Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Jean Vaillant

Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques

Séminaire Jean Leray (1971), exp. n° 6, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1971____A6_0>

REMARQUES SUR LES SYSTÈMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES

par Jean VAILLANT

Introduction

Il est bien connu, pour les opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants réels sur les fonctions scalaires que l'on peut caractériser, dans les cas classiques (hypoellipticité, hyperbolicité [6]) les espaces de solutions correspondant à l'aide des propriétés du polynôme de dérivation ; on remarque alors que, si les caractéristiques sont simples, la partie principale suffit pour cette étude, et que, sinon, il faut tenir compte des autres termes. Nous nous intéresserons dans la suite uniquement aux cas hyperboliques. Pour un système à coefficients constants, la considération du déterminant des polynômes de dérivation permet de caractériser l'hyperbolicité (au sens de [6]) ; cependant, si on veut la conserver quels que soient les termes non principaux, (hyperbolicité forte), on s'aperçoit qu'il n'est pas nécessaire d'éliminer les cas de caractéristiques multiples ; on obtient une condition nécessaire et suffisante portant sur des polynômes déduits des termes principaux de chaque opérateur, une telle condition (I) a été donnée par Kasahara, Yamaguti [7] ; nous la remplaçons par une condition équivalente (I') qui évite de transformer le système en un système du 1er ordre pour la variable "temporelle". Nous donnons ensuite une condition suffisante simple (C) d'hyperbolicité forte ; (C) exprime qu'en se plaçant dans les différents anneaux localisés [12] par rapport aux facteurs irréductibles du déterminant caractéristique, les idéaux facteurs invariants de la matrice caractéristique sont ou bien l'idéal maximal de l'anneau localisé envisagé ou bien l'anneau lui-même et que le produit des facteurs irréductibles est strictement hyperbolique. La propriété des facteurs invariants est une condition nécessaire d'hyperbolicité forte, mais l'hyperbolicité forte peut exister alors que le produit des facteurs irréductibles est hyperbolique au sens large ; (C) devient nécessaire et suffisante si on suppose la multiplicité des racines de l'équation caractéristique constante ; un exemple du type de Pétrowsky [7] contraire à l'hyperbolicité forte ne peut se produire quand (C) est réalisée ; on voit qu'un tel exemple est dû aux singularités du produit des facteurs irréductibles et non à la multiplicité de ceux-ci dans la décomposition du déterminant caractéristique. En coefficients variables, la condition (C) exprime que le système est hyperbolique strict au sens de Leray [10] : il a des solutions dans des espaces de fonctions à un nombre fini de dérivées ; nous avons suivi la démonstration de Mme Choquet-Bruhat [2] ; pour un système d'ordre 1, (C) équivaut à une condition de Friedrichs [17], (cf. aussi Kreiss [19]), suffisante pour la construction d'un opérateur pseudodifférentiel "surface symmetriser".

Enfin nous montrons que, si un système à coefficients variables satisfait à (C), on peut résoudre le problème de Cauchy formel à données oscillatoires et obtenir ainsi des ondes approchées oscillatoires, ceci quels que soient les termes non principaux. Les conditions données par Ludwig [11] pour cette résolution n'étaient pas indépendantes entre elles, elles se trouvent ainsi très simplifiées et reliées aux définitions usuelles précédentes de l'hyperbolicité forte. Les résultats obtenus se généraliseraient à des ondes asymptotiques [8], [11], [5], [3].

Notre matrice caractéristique est celle de Cauchy-Kowalewski ; elle est formée de polynômes homogènes de mêmes degrés. L'extension nécessaire aux ordres utilisés par Volevic, Agmon, Douglis, Nirenberg et Leray sera faite dans une autre publication.

1a) Soit une variété différentiable $\mathscr{C}^\infty$ de dimension $(n+1)$ et le fibré vectoriel complexe trivial de fibre $\mathbb{C}^m$ sur cette variété. On considère un opérateur différentiel linéaire h réel et $\mathscr{C}^{\infty(*)}$ de ce fibré dans lui-même d'ordre $\leq t$ $(t \geq 1)$. Par rapport à la base canonique de la fibre, on étudie le système carré d'équations aux dérivées partielles linéaires correspondant :

$$h^A_B(x,D)y^B(x) = f^A(x) \ ; \quad x \text{ point de la variété,} \tag{1}$$

(A,B varient de 1 à m ; on utilisera constamment la convention de sommation).

Le symbole de l'opérateur est donné par la matrice caractéristique $(H^A_B(x,\ell))$; pour chaque x, chaque $H^A_B(x,\ell)$ est une application polynomiale sur $\mathbb{R}$ homogène et de degré t (ou nul) ; ℓ appartient à l'espace cotangent T^*_x en x. Le déterminant de (H^A_B) est noté H et on suppose que H <u>n'est jamais le polynôme nul</u> dans l'ouvert Ω où l'on se placera.

En chaque point x, H se décompose en facteurs irréductibles :

$$H = (H_1)^{\nu_1} \dots (H_s)^{\nu_s} \dots (H_\sigma)^{\nu_\sigma} \ ;$$

on suppose que chaque H_s est fonction $\mathscr{C}^\infty$ de x et que <u>chaque multiplicité ν_s est constante sur Ω</u> .

En chaque point x, on considère l'anneau localisé Φ_s de l'anneau des polynômes à $(n+1)$ variables $(\ell_0,\ell_1,\dots,\ell_n)$ par rapport à l'idéal premier défini par H_s ; ses éléments sont les fractions du corps des fractions rationnelles correspondant qui sont telles que leur dénominateur n'appartient pas à l'idéal défini par H_s. Φ_s est un anneau principal [12]. En chaque point x et pour chaque s, on a dans Φ_s :

(*) Ces hypothèses peuvent parfois être remplacées par de plus larges dans la suite (par exemple $\mathscr{C}^k$ au lieu de $\mathscr{C}^\infty$).

$$(H_B^A) \sim \begin{pmatrix} (H_s)^{q_1(s)} & & & 0 \\ & (H_s)^{q_2(s)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (H_s)^{q_m(s)} \end{pmatrix} :$$

les éléments de la diagonale définissent les facteurs invariants de la matrice (H_B^A); on a :

$$q_1(s) \geqq \dots \geqq q_m(s) \geqq 0$$

et par conséquent :

$$\nu_s = q_1(s) + q_2(s) + \dots + q_m(s) .$$

<u>On suppose</u> $q_1(s), q_2(s), \dots, q_m(s)$, <u>pour chaque</u> s , <u>constants sur</u> Ω .

On s'assure facilement du caractère intrinsèque des notions précédentes. Nous ne considèrerons dans la suite que des systèmes satisfaisant aux conditions générales ci-dessus.

b) Dire que la produit $H_1 H_2 \dots H_s \dots H_\sigma$ est hyperbolique en un point x équivaut à dire qu'il existe au moins une forme $q \in T_x^*$ telle que

i) $(H_1 \dots H_s \dots H_\sigma)(q) \neq 0$,

ii) si on fait un changement de base dans T_x^* de sorte que q ait pour composantes $(1,0,\dots,0)$, l'équation $(H_1 \dots H_s \dots H_\sigma)(\ell_o, p_i) = 0$ admette τ racines réelles distinctes ou non, en ℓ_o , pour tout (p_i) , (τ est le degré de $H_1 \dots H_\sigma$; p est une forme de composantes $p_o, p_1, \dots, p_i, \dots, p_n$, l'indice latin i varie de 1 à n , on désigne par (p_i) l'élément $(0, p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$).

