Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Roger Temam

Dualité en calcul des variations et application aux hypersurfaces minimales

Séminaire Jean Leray (1971), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971____A1_0>

DUALITÉ EN CALCUL DES VARIATIONS ET APPLICATION AUX HYPERSURFACES MINIMALES

par Roger TEMAM

Introduction

Nous rappelons tout d'abord des résultats de R.T. Rockafellar [15] sur la dualité en optimisation convexe, résultats qui s'avèrent particulièrement commodes pour certains problèmes de calcul des variations : ils permettent d'associer à certains problèmes de calcul des variations un problème dual et donnent des relations simples entre le problème primal et le problème dual ; dans certains cas on retrouve et précise des concepts de dualité liés à la transformation de Legendre [2]. Ensuite on applique ces résultats au problème des hypersurfaces minimales non paramétriques : le problème dual, convenablement défini, admet une solution unique p^* et si le problème primal admet une solution u alors celle-ci s'exprime très simplement en fonction de p^*. Dans le cas où le problème des hypersurfaces minimales non paramétriques ne possède pas de solutions, on met en évidence un concept de <u>solution généralisée</u> du problème.

1. DUALITÉ EN CALCUL DES VARIATIONS.

Soient V et V^* (resp. Y et Y^*) deux espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés en dualité ; aucune ambiguité n'étant à craindre, on note indifféremment $<.,.>$ le produit scalaire dans la dualité entre V et V^* ou entre Y et Y^*.

On se donne un opérateur Λ linéaire continu de V dans Y, $\Lambda\in\mathcal{L}(V,Y)$, et on appelle Λ^* son adjoint, $\Lambda^*\in\mathcal{L}(Y^*,V^*)$. Soit aussi F (resp. G) une fonction convexe de V (resp. Y) dans $]-\infty,+\infty]$ supposée semi-continue inférieurement et propre(1). On sait que l'on peut associer à F (resp. G) une fonction conjuguée F^* (resp. G^*) :

$$F^* : V^* \longmapsto]-\infty,+\infty] \quad , \tag{1.1}$$

$$F^*(u^*) = \operatorname*{Sup}_{u\in V} \{< u^*,u > - F(u)\} \quad , \quad \forall\, u^*\in V^* \ , \tag{1.2}$$

$$G^* : Y^* \longmapsto]-\infty,+\infty] \quad , \tag{1.3}$$

$$G^*(p^*) = \operatorname*{Sup}_{p\in Y} \{< p^*,p > - G(p)\} \ , \quad \forall\, p^*\in Y^* \ , \tag{1.4}$$

et la fonction F^* (resp. G^*) est également convexe, propre et semi-continue infé-

(1) C'est-à-dire non identique à $+\infty$.

rieurement sur V^* (resp. Y^*). Pour cela et pour tout ce qui concerne les fonctionnelles convexes on se reportera à Moreau [13] et Rockafellar [15].

Avec le cadre qui précède, on s'intéresse au problème d'optimisation suivant .

Problème P.

$$\inf_{v \in V} \{F(v) + G(\Lambda v)\} \ . \tag{1.5}$$

Nous appelons, avec Fenchel [5] et Rockafellar [15], problème dual de P , le problème P^* ci-après

$$\sup_{p^* \in Y^*} \{-F^*(\Lambda^* p^*) - G^*(-p^*)\} \ . \tag{1.6}$$

On note inf P l'infinimum dans (1.5) et on appelle solution de P tout élément de V qui réalise le minimum dans (1.5) ; définition analogue de sup P^* et d'une solution de P^*.

On démontre de manière générale que

$$-\infty \leqq \sup P^* \leqq \inf P \leqq +\infty \ , \tag{1.7}$$

toutes les éventualités qui apparaissent dans (1.7) étant effectivement possibles.

Un cas particulier très important est contenu dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1.1. <u>Les hypothèses sont celles qui précèdent et en outre</u>

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{il existe}}\ u_0 \in V\ \underline{\text{tel que}}\ F(u_0) < +\infty\ ,\ \underline{\text{la fonction}}\ G\ \underline{\text{étant finie}} \\ \underline{\text{et continue en}}\ \Lambda u_0\ . \end{array} \right. \tag{1.8}$$

