d'homologie} \\ (\langle, \rangle : H_n(B_t) \otimes H_n^{\mathbb{F}}(B_t) \rightarrow \mathbb{Z}). \end{array} \right.$$

Cette formule doit être complétée par la suivante

$$\langle e, e \rangle = \begin{cases} 0 & n \text{ impair} \\ 2 \times (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & n \text{ pair} \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

$$\sigma_*^k(h) = \left\{ \begin{array}{l} h + (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} k \langle e, h \rangle e, \quad n \text{ impair} \\ h + (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle e, h \rangle e, \quad k \text{ impair} \\ h \dots\dots\dots k \text{ pair} \end{array} \right\} \quad n \text{ pair}$$

2. Cas général du point singulier isolé.

Les résultats qui suivent sont essentiellement une adaptation du travail de MILNOR [3] : on pourra en trouver des démonstrations dans la thèse de 3e cycle de LÊ DŨNG TRÁNG [4], ainsi que dans des notes de BRIESKORN [5].

Si l'origine est un point critique isolé de la fonction $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, l'algèbre $\mathbb{C}[[z_0, z_1, \dots, z_n]] / (f'_{z_0}, f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n})$ est de dimension finie comme \mathbb{C} -espace vectoriel. Soit μ sa dimension.

THÉORÈME 1. $B_1 = B \cap f^{-1}(1)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères S^n .

COROLLAIRE. $H_i(B_1) = 0$ pour $i \neq 0, n$.

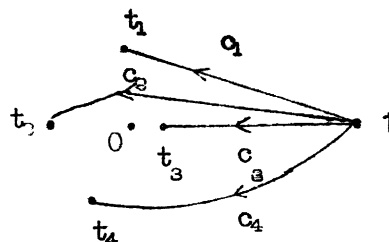
$$H_n(B_1) = \mathbb{Z}^\mu.$$

Soit $f_a : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ une «déformation» de f , par exemple

$$(1) \quad f_a = f + \sum_{i=0}^n a_i z_i$$

THÉORÈME 2. Pour un choix «générique» de la déformation (par exemple pour une déformation du type (1) ci-dessus avec a pris dans un ouvert dense de \mathbb{C}^{n+1}), le point critique isolé se «résoud» en μ points critiques quadratiques non dégénérés.

Pour une déformation f_a assez proche de f , l'espace $B \cap f_a^{-1}(1)$ reste isotope à lui-même : nous continuerons donc à le désigner par B_1 . Soit alors f_a une déformation dont les μ points critiques quadratiques non dégénérés se projettent sur μ valeurs distinctes $t_1, t_2, \dots, t_\mu \in \mathbb{C}$. Choisissons dans le plan complexe \mathbb{C} μ chemins c_1, c_2, \dots, c_μ joignant 1 à t_1, t_2, \dots, t_μ respectivement

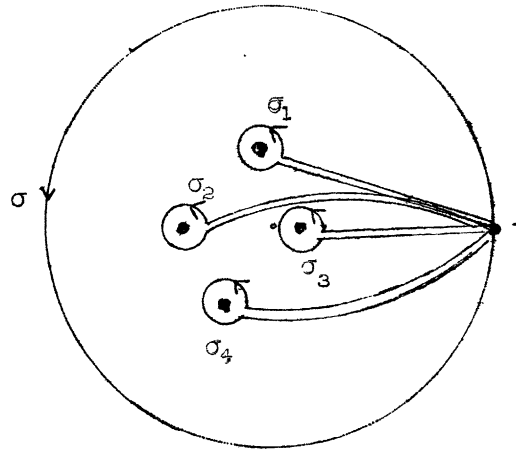


THÉORÈME 3. Le groupe libre $H_n(B_1) = \mathbb{Z}^\mu$ admet une base (e_1, e_2, \dots, e_μ) telle que
 $\mathbb{Z}e_i = \text{Ker}(H_n(B_1) \rightarrow H_n(B_{c_i}))$,

où $B_{c_i} = \{x \in B \mid f_a(x) \in \text{image du chemin } c_i\}$.

La classe e_i est appelée « classe évanouissante associée au chemin c_i ».