On notera $\overset{o}{\Gamma}_x$ le cône de T_x^* dont les éléments sont les covecteurs q possédant les propriétés précédentes.

Pour tout (p_i), on peut ordonner les racines de

$$(H_1 \dots H_\sigma)(\ell_o, p_i) = 0 \tag{2}$$

par ordre de grandeur croissante et ainsi obtenir des fonctions $p_{01}, \dots, p_{0r}, \dots, p_{0\tau}$ de (p_i) telles que

$$(H_1 \dots H_\sigma)[p_{0r}(p_i), p_i] = 0 , \quad \text{pour tout } (p_i) ,$$

et

$$p_{01} \leqq p_{02} \leqq \dots \leqq p_{0r} \leqq \dots \leqq p_{0\tau} .$$

Ces fonctions sont continues en tout point (p_i). En un point (p_i) tel que le discriminant de l'équation (2) ne soit pas nul, c'est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites et en un point tel que (p_i) annule le discriminant, on utilise le théorème de Rouche :

c) Dire que $H_1 \ldots H_\sigma$ est strictement hyperbolique équivaut à dire que $H_1 \ldots H_\sigma$ est hyperbolique et que, de plus, les τ racines de l'équation (2) sont distinctes si $(p_i) \neq 0$.

Les fonctions p_{0r} sont alors telles que, en se restreignant à $(p_i) \neq 0$

$$p_{01} < p_{02} < \ldots < p_{0r} < \ldots < p_{0\tau} .$$

Pour tout s, H_s est strictement hyperbolique en x, notons $\{H_s\}$ le cône défini par

$$H_s(p) = 0 .$$

Ce cône n'a pas de génératrice singulière : si $p \neq 0$ et $H_s(p) = 0$ il existe au moins un α tel que

$$\frac{\partial H_s}{\partial \ell_s}(x,p) \neq 0 ,$$

(H_s polynôme en $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n$, un indice grec α varié de 0 à n). Autrement dit, le vecteur bicaractéristique correspondant à p est non nul.

Si $s \neq s'$,

$$\{H_s\} \cap \{H_{s'}\} = \{0\} .$$

Enfin si $H_1 \ldots H_\sigma$ est strictement hyperbolique en x, il l'est aussi en chaque point d'un voisinage assez petit de x.

2. Nous considèrerons particulièrement les opérateurs satisfaisant en tout point x aux conditions suivantes que nous désignerons brièvement dans la suite par (C).

$$(C)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. pour tout } s ,\ 1 \leqq s \leqq \sigma \\[1ex] (H^A_B) \sim \left. \begin{pmatrix} H_s & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & H_s & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \right\} m \quad \left(\nu_s \text{ termes } H_s\right) \\[1ex] \text{dans l'anneau principal } \Phi_s \\[1ex] \text{II. } H_1 \ldots H_s \ldots H_\sigma \text{ est strictement hyperbolique.} \end{array} \right.$$

Nous indiquerons maintenant des propriétés des systèmes vérifiant les conditions (C) en un point x.

PROPOSITION I. <u>Les mineurs d'ordre</u> $(m-1)$ de (H^A_B) <u>sont divisibles par</u>

$$H_1^{\nu_1-1}\dots(H_s)^{\nu_s-1}\dots(H_\sigma)^{\nu_\sigma-1} .$$

<u>Cela résulte de la condition</u> (C,I) <u>et de</u> [1], cf. aussi [12].

<u>Remarques</u>

1) On déduit de la proposition I que $\tau \geqq t$.

2) Pour chaque s , il existe au moins un mineur d'ordre $(m-\nu_s)$ non divisible par H_s .

Les propriétés suivantes sont préliminaires à la proposition II.

LEMME 1. En un point x , le quotient de Φ_s par l'idéal engendré par H_s est un corps que nous noterons Ψ_s . Comme dans [12], (H^A_B) définit canoniquement un endomorphisme de $(\Psi_s)^m$, dont le noyau est de dimension ν_s : on désignera par

$$(\tilde{d}^B_1,\dots,\tilde{d}^B_{\bar{D}},\dots,\tilde{d}^B_{\nu_s})$$

une base de ce noyau; on a aussi dans $(\Phi)^m_s$ des vecteurs $(d^B_{\bar{D}})$ tels que :

$$H^A_B\, d^B_{\bar{D}} = \sigma^A_{\bar{D}}\, H_s \,, \quad \text{où pour } \bar{D} \text{ donné }, \quad (\sigma^A_{\bar{D}}) \in (\Phi)^m_s . \tag{3}$$

On choisira même, comme dans [12] ces vecteurs de sorte que leurs composantes soient des polynômes homogènes en (ℓ_α) obtenus à l'aide des mineurs de (H^A_B) et soient des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ en x .

LEMME 2. Pour toute forme $p \neq 0$, telle que $H_s(p) = 0$, il existe au moins un mineur d'ordre $m-\nu_s$ soit A_s tel que $A_s(p) \neq 0$. Le noyau de $(H^A_B)(p)$ est de dimension ν_s et admet pour base les vecteurs $(d^B_{\bar{D}}(p))$ définis à partir de A_s .

En effet, si $p = (p_o,p_i)$, p_o est racine simple de $H_s(\ell_o,p_i) = 0$ et, pour tout $s' \neq s$, p_o n'est pas racine de $H_{s'}(\ell_o,p_i) = 0$; p_o est donc racine multiple de multiplicité ν_s de

$$H(\ell_o,p_i) = \det[H^A_B(\ell_o,p_i)] = 0 .$$

On a donc :

$$H = (\ell_o - p_o)^{\nu_s}.(\dots) ,$$

la deuxième parenthèse n'est pas divisible par $\ell_o - p_o$.

Dans le localisé de $\mathbb{R}[\ell_o]$ par rapport à l'idéal défini par $\ell_o - p_o$:

$$(H_B^A)(\ell_o, p_i) \sim \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & (\ell_o - p_o)^{\chi} & 0 & \\ & & 1 \cdots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \nu \leq \nu_s$$

et par suite dans $\mathbb{R}$:

$$(H_B^A)(p) \sim \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & 0 \cdots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \nu \leq \nu_s \, .$$

Il existe donc au moins un mineur d'ordre $m - \nu_s$, soit A_s tel que $A_s(p) \neq 0$.
Compte tenu de (C,I), on a en fait dans $\mathbb{R}$

$$(H_B^A)(p) \sim \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & 0 \cdots & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \nu_s$$

La famille de vecteurs de $\mathbb{R}^m, (d^B_{\bar{D}}(p))$ satisfait à

$$H_B^A(p)\; d^B_{\bar{D}}(p) = 0 \,, \tag{4}$$

ces vecteurs appartiennent donc au noyau de $H_B^A(p)$; du fait que $A_s(p) \neq 0$, on déduit [12] qu'ils en forment une base.

LEMME 3. Soit q une forme appartenant à $\overset{\circ}{\Gamma}_x$ et une base de T_x^* telle que $q = (1,0,\ldots,0)$.

On note τ_s le degré de H_s de sorte que $\tau = \tau_1 + \ldots + \tau_s + \ldots + \tau_\sigma$. En permutant les racines p_{0r} , désignons par :

$p_o^1 , \ldots , p_o^{\tau_1}$ les racines provenant de H_1

....

