A. Crumeyrolle

Algèbres de Clifford symplectiques et revêtements spinoriels du groupe symplectique

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1974-1975), exp. n° 4, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___3_A4_0>

ALGEBRES DE CLIFFORD SYMPLECTIQUES ET REVETEMENTS SPINORIELS DU GROUPE SYMPLECTIQUE

par A. CRUMEYROLLE

En analogie avec le cas orthogonal on construit et on étudie "l'algèbre de Clifford symplectique" d'un espace vectoriel de dimension paire ; introduisant des séries formelles symplectiques on définit les revêtements du groupe symplectique comme des groupes spinoriels.

I. Algèbres de Clifford symplectiques.

E est un espace vectoriel de dimension $n = 2r$ sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif de caractéristique nulle. F est une forme bilinéaire antisymétrique de rang maximal. Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{K})$ est le sous-groupe des éléments de $GL(n, \mathbb{K})$ conservant F. On construit l'algèbre associative, quotient de l'algèbre tensorielle de E, par l'idéal bilatère $J(F)$ engendré par les éléments :

$$x \otimes y - y \otimes x - F(x, y), \quad x, y \in E \qquad (1)$$

Nous écrivons $\otimes E_{/J(F)} = C_s(F)$ et appelons $C_s(F)$ une algèbre de Clifford symplectique. Si ρ_F est l'homomorphisme canonique de $\otimes E$ sur $C_s(F)$, (1) entraîne :

$$\rho_F(x)\ \rho_F(y) - \rho_F(y)\ \rho_F(x) = F(x, y) \qquad (2)$$

$C_s(F)$ est de manière évidente engendrée par $\rho_F(E)$ et c'est une algèbre semi-graduée $C_s(F) = C^+ \oplus C^-$. Il est immédiat que $C_s(F)$ s'identifie à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Heisenberg $E \oplus \mathbb{K}$, munie du crochet $[x, y] = F(x, y)$, $[x, 1] = 0$, $x, y \in E$, mais pour mieux souligner l'analogie avec les algèbres de Clifford orthogonales on oubliera systématiquement cette identification.

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit A une algèbre associative sur $\mathbb{K}$ avec loi multiplicative $\ast$ et u une application linéaire de E dans A telle que $u(x) \ast u(y) - u(y) \ast u(x) = F(x, y)$; il existe un homomorphisme $\bar{u}$ et un seul de $C_s(F)$ dans A tel que $u = \bar{u} \circ \rho_F$.</u>

La démonstration de type standard est identique à celle que l'on donne pour les algèbres de Clifford orthogonales [2].

Prenant $A = C_s(F)$, $u = -\rho_F$, on en déduit l'existence pour $C_s(F)$ d'un automorphisme principal :

$\alpha = \mathrm{Id}$ sur C^+, $\alpha = -\mathrm{Id}$ sur C^- et $\alpha^2 = \mathrm{Id}$ sur $C_s(F)$.

Prenant $A = C_s^o(F)$, algèbre opposée, considérons sur E une base symplectique $(e_\alpha, e_{\beta*})$, $\alpha, \beta = 1, \dots r$ telle que :

$$(3) \qquad F(e_\alpha, e_\beta) = F(e_{\alpha*}, e_{\beta*}) = 0, \quad F(e_\alpha, e_{\beta*}) = \delta_{\alpha\beta},$$

on en déduit qu'il existe β (antiautomorphisme principal) tel que

$\beta(\rho_F\, e_\alpha) = \rho_F\, e_{\alpha*}$, $\beta(\rho_F\, e_{\alpha*}) = \rho_F(e_\alpha)$, $\beta^2 = \mathrm{Id}$ sur $C_s(F)$.

Plus particulièrement, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pourra introduire un anti-automorphisme β avec $\beta|(\rho_F(E)) = i\,\mathrm{Id}$.

Proposition 2. $C_s(F)$ est linéairement isomorphe à l'algèbre symétrique VE.

La démonstration se conduit comme pour le cas orthogonal en dimension infinie [3]. On montre successivement :

- que si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, les $\rho(e_1)^{k_1} \rho(e_2)^{k_2} \dots \rho(e_n)^{k_n}$ $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, engendrent $C_s(F)$,
- que si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels munis de formes symplectiques F_1 et F_2, $C_s(F_1) \otimes C_s(F_2)$ est une algèbre associative avec la loi :

  $(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$, $a_i, b_i \in F_i$, $(i = 1, 2)$

  étendue par linéarité,
- que $C_s(F_1 \oplus F_2)$ et $C_s(F_1) \otimes C_s(F_2)$ sont isomorphes,
- qu'il suffit ensuite de raisonner par récurrence sur la dimension de E, à partir de dim E = 2.