Soient alors $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\mu \in \pi_1(\mathbb{C} - \{t_1, t_2, \dots, t_\mu\}, 1)$ les lacets qui se déduisent des chemins c_1, c_2, \dots, c_μ comme indiqué ci-dessous :



En appliquant à chacun de ces lacets la formule de Picard-Lefschetz du § 1, on trouve :

$$(2) \quad \sigma_i * h = h + (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle e_i, h \rangle e_i$$

Ces formules permettent de connaître la monodromie de f_a si l'on connaît la matrice d'intersection $\langle e_i, e_j \rangle$. Connaissant la monodromie de f_a , on en déduit celle de f par la formule $\sigma = \sigma_\mu \sigma_{\mu-1} \dots \sigma_1$ (vraie si les chemins c_i ont été choisis comme sur la figure).

3. Comment déterminer la matrice d'intersection $\langle e_i, e_j \rangle$ du § 2 ?

On ne connaît aucune méthode générale. Une idée, avancée par THOM, consisterait à considérer une famille « universelle » de déformations (« déploiement universel de la singularité » dans la terminologie de Thom), et à exploiter les relations entre $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\mu$ qui découlent de la connaissance du groupe fondamental de l'espace des paramètres de cette famille universelle : l'idée apparaîtra plus clairement sur le cas particulier calculé au § 4 (qui est en réalité le seul cas où je sache faire les calculs).

La notion de « déploiement universel » ne semble pas encore avoir été formulée très clairement dans la littérature*. Dans le cas d'une fonction f à singularité

*) Voir cependant l'ADDENDUM ci-après.

isolée, MATHER m'a dit qu'il pensait pouvoir en donner une bonne formulation, grâce aux méthodes de [6], et il m'a indiqué la recette suivante :

RECETTE DU DÉPLOIEMENT UNIVERSEL*.

- Choisir un système de fonctions holomorphes $u_1, u_2, \dots, u_\mu \in \mathbb{C}\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ dont les classes dans $\mathbb{C}[[z_0, z_1, \dots, z_n]] / (f'_{z_0}, f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n})$ forment une base de ce \mathbb{C} -espace vectoriel. Considérer la fonction $F : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^\mu \rightarrow \mathbb{C}$ qui à (z, a) associe

$$F(z, a) = f(z) + \sum_{i=1}^{\mu} a_i u_i(z).$$

Le morphisme $\varphi : F^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^\mu$
 $(z, a) \mapsto a$

est un déploiement universel de la singularité $f^{-1}(0)$.

Remarque. On peut toujours prendre l'une des fonctions u_i (disons u_μ) égale à 1 ; ainsi l'on voit que $F^{-1}(0)$ est une variété lisse, admettant

$$(z_0, z_1, \dots, z_n, a_1, a_2, \dots, a_{\mu-1})$$

comme système de coordonnées locales.

4. Exemple : le polynome de Brieskorn $f = z_0^{\mu+1} + z_1^2 + \dots + z_n^2$.

L'idéal $(f'_{z_0}, f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n})$ est égal à $(z_0^\mu, z_1, \dots, z_n)$. Le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\mathbb{C}[[z_0, z_1, \dots, z_n]] / (z_0^\mu, z_1, \dots, z_n)$$

admet une base formée par les fonctions

$$z_0^{\mu-1}, z_0^{\mu-2}, \dots, 1.$$

Le déploiement universel est donc défini par la fonction

$$F = z_1^2 + \dots + z_n^2 + P_a(z_0)$$

où

$$P_a(z_0) = z_0^{\mu+1} + a_1 z_0^{\mu-1} + a_2 z_0^{\mu-2} + \dots + a_\mu$$

est le polynome unitaire générique de degré $\mu+1$ (simplifié par la suppression du terme de degré μ). Le morphisme $\varphi : F^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^\mu$ n'est autre que le modèle canonique

*) On me pardonnera peut-être de donner la «recette» du déploiement universel sans en donner la définition !

que de la singularité «de type $(S_1)^\mu$ » de Thom [7]. L'ensemble Δ des valeurs critiques de ce morphisme est la «queue d'aronde multidimensionnelle», lieu des zéros du discriminant du polynôme générique de degré $\mu+1$ (on obtient la queue d'aronde ordinaire lorsque $\mu = 3$).