$p_o^{\tau_1 + \ldots + \tau_{s-1}+1} , \ldots , p_o^{\tau_1 + \ldots + \tau_s}$ les racines provenant de H_s

....

$p_o^{\tau - \tau_\sigma + 1} , \ldots , p_o^{\tau}$ les racines provenant de H_σ

p_o^ρ , $1 \leq \rho \leq \tau$ désignera une racine quelconque.

Soit $(d^B_{\rho\bar{D}(\rho)})(p_o^\rho, p_i)$ la base du noyau de $(\hat{E}^A_B)(p_o^\rho, p_i)$ construite dans le lemme 2 $\bar{D}(\rho)$ numérote les vecteurs de cette base et prend par exemple ν_s valeurs si

$$\tau_1+\ldots+\tau_{s-1}+1 \leqq \rho \leqq \tau_1+\ldots+\tau_s \ ,$$

Le lemme 3 énonce que le déterminant de la matrice à $\sum_{s=1}^{s=\sigma} \tau_s \nu_s = mt$ colonnes et mt lignes

$$\Delta(p_i) = \left[\begin{array}{ccc}
d^1_{11} & & \\
\vdots & & \\
d^B_{11} & d^B_{1\bar{D}(1)} & d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \\
d^m_{11} & \vdots & \vdots \\
p_o^1 d^1_{11} & & \\
\vdots & & \\
p_o^1 d^B_{11} & p_o^1 d^B_{1\bar{D}(1)} & p_o^\rho d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
p_o^1 d^m_{11} & & \\
\vdots & & \\
(p_o^1)^{t'} d^1_{11} & & \\
\vdots & & \\
(p_o^1)^{t'} D^B_{11} & (p_o^1)^{t'} d^B_{1\bar{D}(1)} & (p_o^\rho)^{t'} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(p_o^1)^{t'} d^m_{11} & & \\
\vdots & & \\
(p_o^1)^{t-1} d^1_{11} & & \\
\vdots & & \\
(p_o^1)^{t-1} d^B_{11} & (p_o^1)^{t-1} d^B_{1\bar{D}(1)} & (p_o^\rho)^{t-1} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(p_o^1)^{t-1} d^m_{11} & &
\end{array}\right]$$

est différent de 0 , pour tout $(p_i) \neq 0$.

Cette proposition ne dépend pas de la permutation choisie pour les racines p_o^ρ .

Le cas $m = 1$ est bien connu.

Nous commencerons par expliciter la formule (4) ; en ordonnant $H_B^A(\ell_o,p_i)$ en ℓ_o, on obtient :

$$H_B^A(\ell_o,p_i) = H_B^A(q)(\ell_o)^t + \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA}(p_i)(\ell_o)^q + L_B^{OA}(p_i) , \tag{5}$$

où, pour $0 \leqq q \leqq t-1$, L_B^{qA} est un polynôme en (p_i).

On sait que $H(q) = (\det H_B^A)(q) \neq 0$. Il sera commode de supposer l'opérateur "normalisé" relativement à q , c'est-à-dire que

$$H_B^A(q) = \delta_B^A \text{ , symbole de Kronecker .}$$

On obtient alors :

$$[\delta_B^A(p_o^\rho)^t + \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA}(p_o^\rho)^q + L_B^{OA}]d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 . \tag{6}$$

Pour démontrer que le déterminant de la matrice $\Delta(p_i)$ est différent de 0 , nous démontrerons que le système linéaire homogène associé n'a que la solution zéro. Ce système s'écrit, les inconnues étant les mt nombres $\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}$ et en regroupant convenablement :

$$\left\{\begin{array}{ll}
(7_o) & \displaystyle\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(7_q) & \displaystyle\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^\rho)^q = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(7_{t-1}) & \displaystyle\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^\rho)^{t-1} = 0
\end{array}\right.$$

Appliquons la matrice L_B^{OA} au vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par le premier membre de (7_o), on obtient, compte tenu de (6) :

$$\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} \delta_B^A(p_o^\rho)^t d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} + \sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA}(p_o^\rho)^q d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 .$$

Le deuxième terme est nul, compte tenu des formules (7) $1 \leqq q \leqq t-1$ car il s'écrit aussi :

$$\sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA}\Big(\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^\rho)^q\Big) .$$

On obtient donc

$$(7_t) \qquad \sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^\rho)^t = 0 \,.$$

Ensuite on procède par récurrence ; supposons vraie :

$$(7_{q'}) \qquad \sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^\rho)^{q'} = 0 \quad \text{pour} \quad t \leqq q' \leqq t'+t-1$$
$$(t' \text{ entier quelconque } \geqq 1)$$

et appliquons $L_B^{0\Lambda}$ à $(7_{t'})$, on obtient : $(7_{t'+t})$. Compte tenu du début, on en déduit que $(7_{q'})$ est vrai pour tout $q' \geqq 0$. Réunissons les vecteurs relatifs à une même racine p_o^ρ et écrivons les équations $(7_{q'})$ jusqu'à $q' = \tau-1$, celles-ci seules nous seront utiles, on a :

$$(8) \qquad \begin{cases} \sum_\rho \Big(\sum_{\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \Big) = 0 \,, \\ \sum_\rho (p_o^\rho)^{q'} \Big(\sum_{\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^o_{\rho\bar{D}(\rho)} \Big) = 0 \\ \sum_\rho (p_o^\rho)^{\tau-1} \Big(\sum_{D(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \Big) = 0 \,. \end{cases}$$

Les racines p_o^ρ sont toutes distinctes ; le déterminant de Vandermonde correspondant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_o^1 & p_o^\rho & p_o^\tau \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (p_o^1)^{\tau-1} & (p_o^\rho)^{\tau-1} & (p_o^\tau)^{\tau-1} \end{pmatrix}$$

est différent de 0.

On déduit alors de (8), pour tout B et pour tout ρ :

$$\sum_{\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} . d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \,.$$

Or, du lemme 2, il résulte que la famille $(d^B_{\rho\bar{D}(\rho)})$ pour ρ donné est libre, on a donc :

$$\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \,, \quad \text{pour tout } \rho \text{ et tout } \bar{D}(\rho) \,.$$

PROPOSITION II. <u>La valeur absolue du déterminant de la matrice</u> $\Delta(p_i)$ <u>admet un minimum strictement positif quand</u> (p_i) <u>parcourt la sphère unité</u> S <u>de</u> $\mathbb{R}^n$.

<u>La norme de la matrice</u> $\Delta(p_i)$ <u>est majorée quand</u> (p_i) <u>parcourt la sphère unité</u> S <u>de</u> $\mathbb{R}^n$.

En effet l'application D qui, à $(p_i)\in S$ fait correspondre $|\text{dét}\,\Delta(p_i)|$ est continue sur S ; comme S est compacte, elle y a un minimum ; comme $|\text{dét}\,\Delta(p_i)| > 0$ sur tout S, ce minimum est strictement positif.

Chaque élément de la matrice est une fonction continue sur S dont la valeur absolue a un maximum sur S ; la norme usuelle obtenue en prenant la plus grande valeur absolue est majorée.

PROPOSITION III. <u>Soit en un point</u> x, H <u>hyperbolique</u> (définition analogue à celle du § 1 b)) <u>et</u> $q\in\mathring{\Gamma}_x$.