On peut alors identifier, $\rho_F(x)$ et $x \in E$.

Toutes les algèbres de Clifford symplectiques de E sont isomorphes.

Proposition 3. L'algèbre $C_s(F)$ est centrale.

On observe que les éléments d'une base symplectique autres que e_α commutent avec e_{α^*}, si u est central on écrit $u = u_1 + v$, v ne contenant aucune puissance de e_{α^*}; observant que : $(e_{\alpha^*})^k e_\alpha - e_\alpha (e_{\alpha^*})^k = -k(e_{\alpha^*})^{k-1}$, on montre que u_1 est nul. On raisonne ainsi pour tout e_i, $i = 1,\dots n$.

II. Algèbres de Clifford symplectiques larges.

Une base ordonnée $(e_1, e_2,\dots,e_n)$ étant choisie dans E, tout élément de $C_s(F)$ s'écrit en somme finie :

$u = a_{j1\dots jn}\ e_1^{j_1}\dots e_n^{j_n}$, avec sommation sur les indices répétés,

$j_1, j_2,\dots j_n$ entiers positifs, $a_{j1\dots jn} \in \mathbb{K}$. On écrira $u = a_J\, e^J$.

Il est possible d'introduire des sommes formelles infinies $\hat{u} = \lambda_J\, e^J$ et d'étendre naturellement la loi de multiplication de $C_s(F)$ car l'ordre ω de $\hat{u}$ satisfait à :

$$\omega(\hat{u}\ \hat{v}) \geqslant \omega(\hat{u}) + \omega(\hat{v}) - N$$

N étant un nombre fini, fixe, égal à 4 pour une base symplectique (e_α, e_{β^*}). Le produit $\hat{u}\ \hat{v}$ ne dépendra pas de la base choisie car les produits des approximations successives de $\hat{u}$ et $\hat{v}$ en sont indépendants.

L'algèbre de ces séries formelles symplectiques sera appelée algèbre de Clifford symplectique large et notée $C_s(F)_\ell$. $C_s(F)_\ell$ est linéairement isomorphe à l'algèbre des séries formelles construites sur VE. On montre alors :

- que la règle de substitution est valable dans les conditions habituelles,
- que toute série formelle symplectique dont le terme constant est différent de 0 est inversible (mais la réciproque n'est pas exacte).

Proposition 4. $C_s(F)_\ell$ est une algèbre simple.

On introduit une base symplectique, $\hat{u} = \lambda_{JK^*}\, e^J\, e^{K^*}$, et la suite des idéaux à gauche $C_s(F)_\ell\ .\ e^{K^*}$, on définit

$r^{H^*}_{K^*}$: $C_s(F)_\ell \; e^{H^*} \to C_s(F)_\ell \; e^{K^*}$ (si $K^* \leq H^*$), qui à $\lambda_{JH^*} \; e^J e^{H^*}$ associe $\lambda_{JH^*} \; e^J e^{K^*}$, on obtient un système projectifs d'ensembles et d'applications, on montre qu'il existe $C_s(F)_\ell \cdot \Phi^* = \varprojlim_{K^*} C_s(F)_\ell \cdot e^{K^*}$, limite projective de cette suite d'idéaux à gauche. La représentation de $C_s(F)_\ell$ dans $C_s(F)_\ell \cdot \Phi^*$ obtenue par produit à gauche est irréductible. On établit que $C_s(F)_\ell$ est semi-simple et que ses idéaux bilatères sont triviaux

Définition : On appelle spineur symplectique tout élément d'un espace de représentation irréductible de $C_s(F)_\ell$.

III. Groupes de Clifford et groupes spinoriels symplectiques.

Nous appellerons groupe de Clifford symplectique G_s, le sous-groupe des éléments inversibles γ de $C_s(F)_\ell$ tels que $\gamma x \gamma^{-1} \in E$, $\forall x \in E$.

Proposition 5. Si $p_\gamma(x) = \gamma x \gamma^{-1}$, $p : \gamma \to p_\gamma$ est une représentation de G_s dans $Sp(n, \mathbb{K})$.

$$F(\gamma x \gamma^{-1}, \gamma y \gamma^{-1}) = (\gamma x \gamma^{-1})(\gamma y \gamma^{-1}) - (\gamma y \gamma^{-1})(\gamma x \gamma^{-1}) = \gamma (xy - yx) \gamma^{-1} = F(x,y).$$

Proposition 6. La suite : $1 \to \mathbb{K}^* \to G_s \xrightarrow{p} Sp(n, \mathbb{K}) \to 1$ est exacte.