Si $D_0 \subset \mathbb{C}^\mu$ désigne l'axe $\{a_1 = a_2 = \dots = a_{\mu-1} = 0\}$, la restriction de Φ au-dessus de D_0 s'identifie à la fonction de départ $f : \mathbb{C}^{\mu+1} \rightarrow \mathbb{C}$. Si $D \subset \mathbb{C}^\mu$ désigne une droite proche de D_0 , la restriction de Φ au-dessus de D s'identifie à une déformation de la fonction f , et, pour un choix générique de D , D coupe Δ en μ points distincts, qui sont les μ valeurs critiques de la fonction déformée. En considérant l'homomorphisme naturel $\pi_1(D - \Delta \cap D) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^\mu - \Delta)$, on voit que les matrices de Picard-Lefschetz σ_{i^*} de $\Phi|_D$ (cf. § 2) doivent satisfaire aux relations du groupe $\pi_1(\mathbb{C}^\mu - \Delta)$. Or ces relations sont connues grâce à ARNOLD : ce sont les relations du groupe des tresses à $\mu+1$ brins (cf. exposé TRESSES, relations (3) et (4)). En imposant ces relations aux formules (2) du § 2, on trouve par un calcul facile* que :

i) la relation (3) de TRESSES implique

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \text{pour} \quad |i-j| > 1$$

ii) la relation (4) de TRESSES implique

$$\langle e_i, e_{i+1} \rangle = \pm 1$$

(donc $= +1$ pour un choix convenable des orientations des classes évanouissantes e_1, e_2, \dots, e_μ).

Remarque. L'exemple traité ci-dessus a évidemment été choisi ad hoc pour exploiter l'idée d'Arnold sur la monodromie des queues d'aronde. Dans un cas un peu plus général, tel que le cas du polynôme

$$f = z_0^{\mu_0} + z_1^{\mu_1} + \dots + z_n^{\mu_n},$$

j'ignore si l'idée du § 3 est encore exploitable (dans [9], la matrice d'intersection de ce cas était calculée «à la main»).

*) Ce calcul est fait dans [8] Chap. V, § 3.10 dans le cas particulier $\mu = 2$.

RÉFÉRENCES

- [1] I. FARY. Cohomologie des variétés algébriques, Ann. of Math., séries 2, t. 65 (1957) p. 21-73.
 - [2] S. LEFSCHETZ. L'analysis Situs et la géométrie algébrique, Paris, Gauthier-Villars 1950 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).
 - [3] J. MILNOR. Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. Studies 61, Princeton (1968).
 - [4] LÊ DŨNG TRÁNG. Singularités isolées des hypersurfaces complexes. Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1969.
 - [5] E. BRIESKORN. Papier en circulation.
 - [6] J. MATHER. Stability of differentiable mappings. Ann. of Math. (1968, et à paraître).
 - [7] V. ARNOLD. Singularités des applications différentiables, Ousp. Mat. Naouk, t. XXIII, 1 (1968) pp. 3-44 (en russe).
 - [8] F. PHAM. Introduction à l'Etude topologique des Singularités de LANDAU. (Mémoire des Sciences Mathématiques, n° 164) Gauthier-Villars, 1967.
 - [9] F. PHAM. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. Bull. Soc. Math. France, 93 (1965) pp. 333-367.
-

ADDENDUM

(octobre 1969)

La notion de déploiement universel d'une singularité isolée d'espace analytique est étudiée en détail (avec des équations explicites) par

G.N. TURINA dans Déformations plates localement semi-universelles des singularités isolées d'espaces analytiques, à paraître dans les IZVESTIA, série Mathématique, tome 33 (1969) (en russe).

On voit en lisant cet article que la «recette» donnée ci-dessus au § 3 ne donne pas le déploiement universel minimal : pour trouver celui-ci, il faut considérer, au lieu du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}[[z_0, z_1, \dots, z_n]] / (f'_{z_0}, f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n})$, le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\mathbb{C}[[z_0, z_1, \dots, z_n]] / (f, f'_{z_0}, f'_{z_1}, \dots, f'_{z_n})$$

(ces deux espaces coïncident dans le cas particulier du § 4).