Dire que h satisfait aux conditions (C) en x équivaut à dire que

a) pour tout r, la multiplicité de la racine $p_{or}(p_i)$ de $H(\ell_o,p_i) = 0$ est une fonction constante de $(p_i) \neq 0$;

b) pour tout $(p_i) \neq 0$, pour tout r, $1 \leqq r \leqq \tau$, la fonction de ℓ_o à valeurs matricielles $[H^A_B(\ell_o,p_i)]^{-1}$ admet $p_{or}(p_i)$ comme pôle simple.

Dans la démonstration directe, a) est immédiat. Montrons b). On notera A^B_A le coefficient de H^A_B dans le déterminant H, de la proposition I résulte que

$$A^B_A = (H_1)^{\nu_1-1}\dots(H_s)^{\nu_s-1}\dots(H_\sigma)^{\nu_\sigma-1}B^B_A \quad ,$$

où B^B_A est un polynôme de degré $\tau-t$.

La matrice inverse de la matrice $[H^A_B(\ell_o,p_i)]$ est donc donnée en dehors des pôles par

$$[H^A_B(\ell_o,p_i)]^{-1} = \frac{(A^B_A)}{H} = \frac{(B^B_A)}{H_1\dots H_s\dots H_\sigma} \quad .$$

Pour tout $(p_i) \neq 0$, comme $H_1\dots H_\sigma$ est strictement hyperbolique, la fonction de ℓ_o à valeurs matricielles obtenues n'a que des pôles simples. Elle admet même effectivement chaque $p_{or}(p_i)$ comme pôle simple. En effet, il résulte du lemme 2 que pour tout $(p_i) \neq 0$ et pour tout r, il existe au moins un couple (A,B) tel que

$$B^B_A(p_{or},p_i) \neq 0 \ .$$

Réciproquement, si $H_1\dots H_s\dots H_\sigma$ n'est pas strictement hyperbolique, il existe au moins $(\pi_i) \neq 0$ tel que l'équation

$$(H_1\dots H_\sigma)(\ell_o,\pi_i) = 0$$

admette au moins une racine multiple p_{or}. Le discriminant [6], [13] du polynôme en ℓ_o

$$(H_1\dots H_\sigma)(\ell_o,p_i)$$

est un polynôme en (p_i), soit $\mathfrak{D}(p_i)$ qui est nul pour (π_i). Il n'existe pas de voisinage de (π_i) dans lequel $\mathfrak{D}$ soit nul : s'il en existait un, $\mathfrak{D}$ serait identiquement nul, ce qui est impossible puisque $H_1, \ldots, H_\sigma$ sont irréductibles.

Dans tout voisinage de (π_i), il existe donc au moins un point (p_i) tel que les τ racines correspondantes soient simples pour $H_1 \ldots H_\sigma$. La multiplicité d'une racine $p_{or}(p_i)$ au moins de $(H_1 \ldots H_\sigma)(\ell_o, p_i) = 0$ n'est pas une fonction constante de (p_i). On en déduit que la multiplicité de cette racine n'est pas constante pour $H(\ell_o, p_i) = 0$ et que (a) n'est pas réalisé.

$H_1 \ldots H_\sigma$ étant maintenant strictement hyperbolique pour q, si on suppose que (C,I) n'est pas réalisée pour un certain s, on en déduit que la matrice inverse de $[H^A_B(\ell_o, p_i)]$ s'écrit :

$$[H^A_B(\ell_o, p_i)]^{-1} = \frac{(B^B_A)}{(H_1)^{\mu_1} \ldots (H_s)^{\mu_s} \ldots (H_\sigma)^{\mu_\sigma}}$$

où $\mu_s \geqq 2$ et où il existe au moins (A,B) tel que B^B_A ne soit pas divisible par H_s.

Il existe donc [6], [13], au moins un covecteur $p' \neq 0$ tel que $H_s(p') = 0$ et $(B^B_A(p')) \neq 0$; en posant $p' = (p'_o, p'_i)$, on a :

$$[H^A_B(\ell_o, p'_i)]^{-1} = \frac{(B^B_A(\ell_o, p'_i))}{(\ell_o - p'_o)^{\mu_s}(\ldots)} .$$

Comme $\mu_s \geqq 2$ et $(B^B_A(p')) \neq 0$, (b) ne peut être réalisé.

3. On suppose que la variété considérée au début est simplement l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ et on ne considère comme admissibles que les changements de base de cet espace vectoriel. Notre étude est donc celle de l'opérateur à <u>coefficients constants</u> $(h^A_B(D))$ ou h. Les définitions s'adaptent de façon évidente.

Nous rappellerons un théorème de Kasahara-Yamaguti [7].

THÉORÈME I. <u>Soit</u> $\{q\}$ <u>l'hyperplan d'équation</u> $x^o = 0$. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans</u> $\mathcal{E}^\infty$ <u>et pour cet hyperplan, quels que soient les termes de degré</u> $< t$ <u>des polynômes de dérivation</u> $h^A_B(D)$, <u>est que</u> :

I. $(\det H^A_B)(q) \neq 0$.

II. <u>toutes les valeurs propres de la matrice</u> $(K\text{-}Y)(p_i)$ <u>soient réelles et cette matrice soit diagonalisable, ceci pour tout</u> $(p_i) \in S$;

<u>la matrice</u> $(K-Y)(p_i)$ <u>est la matrice</u> : (cf. [5], [6])

$$(K-Y)(p_i)\quad \begin{array}{c} m\{ \\ \\ \\ \\ \\ \\ m\{ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{m} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & & & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ -L^{0A}_{B} & -L^{1A}_{B} & \cdots & & -L^{(t-1)A}_{B} \end{pmatrix}$$

III. <u>il existe un nombre strictement positif</u> ε <u>et un nombre strictement positif</u> M <u>tels que pour tout</u> $(p_i)\in S$, <u>il existe une matrice inversible</u> $\Delta'(p_i)$ <u>telle que</u>

- $\Delta'^{-1}(p_i)\ (K-Y)(p_i)\Delta'(p_i)$ <u>soit diagonale</u>
- $|\det \Delta'(p_i)| \geqq \varepsilon$
- $\|\Delta'(p_i)\| \leqq M$.

Lorsqu'il existe un plan $\{q\}$ satisfaisant à ces conditions, on dira que l'opérateur h est fortement hyperbolique et, pour un choix de $\{q\}$ qu'il est fortement hyperbolique pour $\{q\}$.

Nous ferons au sujet de ce théorème quelques rappels et remarques [7].

<u>Remarques</u>

I. La définition d'un système bien posé est celle de [7] ; (voir aussi [6] pour des simplifications et généralisations.)

II. Pour que le système soit bien posé pour $\{q\}$ il faut et il suffit que $(\det H^A_B)(q) \neq 0$ et que le déterminant des polynômes $h^A_B(\ell)$ soit un polynôme tel qu'il existe un nombre réel σ_o tel que([6], [7]), pour tout $\ell\in\mathbb{R}^{n+1}$ et tout $\sigma < \sigma_o$,

$$\det(h^A_B)(\ell+i\sigma q) \neq 0 \ .$$

On utilise des résultats de Pétrovsky, Gårding, Leray, Kasahara, Yamaguti.

III. Dans ce cas on a aussi des solutions dans les espaces de Sobolev et les espaces $\mathscr{C}^k$ [6].

Nous établirons un théorème I' où sont données des conditions équivalentes à celles de Kasahara-Yamaguti, mais qui nous seront plus commodes, car elles sont énoncées directement à l'aide de (H^A_B).