<u>Le problème</u> P^* <u>possède alors une solution</u> p^* <u>au moins et</u>

$$\inf P = \max P^* \in \mathbb{R} \ . \tag{1.9}$$

<u>Si le problème</u> P <u>possède également une solution</u> u , <u>alors les relations suivantes ont lieu</u>

$$F(u) + F^*(\Lambda^* p^*) = \langle \Lambda^* p^*, u \rangle \tag{1.10}$$

$$G(\Lambda u) + G^*(-p^*) = -\langle p^*, \Lambda u \rangle . \tag{1.11}$$

<u>Remarque</u> 1.1.- Il résulte de (1.2) que

$$F^*(v^*) + F(v) \geqq \langle v^*, v \rangle \ , \qquad \forall\ v^* \in V^*, \ \ \forall\ v \in V$$

(remarque analogue pour G). Pour cette raison les relations (1.10) et (1.11) sont appelées <u>relations d'extrémalité</u>. Elles sont d'ailleurs équivalentes à

(1.12) $$\Lambda^* p^* \in \partial F(u)$$

(1.13) $$-p^* \in \partial G(\Lambda u)$$

(cf. la notion de sous-différentiel dans [13] et [16]).

La proposition précédente est démontrée dans [15] ; cf. aussi [17], [18]. De nombreuses applications de la proposition précédente à des problèmes de calcul des variations sont explicitées dans [18] ; dans les numéros suivants nous développons l'application aux hypersurfaces minimales.

2. APPLICATION AUX HYPERSURFACES MINIMALES.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ (aucune hypothèse de régularité n'est nécessaire). On appelle $W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ l'espace de Sobolev

$$\{u \in L^p(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i} \in L^p(\Omega),\quad 1 \leq i \leq n\}$$

muni de sa structure habituelle d'espace de Banach ; pour $p = 2$, on note $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$. On appelle $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence dans $W^{1,p}(\Omega)$ des fonctions à support compact dans Ω.

Le problème des hypersurfaces minimales non paramétriques (cf. par exemple [7]) s'écrit :

(2.1) $$\operatorname*{Inf}_{v \in \phi + \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)} \int_\Omega \sqrt{1+v_x^2}\, dx$$

où $v_x = \operatorname{grad} v = (v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$ et où ϕ est donnée avec

(2.2) $$\phi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad .$$

Nous allons voir que la proposition 1.2 est applicable à la situation présente.

Il suffit de poser

$V = W^{1,1}(\Omega)$, $\quad V^* = (W^{1,1}(\Omega))'$ = le dual topologique de V muni de la topologie $\sigma(V^*, V)$,

$Y = L^1(\Omega)^n$, $\quad Y^* = L^\infty(\Omega)^n$ (topologie $\sigma(Y^*, Y)$),

$\Lambda = \operatorname{grad}$,

$F(v) = 0$ si $v \in C$, $+\infty$ si $v \notin C$, $C = \phi + \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ ($F = \chi_C$ est la fonction indicatrice du convexe C).

$G(p) = \int_\Omega \sqrt{1+p(x)^2}\, dx \quad , \quad \forall p \in L^1(\Omega)^n \quad .$

Le problème (2.1) est alors identique au problème (1.5). Afin d'expliciter le problème dual (1.6) on détermine les fonctions conjuguées F^* et G^* ; un calcul facile donne

$$(2.3)\quad F^*(\Lambda^* p^*) = \begin{cases} < p^*, \Lambda\Phi > = \int_\Omega p^*(x) \cdot \Phi_x(x) d_x & \text{si} \quad \operatorname{div} p^* = 0 \ , \\ + \infty \quad \text{autrement} \ . \end{cases}$$

$$(2.4)\quad G^*(p^*) = \begin{cases} - \int_\Omega \sqrt{1 - p^*(x)^2}\, dx & \text{si} \quad |p^*(x)| \leqq 1 \text{ p.p.} \ , \\ + \infty \quad \text{autrement} \ . \end{cases}$$

Le problème dual P^* s'écrit donc

$$(2.5)\qquad \sup_{\substack{p^* \in L^\infty(\Omega)^n \\ \operatorname{div} p^* = 0 \ , \\ |p^*(x)| \leqq 1 \text{p.p.}}} \{ - < p^*, \Lambda\Phi > + \int_\Omega \sqrt{1 - p^*(x)^2}\, dx \}$$

La condition (1.8) est trivialement satisfaite ($u_0 = 0$ par exemple) et la proposition 1.1 est donc applicable. On notera ici que l'existence de solution pour (2.5) est facile à obtenir directement ; il y a aussi unicité de solution pour (2.5), la fonction

$$p^* \longmapsto \int_\Omega \sqrt{1 - p^*(x)^2}\, dx \ ,$$

étant strictement concave sur la boule unité de $L^\infty(\Omega)^n$.