THÉORÈME I'

Soit $\{q\}$ l'hyperplan d'équation $x^o = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur h soit fortement hyperbolique pour $\{q\}$ est que :

a) $H_1 \ldots H_\sigma$ soit hyperbolique et $q \in \overset{\circ}{\Gamma}_x$,

b) pour tout $(p_i) \in S$, pour tout r , $1 \leq r \leq \tau$, la dimension du noyau de $(H^A_B(p_{or}, p_i))$ soit égale à la multiplicité de la racine p_{or} dans l'équation $H(\lambda_o, p_i) = 0$,

c) il existe un nombre strictement positif ε' et un nombre strictement positif M' tels que, pour tout $(p_i) \in S$, pour tout r , il existe une base $(d_{r\underline{D}(r)})$, $(1 \leq \underline{D}(r) \leq$ multiplicité de la racine $p_{or}(p_i)$ dans $H)$ du noyau de $(H^A_B(p_{or}, p_i))$ telle que :

$$|\det \Delta''(p_i)| \geq \varepsilon' ;$$

$$\sup_{B, r, \underline{D}(r)} |d^B_{r\underline{D}(r)}| \leq M' .$$

$$\Delta''(p_i) = \begin{pmatrix} d^B_{11} & d^B_{1\underline{D}(1)} & d^B_{r\underline{D}(r)} \\ (p_{o1})^{t'} d^B_{11} & (p_{o1})^{t'} d^B_{1\underline{D}(1)} & (p_{or})^{t'} d^B_{r\underline{D}(r)} \\ (p_{o1})^{t-1} d^B_{11} & (p_{o1})^{t-1} d^B_{1\underline{D}(1)} & (p_{or})^{t-1} d^B_{r\underline{D}(r)} \end{pmatrix}$$

$\Delta''(p_i)$ a mt colonnes et mt lignes.

Nous montrerons que les conditions du théorème I' sont équivalentes à celles du théorème I. Montrons d'abord que ces conditions impliquent celles de I .

Si q satisfait à a), on a $(H_1 \ldots H_\sigma)(q) \neq 0$ et q satisfait évidemment à I.I.

Si a), b), c) sont réalisées, I.II est réalisée. En effet, la matrice $(K-Y)(p_i) - \lambda_o I$, (I matrice unité d'ordre mt) , s'écrit :

$$
\begin{array}{c}
m \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \\
\\
\\
m \left\{ \begin{array}{c} \\ \end{array} \right.
\end{array}
\begin{pmatrix}
-\ell_o & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & -\ell_o & 0 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & -\ell_o & 0 & 1 & 0 & \\
 & & & 0 & -\ell_o & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & \\
-L_B^{oA} & & -L_B^{1A} & & & & -L_B^{(t-1)A} & -\ell_o\delta_B^A
\end{pmatrix} .
$$

Par un calcul facile [7], on voit que :

$$\det[-(K-Y)(p_i) + \ell_o I] = \det H_B^A(\ell_o, p_i) = H(\ell_o, p_i) \ .$$

De a) il résulte que toutes les valeurs propres de $(K-Y)(p_i)$ sont réelles.

Soit $(p_i)\in S$; le produit de $(K-Y)(p_i) - p_{or}I$, (p_{or} valeur propre correspondante), par le vecteur :

$$\begin{pmatrix} d^B_{r\underline{D}(r)} \\ (p_{or})^{t'} d^B_{r\underline{D}(r)} \\ (p_{or})^{t-1} d^B_{r\underline{D}(r)} \end{pmatrix}$$

est nul puisque, d'après b), c) :

$$H_B^A(p_{or}, p_i) d^B_{r\underline{D}(r)} = 0 \ .$$

On en déduit que, pour r donné, la famille de vecteurs obtenue en faisant varier $\underline{D}(r)$ est une famille de vecteurs propres associés à la valeur propre p_{or}. De c) résulte que la famille des mt vecteurs propres ainsi obtenus en faisant varier r et $\underline{D}(r)$ est pour (p_i) donné une base de $\mathbb{R}^{mt}$. La matrice $(K-Y)(p_i)$ est donc diagonalisable pour tout $(p_i)\in S$ et ses valeurs propres sont les racines p_{or} qui sont toutes réelles.

Enfin I.III est réalisé par la matrice $\Delta''(p_i)$. En effet, elle diagonalise $(K-Y)(p_i)$; on a aussi $|\det \Delta''(p_i)| \geqq \varepsilon'$ indépendant de $(p_i)\in S$; enfin $\|\Delta''(p_i)\| \leqq M$ uniformément, puisque $\sup\limits_{r,(p_i)} |p_{or}|$ est majoré du fait que les fonctions $p_{or}(p_i)$ sont continues sur le compact S .

Réciproquement, supposons les conditions du théorème I réalisées. On a évidemment $(H_1 \ldots H_\sigma)(q) \neq 0$. On a encore :

$$\text{dét}[-(K-Y)(p_i) + \ell_o I] = \text{dét}\ H_B^A(\ell_o, p_i) = H(\ell_o, p_i)$$

et $H_1 \ldots H_s \ldots H_\sigma$ est hyperbolique et $q \in \overset{\circ}{\Gamma}_x$.

Soit $p_{or}(p_i)$ une valeur propre de la matrice $(K-Y)(p_i)$ et $(t_r^v(p_{or},p_i))$ un vecteur propre associé, $(1 \leqq v \leqq mt)$; on a :

$$- p_{or} t_r^v + t_r^{v+m} = 0 \ , \quad \text{pour tout} \quad v, 1 \leqq v \leqq m(t-1) \ ,$$

donc

$$t_r^v = \begin{pmatrix} t_r^B \\ \\ (p_{or})^{t'} t_r^B \\ \\ (p_{or})^{t-1} t_r^B \end{pmatrix} \qquad 1 \leqq B \leqq m \ .$$

De plus :

$$[\delta_B^A (p_{or})^t + \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA} p_{or})^q + L_B^{0A}] t_r^B = 0 \ .$$

Soit encore :

$$H_B^A(p_{or},p_i) t_r^B(p_{or},p_i) = 0 \ ,$$

t_r^B appartient donc au noyau de $H_B^A(p_{or},p_i)$.

Si des vecteurs $(t^v_{r\underline{D}(r)})$ forment une base de l'espace propre associé à p_{or} , les vecteurs $(t^B_{r\underline{D}(r)})$ correspondants forment une famille libre de noyau de $H_B^A(p_{or},p_i)$, dont le nombre de vecteurs est égal à la multiplicité de la racine p_{or} dans H . Comme la dimension du noyau de $H_B^A(p_{or},p_i)$ est à priori inférieure ou égale à la multiplicité de p_{or} dans H (cf. raisonnement de L 2) il en résulte qu'elle est effectivement égale et b) est réalisée ; les $t^B_{r\underline{D}(r)}$ forment de plus une base du noyau de $H_B^A(p_{or},p_i)$.

D'après I.III, il existe $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $(p_i) \in S$, il existe une matrice de vecteurs propres $\Delta'(p_i)$ telle que :

$$|\text{dét } \Delta'(p_i)| \geqq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\Delta'(p_i)\| < M \ .$$

On a :

$$\Delta'(p_i) = \begin{pmatrix} \vdots & t^B_{r\underline{D}(r)} & \vdots \\ \vdots & (p_{or})^{t'} t^B_{r\underline{D}(r)} & \vdots \\ \vdots & (p_{or})^{t-1} t^B_{r\underline{D}(r)} & \vdots \end{pmatrix} \ .$$

Les conditions du théorème I' sont évidemment réalisées.

THÉORÈME II. Les conditions (C) du § 1 sont suffisantes pour que l'opérateur h soit fortement hyperbolique.

En effet, du § 1, résulte que, si (C) sont réalisées, toutes les conditions du théorème I' sont satisfaites.

THÉORÈME II'. Une condition nécessaire pour que l'opérateur h soit fortement hyperbolique est que

$$\left\{\begin{array}{l} \text{i) pour tout } s, \ 1 \leq s \leq \sigma \\ \qquad (H^A_B) \sim \left(\begin{array}{cccccc} H_s & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & H_s & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a\\a\\a \end{array}}\right\} \nu_s \\ \\ \\ \end{array} \Bigg\} m \\ \qquad \text{dans } \Phi_s, \\ \text{ii) } H_1 \ldots H_s \ldots H_\sigma \text{ soit hyperbolique.} \end{array}\right.$$

ii) est nécessaire d'après le théorème I' a).

Pour montrer que i) l'est aussi, montrons que sa négation contredit I' b).

Supposons qu'il existe un s tel que dans Φ_s :

$$(H^A_B) \sim \left(\begin{array}{ccccc} (H_s)^{q_1(s)} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & (H_s)^{q_k(s)} & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \quad \Big\} k_s < \nu_s$$

c'est-à-dire que le facteur invariant H_s apparaît sur la diagonale avec un exposant strictement supérieur à 1.

Il existe alors au moins un mineur A'_s d'ordre $(m-k_s)$ non divisible par H_s.

On peut supposer que $H_1 \ldots H_s$ est hyperbolique puisque ii) est nécessaire. Soit $q = (1,0,\ldots,0) \in \overset{\circ}{\Gamma}_x$; il existe au moins une forme réelle p telle que (p_i) appartienne à S, $H_s(p) = 0$ et $A'_s(p) \neq 0$, [6], [13].

On a donc dans $\mathbb{R}$ pour p :

$$(H_B^A)(p) \sim \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \cdots \\ 0 & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \Big\} \; k_s < \nu_s$$

et la dimension du noyau de $(H_B^A(p))$ est k_s strictement inférieure à la multiplicité de la racine correspondante dans $H(p) = 0$.

<u>Remarques</u>

1) Lorsque $m = 1$, (opérateur "scalaire"), l'hyperbolicité forte de l'opérateur h équivaut à l'hyperbolicité stricte du polynôme H ;

2) Si $m > 1$, il n'est pas nécessaire que le produit $H_1 \times \cdots \times H_\sigma$ soit strictement hyperbolique pour que h soit fortement hyperbolique, on a l'exemple :

$$(H_B^A) = \begin{pmatrix} \ell_0 - \ell_1 & 0 \\ 0 & \ell_0 - \ell_2 \end{pmatrix} .$$

3) Le théorème II montre qu'un exemple contraire à l'hyperbolicité forte du type de Petrovsky [7] n'est pas possible si le produit $H_1 \times \cdots \times H_\sigma$ est strictement hyperbolique. L'exemple de Petrovsky est :

$$(H_B^A) = \begin{pmatrix} \ell_0 - \ell_1 & \ell_2 & 0 \\ \ell_2 & \ell_0 & \ell_2 \\ 0 & 0 & \ell_0 \end{pmatrix}.$$

Il faut distinguer parmi les racines multiples de H celles dues à la présence d'un facteur multiple dans la décomposition de H dans l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\ell_0, \ldots, \ell_n]$ et celles dues à la présence d'un facteur multiple dans la décomposition du polynôme $H_1 \ldots H_\sigma$, pour un certain (p_i) dans $\mathbb{R}[\ell_0]$; dans ce dernier cas, la multiplicité d'une racine n'est pas constante au voisinage de (p_i). En langage géométrique, cela revient à distinguer les "nappes multiples" du cône algébrique défini par l'idéal engendré par H et les "points singuliers" du cône algébrique défini par l'idéal engendré par $H_1 \ldots H_\sigma$.

4) Nous supposons la variété envisagée au début paracompacte et il s'agit maintenant d'opérateurs "à coefficients variables".

THÉORÈME III. Un opérateur satisfaisant aux conditions (C) en chaque point de la variété est localement strictement hyperbolique au sens de Leray-Ohya [10], quels que soient les termes de degré $< t$ des polynômes de dérivation $h^A_B(x,D)$. Si, de plus, l'ensemble des chemins orientés dans le temps entre deux points est compact quels que soient ces deux points [14], l'hyperbolicité est globale.

Ce théorème est en fait contenu, au langage algébrique près, dans un résultat de Mme Choquet-Bruhat [2]; nous nous inspirerons de sa démonstration et rappellerons brièvement [10]. On trouvera dans [10] des précisions sur les espaces considérés.

Rappelons qu'on note A^B_A le cofacteur de H^A_B dans le déterminant de la matrice caractéristique et que, d'après la proposition I :

$$A^B_A = (H_1)^{\nu_1 -1}\ldots(H_s)^{\nu_s -1}\ldots(H_\sigma)^{\nu_\sigma -1} B^B_A$$

où B^B_A est un polynôme de degré $\tau - t$.

Pour chaque (A,B), on désigne par $b^B_A(x,D)$ un opérateur quelconque de polynôme caractéristique B^B_A . On associe au système

(1) $$h^A_B(x,D)\; y^B(x) = f^A(x) \;,$$

le système

(9) $$h^A_B(x,D)\; b^B_C(x,D)\; z^C(x) = f^A(x) \;.$$

L'opérateur $h^A_B(x,D)\; b^B_C(x,D)$ a pour partie principale (de degré τ) :

$$H_1\ldots H_s\ldots H_\sigma\; \delta^A_C$$

et (9) s'écrit, en désignant par $h_s(x,D)$ un opérateur de polynôme caractéristique H_s :

(9') $$h_1(x,D)\ldots h_s(x,D)\ldots h_\sigma(x,D) z^A(x) + h'^A_C(x,D) z^C(x) = f^A(x) \;,$$

avec chaque opérateur h' d'ordre $< \tau$.

Ce système diagonal (9') est localement strictement hyperbolique au sens de Leray-Ohya. En effet, localement, le problème de Cauchy pour (9'), à données nulles sur une hypersurface dont la forme "cotangente" q en chaque point x (si $x^0 = 0$ est l'équation locale de l'hypersurface, $q = (1,0,\ldots,0)$) , est dans $\overset{\circ}{\Gamma}_x$, se résoud dans des espaces à un nombre fini de dérivées ; (1) admet alors pour solution du problème à données nulles :

$$y^B(x) = b^B_C(x,D)z^C(x) \ .$$

On a ensuite une solution pour des données de Cauchy quelconques et un théorème d'unicité [10]. Le problème de Cauchy est ainsi résolu localement dans des espaces de fonctions ayant un nombre fini de dérivées.

Le résultat global est celui de [14], [9].

5. THÉORÈME IV. Dans le cas $t = 1$, ($h^A_B(x,D)$ opérateur d'ordre ≤ 1), soit Q une hypersurface et a un point de Q , (on prendra $x^0 = 0$ pour équation locale de Q), tel que la forme cotangente en a à Q soit dans $\overset{\circ}{\Gamma}_a$.