Par ailleurs une analyse précise du calcul de G^* montre que la condition

$$G^*(p^*) = < p^*, p > - G(p) \quad , \quad p \in Y, \ p^* \in Y^* \quad , \text{ implique que}$$

$$(2.6)\quad \begin{cases} |p^*(x)| < 1 \quad \text{p.p.} \quad \text{et} \\ p(x) = - \dfrac{p^*(x)}{\sqrt{1 - p^*(x)^2}} \qquad \text{p.p.} \quad x \in \Omega \ . \end{cases}$$

Avec cette remarque, la proposition 1.1 entraîne

PROPOSITION 2.1. <u>Le problème</u> (2.5), <u>dual du problème</u> (2.1) (<u>hypersurfaces minimales</u>), <u>possède une solution unique</u> p^* <u>et</u>

$$(2.7)\qquad \inf P = \max P^* \ .$$

<u>Si le problème</u> (2.1) (<u>hypersurfaces minimales</u>) <u>possède une solution</u> u <u>alors on a nécessairement</u>

$$(2.8)\qquad |p^*(x)| < 1 \quad \text{p.p.}$$

et

$$(2.9)\qquad \operatorname{grad} u(x) = - \frac{p^*(x)}{\sqrt{1 - p^*(x)^2}} \quad \text{p.p.} \ x \in \Omega \ .$$

Il est bien connu (indépendamment de tout problème de régularité) que le problème (2.1) peut ne pas avoir de solution. Cela n'affecte en rien l'existence et l'unicité de solution pour (2.5). Les questions que l'on est alors amené à se poser sont les suivantes :

a-t-on $|p^*(x)| < 1$ p.p. ,

si oui, la fonction $x \in \Omega \longmapsto -\dfrac{p^*(x)}{\sqrt{1-p^*(x)^2}}$ représente-t-elle le gradient d'une fonction u et que représente alors u pour le problème (2.1) ?

Ce sont ces questions qui trouvent leur réponse au n° 4. Le n° 3 est destiné à la construction d'une suite minimisante particulière du problème (2.1).

3. RÉGULARISATION ELLIPTIQUE DU PROBLÈME.

Utilisant l'idée de régularisation elliptique [8], [12], on est conduit à associer au problème (2.1) le problème ci-après ($\varepsilon > 0$ fixé) :

$$\text{(3.1)} \qquad \operatorname*{Inf}_{v \in \Phi + \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2} v_x^2 + \sqrt{1+v_x^2}\right) dx \right\} .$$

Par les méthodes directes du calcul des variations, on obtient aisément l'existence et l'unicité d'une solution u_ε de (3.1) ; par ailleurs u_ε est solution de l'équation d'Euler de (3.1)

$$\text{(3.2)} \qquad \varepsilon \Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_{\varepsilon x_i}}{\sqrt{1+u_{\varepsilon x}^2}} \right)_{x_i} = 0 .$$

Des résultats classiques [6], [9], montrent aussi que u_ε <u>est analytique dans</u> Ω .

Passant aux estimations <u>a priori</u> ($\varepsilon \to 0$) on a les résultats suivants :

LEMME 3.1. <u>Lorsque</u> $\varepsilon \to 0$, u_ε <u>demeure dans un ensemble borné de</u>

$$W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) .$$

<u>Démonstration</u>. Appliquant le principe du maximum à (3.2) on trouve que

$$\text{(3.3)} \qquad |u_\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} \leq |\Phi|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \forall\, \varepsilon > 0 .$$

Par ailleurs, par définition de u_ε ,

$$\int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2} u_{\varepsilon x}^2 + \sqrt{1+u_{\varepsilon x}^2}\right) dx \leq \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2} \Phi_x^2 + \sqrt{1+\Phi_x^2}\right) dx$$

et le résultat suit.

LEMME 3.2. <u>Pour tout</u> $\Omega' \Subset \Omega$ (1), <u>lorsque</u> $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon|_{\Omega'}$ <u>demeure dans un ensemble borné de</u> $W^{1,\infty}(\Omega') \cap H^2(\Omega')$.

Il n'est pas possible d'expliciter ici la démonstration très longue de ce lemme. Elle est explicitée dans [18] et s'inspire de méthodes introduites récemment par Bombieri-De Giorgi-Miranda [1] et Ladyzhenskaya-Uralceva [10].

(1) $\Subset$ signifie inclus et relativement compact.