Dire que h satisfait aux conditions (C) en a équivaut à dire que, dans un voisinage de a , h satisfait aux conditions d'hyperbolicité de Friedrichs [17] (p. 222), Kreiss [19] suffisantes pour l'existence d'un opérateur pseudodifférentiel "surface symmetriser", dont le symbole soit une fonction analytique de (p_i) et continue de x .

Cela résulte immédiatement de la proposition III et des hypothèses générales de multiplicité constante "en x " du début du premier paragraphe.

6. Le théorème V sera local. L'intérêt est d'approcher la solution par une solution oscillatoire [3], [5], [8], [11] .

Nous supposerons, pour simplifier les notations, le second membre de (1) nul.

Définition. On appellera onde oscillatoire formelle dans un voisinage de a , une série formelle "oscillatoire" de la forme

$$y^B(x) = e^{i\omega\varphi(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y^B_{t+j}(x)}{(i\omega)^j} \ ; \tag{10}$$

ω est réel, φ est à valeurs réelles, indéfiniment différentiable, telle que $(\text{grad } \varphi)(x) \neq 0$ dans le voisinage, et vérifie l'équation caractéristique $H(x, \text{grad } \varphi(x)) = 0$, et Y^B_{t+j} est indéfiniment différentiable dans le voisinage et telle qu'en reportant dans le système (1) la série formelle obtenue :

$$e^{i\omega\varphi(x)}(i\omega)^t[F^A_0(x) + \frac{F^A_1(x)}{\omega} + \ldots] \ ,$$

soit nulle, c'est-à-dire que chacun des coefficients $F^A(x)$ soit nul dans le voisinage considéré.

Supposons que h satisfait aux conditions (C) et étudions une telle onde. On trouve que $F^A_o = 0$ s'écrit :

$$H^A_B(x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x))Y^B_t(x) = 0\ .$$

φ étant solution de l'équation caractéristique, on a :

$$H(a,\ \mathrm{grad}\ \varphi\ (a)) = 0\ ,$$

d'où, pour un certain s :

$$H_s(a,\ \mathrm{grad}\ \varphi(a)) = 0$$

et pour $s' \neq s$, $H_{s'}(a,\ \mathrm{grad}\ \varphi(a)) \neq 0$, d'après le premier paragraphe. Dans un voisinage convenable, φ vérifie donc :

$$H_s(x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x)) = 0$$

et

$$H'_s(x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x)) \neq 0\ .$$

On en déduit, comme dans [12], que $Y^B_t(x)$ est de la forme

(11) $$Y^B_t(x) = U^{\bar{D}}_t(x)\ d^B_{\bar{D}}(x,p)\ ,$$

où l'on a posé : $p = \mathrm{grad}\ \varphi$; $U^{\bar{D}}_t$ est $\mathscr{C}^\infty$; $1 \leqq \bar{D} \leqq \nu_s$.

$F^A_1 \equiv 0$, s'écrit dans des coordonnées locales contenant le voisinage envisagé:

$$H^A_B(x,p)Y^B_{t+1}(x) + \partial^\alpha H^A_B(x,p)\partial_\alpha Y^B_t(x) + M^A_B(x,p)Y^B_t(x) = 0\ ,$$

en posant :

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \quad \text{et} \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ .$$

Multiplions par des vecteurs, analogues aux $d^B_{\bar{D}}(x,p)$, notés $g^{\bar{F}}_A(x,p)$ et formant une base du noyau de l'application transposée de l'application linéaire $(H^A_B(x,p))$ [12], on obtient, en tenant compte de (11) :

$$g^{\bar{F}}_A(x,p).\partial^\alpha H^A_B(x,p)\partial_\alpha[U^{\bar{D}}_t(x)d^B_{\bar{D}}(x,p)] + g^{\bar{F}}_A(x,p)M^A_B(x,p)d^B_{\bar{D}}(x,p)U^{\bar{D}}_t(x) = 0\ ,$$

soit :

$$\mathscr{H}^{\bar{F}}_{\bar{D}}(x,p)\vec{p}^{\,\alpha}(x,p)\partial_\alpha U^{\bar{D}}_t(x) + M'_{\bar{D}}(x,p)U^{\bar{F}}_t(x) = 0\ ,$$

en posant :

$$\frac{\partial H_s}{\partial \xi_\alpha}(x,p) = \vec{p}^{\,\alpha}(x,p) \quad \text{(vecteur bicaractéristique)}$$

et où $\mathcal{H}_{\bar{\bar{D}}}^{\bar{\bar{F}}}$ est la matrice inversible définie dans [12].

On a donc encore :

$$\vec{p}^{\alpha}(x,p)\partial_{\alpha}U_t^{\bar{\bar{D}}}(x) + M''^{\bar{\bar{D}}}_{\bar{\bar{F}}}(x,p)U_t^{\bar{\bar{F}}}(x) = 0 .$$

$U_t^{\bar{\bar{D}}}$ est donc une solution $\mathcal{C}^{\infty}$ de cette équation aux dérivées partielles ; elle s'intègre par quadratures dans les cas indiqués dans [3]. $U_t^{\bar{\bar{D}}}(x)$ est déterminé si on connaît sa restriction à une hypersurface Q passant par a, pourvu que $\vec{p}$ ne soit pas tangent en a à Q, ce qui est réalisé si la forme cotangente q à Q en a est dans $\overset{o}{\Gamma}_a$ (cf. § 1).

On détermine de même tous les $U_{t+j}^{\bar{\bar{D}}}$ et les Y_{t+j}^{B} par récurrence pourvu qu'on connaisse les restrictions des $U_{t+j}^{\bar{\bar{D}}}$ sur $x^o = 0$. On a donc la

PROPOSITION IV. Localement, une onde oscillatoire formelle est déterminée par les restrictions de certains de ses coefficients sur une hypersurface, transverses aux bicaractéristiques relatives à cette onde.

Nous sommes conduits à rappeler l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre :

$$H_s(x, \operatorname{grad} \varphi(x)) = 0 ,$$

H_s étant supposé strictement hyperbolique en a.

Soit Q, $(x^o = 0)$, une hypersurface passant par a et telle que sa forme cotangente en a et donc dans un voisinage, soit dans $\overset{o}{\Gamma}_a$. Soit $\Psi(x^i)$ une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ à valeurs réelles définie dans le voisinage considéré, telle que $\operatorname{grad} \Psi(a) \neq 0$. Posons $(\operatorname{grad} \Psi)_i(a) = p_i(a)$; l'équation en ℓ_o :

$$H_s(a,\ell_o,p_i(a)) = 0$$

a toutes ses racines réelles et simples. Soit $p_o^{\rho}(a)$ l'une d'elles. Un résultat classique [6] indique qu'il existe un voisinage de a, tel que dans ce voisinage, il existe une solution et une seule $\varphi^{\rho} \in \mathcal{C}^{\infty}$ pour l'équation proposée, satisfaisant aux conditions initiales :

$$\varphi^{\rho}(0,x^i) = \Psi(x^i) \ ; (\operatorname{grad} \varphi^{\rho})_o(a) = p_o^{\rho}(a) .$$

Il en est de même pour chaque racine de $H_s(a,\ell_o,p_i(a)) = 0$ et plus généralement pour chaque racine de :

$$(H_1 \ldots H_s \ldots H_{\sigma})(a,\ell_o,p_i(a)) = 0 .$$

On obtient donc, localement, τ fonctions φ^{ρ} indéfiniment différentiables, satisfaisant à l'équation $(H_1 \ldots H_s \ldots H_\sigma)(x, \operatorname{grad} \varphi^\rho(x)) = 0$, telles que :

$$\varphi^\rho(0,x^i) = \psi(x^i) \; ; \; (\operatorname{grad} \varphi^\rho)_o(a) = p_o^\rho(a) ,$$

pourvu que la forme cotangente à Q, $(x^\circ = 0)$, en a soit choisie dans $\overset{\circ}{\Gamma}_a$.