On sait [11] que l'injection de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^{\alpha}(\Omega)$ est compacte $\forall\ \alpha < \frac{n}{n-1}$ et que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Utilisant cette remarque, les lemmes 3.1 et 3.2, et le procédé diagonal, on voit que l'on peut extraire de u_ε une suite (encore notée u_ε) qui donne lieu aux convergences ci-après

(3.4) $u_\varepsilon \to u$ dans $L^{\alpha}(\Omega)$ fort $(\forall\ \alpha < \frac{n}{n-1})$ et $L^{\infty}(\Omega)$ faible-étoile,

(3.5) $u_\varepsilon|_{\Omega'} \to u|_{\Omega'}$, dans $W^{1,\infty}(\Omega')$ faible-étoile et $H^2(\Omega')$ faible, $\forall\ \Omega' \Subset \Omega$,

(3.6) $u_{\varepsilon x}(x) \to u_x(x)$ p.p. $x \in \Omega$.

Bien sûr, $u \in L^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega)$; mais, par ailleurs, grâce à (3.6), au lemme 3.1 ($u_\varepsilon \in$ borné $W^{1,1}(\Omega)$) et au lemme de Fatou, on voit que $u \in W^{1,1}(\Omega)$:

$$u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)\ . \tag{3.7}$$

Le passage à la limite dans (3.2) est légitime : on trouve que u satisfait l'équation des hypersurfaces minimales

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)_{x_i} = 0\ , \tag{3.8}$$

D'après [1], [3], et ce qui précède $(u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)\ )$ on voit que

$$u \text{ est analytique dans } \Omega\ . \tag{3.9}$$

Bien sûr, on ne sait pas si $u = \phi$ sur $\partial\Omega$ mais cela peut être faux.

Utilisant seulement les techniques « équations aux dérivées partielles » , il semble difficile de donner plus d'informations concernant la fonction u . Ce sont les techniques de dualité et d'analyse convexe qui vont nous permettre de caractériser u et nous fournir des informations nouvelles.

4. LES RÉSULTATS ESSENTIELS.

Les remarques suivantes sont très utiles (cf. les démonstrations en [19]) :

u_ε est une suite minimisante de (2.1), c'est-à-dire que

$$\begin{cases} F(u_\varepsilon) + G(\Lambda u_\varepsilon) = \inf P + \rho_\varepsilon\ , \\ \rho_\varepsilon \geqq 0\ ,\quad \rho_\varepsilon \to 0\ ,\quad \varepsilon \to 0\ . \end{cases} \tag{4.1}$$

Si v_m est une suite minimisante de (2.1), $F(v_m) + G(\Lambda v_m) = \inf P + \sigma_m$, alors $-p^*$ (p^* solution de (2.5)) est dans le sous-différentiel à σ_m près de G au point Λv_m (cf. les définitions et propriétés dans [13], [16]) :

(4.2) $$-p^* \in \partial_{\varepsilon_m} G(\Lambda v_m) .$$

Utilisant tout ce qui précède et le théorème sur les sous-différentiels à ε près, on aboutit en [19] au résultat ci-après.

THEOREME 4.1. *Pour* Φ *donné vérifiant* (2.2) *le problème* (2.5) *possède une solution unique* p^* *et*

(4.3) $$\inf \mathcal{P} = \max \mathcal{P}^* .$$

Il existe par ailleurs une fonction u *unique, à une constante additive près, et telle que*

(4.4) $$u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

(4.5) $$u \text{ est analytique dans } \Omega ,$$

(4.6) $$\operatorname{grad} u(x) = - \frac{p^*(x)}{\sqrt{1-p^*(x)^2}} \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega ,$$

(4.7) u *est solution de l'équation des hypersurfaces minimales,*

(4.8) $$\left\{ \begin{array}{l} \text{toute suite minimisante de (2.1)} \\ \text{converge vers } u \text{ au sens suivant :} \\ v_m \to u \quad \text{dans} \quad L^\alpha(\Omega)/\mathbb{R} , \quad \forall \alpha \in [1, \frac{n}{n-1}[, \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega') , \quad \forall \Omega' \Subset \Omega . \end{array} \right.$$

On a aussi le résultat *a posteriori* suivant (supposant à présent l'ouvert Ω de classe C^2) :

THÉORÈME 4.2. *Les hypothèses sont celles du théorème* 4.1 *et on suppose en outre que l'une des fonctions* u *définie par le théorème* 4.1 *vérifie*

(4.9) $$\left\{ \begin{array}{l} \exists\, x_0 \in \partial\Omega , \\ \displaystyle\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} |\operatorname{grad} u(x)| < +\infty . \end{array} \right.$$