Problème de Cauchy à données oscillatoires.

Données de Cauchy : on se donne mt séries oscillatoires formelles dans l'intersection d'un voisinage de a et d'une hypersurface Q, $(x^\circ = 0)$, telle que sa forme cotangente en a soit dans $\overset{\circ}{\Gamma}_a$.

Problème de Cauchy : on cherche une solution formelle du système proposé, sous forme de somme des ondes oscillatoires formelles, soit :

$$y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} e^{i\omega\varphi^\rho(x)} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y^{\rho B}_{t+j}(x)}{(i\omega)^j} \Big)$$

et telle que les données de Cauchy soient vérifiées, soit :

$$y^B(0,x^i) = e^{i\omega\Psi(x^i)} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Z^B_{t+j,0}(x^i)}{(i\omega)^j} \Big)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\partial_{(0)^{t-1}} y^B(0,x^i) = e^{i\omega\Psi(x^i)} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (i\omega)^{t-1} \frac{Z^B_{t+j,t-1}(x^i)}{(i\omega)^j} \Big) .$$

On détermine d'abord, avec les notations précédentes, les valeurs initiales $U^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x^i)$ en identifiant les séries formelles précédentes sur $x^\circ = 0$. On obtient :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} Y^{\rho B}_{t+j}(0,x^i) = Z^B_{t+j,0}(x^i) , \qquad \text{pour } j \geqq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} p_o^\rho(0,x^i)\, Y^{\rho B}_t(0,x^i) = Z^B_{t,1}(x^i) . \\ \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} p_o^\rho(0,x^i)\, Y^{\rho B}_{t+j+1}(0,x^i) + \partial_o Y^{\rho B}_{t+j}(0,x^i) = Z^B_{t+j+1,1}(x^i) , \quad \text{pour } j > 0 . \end{array} \right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} [p_o^\rho(0,x^i)]^{t-1}\, Y^{\rho B}_t(0,x^i) = Z^B_{t,t-1}(x^i) \\ \displaystyle\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} [p_o^\rho(0,x^i)]^{t-1}\, Y^{\rho B}_{t+j+1}(0,x^i) + \text{termes en } Y^{\rho B}_{t+j'} = Z^B_{t+j+1,t-1}(x^i) \\ \hfill \text{pour } j > 0 \; ; \; (0 \leqq j' \leqq j) . \end{array} \right.$$

On a posé : $p_o^\rho(0,x^i) = (\text{grad}\ \varphi^\rho)_o(0,x^i)$.

Pour déterminer les $Y_t^{\rho B}(0,x^i)$, on considère d'abord :

$$\begin{cases} \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=\tau} Y_t^{\rho B}(0,x^i) = Z_{t,0}^B(x^i), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=\tau} [p_o^\rho(0,x^i)]^{t-1}\, Y_t^{\rho B}(0,x^i) = Z_{t,t-1}^B(x^i) . \end{cases}$$

Soit, en fonction des $U_t^{\bar D}$ et avec des notations analogues à celles du paragraphe 2 .

$$\begin{cases} \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=\tau} U_t^{\rho\bar D(\rho)}(0,x^i)\, d^B_{\rho\bar D(\rho)}(0,x^i) = Z_{t,0}^B(x^i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=\tau} U_t^{\rho\bar D(\rho)}(0,x^i)[p_o^\rho(0,x^i)]^{t-1}\, d^B_{\rho\bar D(\rho)}(0,x^i) = Z_{t,t-1}^B(x^i) . \end{cases}$$

Compte tenu du lemme 3, le déterminant de ce système d'équations en $U_t^{\rho\bar D(\rho)}$ est différent de 0 , en a , donc dans un voisinage de a . On obtient donc une solution et une seule $(U_t^{\rho\bar D(\rho)}(0,x^i))$ indéfiniment différentiable en x^i . Compte tenu de la démonstration de la proposition IV, on obtient encore les $U_t^{\rho\bar D(\rho)}(x)$ dans un voisinage de a et, par suite, les $Y_t^{\rho B}(x)$. Par récurrence, on obtient de même tous les $Y_{t+j}^{\rho B}(x)$. On a le

THÉORÈME V. Soit h , $(h_B^A(x,D))$, un opérateur satisfaisant aux conditions (C) en a et Q une hypersurface passant par a , dont la forme cotangente en a est dans Γ_a . Il existe un voisinage de a dans lequel le problème de Cauchy à données oscillatoires sur Q admet une solution et une seule, sous forme de somme des ondes oscillatoires formelles ; ceci a lieu quelles que soient les données oscillatoires et quels que soient les termes de degré $< t$ des polynômes de dérivation $h_B^A(x,D)$.

Remarque. Si h ne satisfait pas aux conditions (C), on voit facilement qu'il est impossible d'obtenir une solution du type précédent sans conditions sur les données de Cauchy ou sur les termes non principaux des opérateurs $h_B^A(x,D)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI. Groupes et corps ordonnés, Hermann, Paris 1964.

[2] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT. J. Math. pures et applic. 45, 1966, p. 371 à 386.

[3] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT. J. Math. pures et applic., 48, 1969, p. 117-158.

[4] COURANT et P.D. LAX. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S., vol. 42, n° 11, 1956, pp. 872-876.

[5] GÅRDING-KOTAKE-LERAY. Bull. Soc. Math. Fr. t. 92, 1964, pp. 263-361.

[6] HÖRMANDER. Linear partial differential operators. Springer Verlag, Berlin, 1964.

[7] KASAHARA et YAMAGUTI. Memoirs of the college of Science, University of Kyoto, series A, vol. XXXIII Mathematics, n° 1, 1960.

[8] P.D. LAX. Duke Math. J., vol. 24, 1957, pp. 627-646.

[9] J. LERAY. Hyperbolic differential equations. The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1952.

[10] J. LERAY-et OHYA. Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts. Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[11] D. LUDWIG. Comm. pure appl. Math., vol. 13, 1960, p. 473-508.

[12] J. VAILLANT. J. Math. pures et applic. 47, 1968, pp. 1 à 40.

[13] VAN DER WAERDEN. Modern Algebra (vol. I). Frederick Ungar Publ. New York 1948.

[14] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT. Battelle rencontres 1967, p. 84-106, Benjamin, New York 1968.

[15] DUFF et TSUTSUMI. Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 19, n° 3, 1969, pp. 219-237.

[16] CHAILLOU. Thèse Sc. Math., Paris, 1969 (à paraître).

[17] FRIEDRICHS. Pseudodifferential operators. Courant Institute, 1968, New York.

[18] STRANG. J. Math. Kyoto Univ. 6, 1967, pp. 397-417.

[19] KREISS. Math. Scand., vol. 13, 1963, pp. 109-128.