Il existe alors parmi les fonctions $u+c$, $c \in \mathbb{R}$, *une fonction unique* (*notée* u) *qui satisfait toutes les conclusions du théorème* 4.1 *et, en outre,*

(4.10) $$\left\{ \begin{array}{l} u = \Phi \text{ p.p. sur une partie de } \partial\Omega \text{ de mesure non nulle et plus} \\ \text{précisément sur } \{x \in \partial\Omega , \displaystyle\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} |\operatorname{grad} u(y)| < +\infty\} , \end{array} \right.$$

$$
(4.11)\quad \begin{cases} \underline{\text{toute suite minimisante}}\ \{v_m\}\ \underline{\text{de}}\ (2.1)\ \underline{\text{converge vers}}\ u\ \underline{\text{au sens}} \\ \underline{\text{suivant}}\ \ v_m \to u\ \ \underline{\text{dans}}\ \ L^1(\Omega)\ , \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial v_m}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\ \ \underline{\text{dans}}\ \ L^1(\Omega')\ ,\ \ \forall\,\Omega' \Subset \Omega\ ,\ \ 1 \leq i \leq n\ . \end{cases}
$$

Remarques 4.1.

(i) Il serait intéressant d'obtenir des conditions *a priori* sur Φ et sur $\partial\Omega$ qui assurent (4.9).

(ii) Des exemples élémentaires montrent que l'on ne saurait espérer dans (4.8) ou (4.12) des convergences fortes des $\frac{\partial v_m}{\partial x_i}$ dans tout Ω .

(iii) Signalons que dans une série de conférences [4], E. de Giorgi a proposé une méthode complètement différente pour obtenir un concept analogue de solution généralisée pour l'équation d'Euler des hypersurfaces minimales.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI, M. MIRANDA. Una maggiorazione a priori relative alle ipersuperfici minimali non parametriche. Arch. Rat. Mech. Anal., 32, 1969, p. 255-267.

[2] COURANT, HILBERT. Methods of Mathematical physics, Interscience publisher.

[3] E. DE GIORGI. Sulla differenziabilita e l'analiticitá delle estremali degli integrali multipli regolari. Memorie delle Acc. Sci. Torino, S. 3, t. 3, 1957, p. 25-43.

[4] E. DE GIORGI. Nouveaux résultats dans la théorie des hypersurfaces minima. Conf. faites au College de France, Juin 1970.

[5] W. FENCHEL. Convex cones, sets and functions. Lecture Notes, Princeton, 1953.

[6] E. HOPF. Über den funktionalen, insbesondere den analytischen charakter, der Lösungen elliptischer differentialgleichungen zweiter ordnung. Math. Z., 34, 1931, p. 194-233.

[7] JENKIN, J. SERRIN. Variational problems of minimal surface type, I, II, III. Arch. Rat. Mech. Anal. 12, 1963, p. 185-212 ; 21, 1966, p. 321-342 ; 29, 1968, p. 304-322.

[8] J.J. KOHN, L. NIRENBERG. Degenerate elliptic parabolic equations of second order. Comm. pure Appl. Math. XX, 1967, p. 797-872.

[9] O.A. LADYZENSKAYA, N.N. URALCEVA. Equations aux dérivées partielles de type elliptique. Dunod, Paris, 1968.

[10] O.A. LADYZENSKAYA, N.N. URALCEVA. Local estimates for gradients of solutions of non-uniformily elliptic and parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math., XVIII, 1970, p. 677-703.

[11] J.L. LIONS. Problèmes aux limites. Presses de l'Univ. de Montréal, 1962.

[12] J.L. LIONS. Quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires. Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969

[13] J.J. MOREAU. Fonctionnelles convexes. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966.

[14] C.B. MORREY. Multiple integrals in the calculus of variations. Springer-Verlag, Berlin-New-York, 1966.

[15] R.T. ROCKAFELLAR. Duality and stability in extremum problems involving convex functions. Pac. J. of Math., 21, 1967, p. 167-187.

[16] R.T. ROCKAFELLAR. Convex analysis. Princeton University Press, 1970.

[17] R. TEMAM. Remarques sur la dualité en calcul des variations. C.R. Acad. Sci., Paris, 270, 1970, p. 754-757.

[18] R. TEMAM. Calcul des variations. Cours de 3ème cycle, Fac. Sc. d'Orsay, 1970, à paraître.

[19] R. TEMAM. Solution généralisée de certaines équations du type hypersurfaces minimales, à paraître.