Le noyau de p est $\mathbb{K}^*$ car $C_s(F)_\ell$ est centrale et E engendre $C_s(F)$. p est surjective; en effet considérons la série formelle :

$$1 + ta^2 + \frac{t^2 (a^2)^2}{2!} + \dots t^n \frac{(a^2)^n}{n!} + \dots, \text{ notée } \exp(ta^2),\ t \in \mathbb{K},$$

dont l'inverse est $\exp(-ta^2)$. Un calcul algébrique montre que :

$$\exp ta^2 . x . \exp(-ta^2) = x - 2F(x, a)\, ta = x - t\,[x, a^2].$$

Selon [1] [4] tout élément de $Sp(n, \mathbb{K})$ est un produit fini de transvections symplectiques, et $x \to x - 2F(x, a)ta$ est précisément la transvection symplectique déterminée par $a \in E$ et $t \in \mathbb{K}$.

Soit $\gamma \in G_s$ et $K = \mathbb{C}$, prenons $\beta | E = i.\mathrm{Id}$, nous appellerons "norme" spinorielle symplectique le produit $\beta(\gamma)\gamma = N(\gamma)$.

Proposition 7. $N(\gamma) \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \to N(\gamma)$ est une représentation de G_s dans $\mathbb{C}^*$.

$$\text{Si } x' = \gamma x \gamma^{-1}, \ \beta(x') = ix' = i\beta(\gamma^{-1}) \ x \ \beta(\gamma)$$

$$\gamma^{-1} \ \beta(\gamma^{-1}) \ x \ \beta(\gamma)\gamma = x, \text{ donc } \beta(\gamma)\gamma \in \mathbb{C}^* \quad \text{(proposition 6)}$$

$$N(\gamma\gamma') = \beta(\gamma\gamma')\gamma\gamma' = \beta(\gamma') \ \beta(\gamma)\gamma\gamma' = N(\gamma) \ N(\gamma').$$

Considérons l'espace $E_{\mathbb{C}} = E'$ complexifié de E réel, et $C_s(F')$ complexifié de $C_S(F)$ identique à $C_S(F')$, F' complexifiée de F.

Nous appellerons groupe métaplectique (au sens de Leray [5]) et nous désignerons par $M_p(r)$ l'ensemble des éléments γ inversibles de $C_s(F')_\ell$ tels que :

$$\gamma x \gamma^{-1} \in E, \quad \forall x \in E \quad \text{et } |N(\gamma)| = 1,$$

de sorte que la suite :

$$1 \to S^1 \to M_p(r) \xrightarrow{p} Sp(2r, \mathbb{R}) \to 1, \text{ est exacte.}$$

Plus particulièrement : nous désignerons par $Sp_2(r)$ le sous-groupe de $M_p(r)$ constitué par des éléments γ avec

$N(\gamma) = 1$, de sorte que la suite :

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Sp_2(r) \to Sp(2r, \mathbb{R}) \to 1 \text{ est exacte.}$$

$Sp_2(r)$ est l'analogue d'un groupe spinoriel classique, mais ce n'est pas le revêtement universel de $Sp(2r, \mathbb{R})$ dont le groupe de Poincaré est $\mathbb{Z}$.

IV. Problèmes de revêtements.

E est réel, E' est son complexifié. Il est bien connu que l'on peut introduire sur E une métrique elliptique (,) et un opérateur $\mathbb{R}$-linéaire J, orthogonal pour cette métrique, tels que :

$J^2 = -1$, $(Jx, y) = F(x, y)$. J est aussi symplectique.

On sait qu'il existe une décomposition $E' = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$, en espaces complexes conjugués de bases respectives ε_α et ε_{α^*}, $\alpha=1...r$, avec : $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = (\varepsilon_{\alpha^*}, \varepsilon_{\beta^*}) = 0$, $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta^*}) = \delta_{\alpha\beta}$

$$F(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = F(\varepsilon_{\alpha^*}, \varepsilon_{\beta^*}) = 0, \quad F(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta^*}) = i\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$J|\mathcal{C}_1 = i\ \mathrm{Id}, \qquad J|\mathcal{C}_2 = -\,i\ \mathrm{Id},$$

les $e_\alpha = \dfrac{\varepsilon_{\alpha^*} + \varepsilon_\alpha}{\sqrt{2}}$, $e_{\alpha^*} = \dfrac{\varepsilon_{\alpha^*} - \varepsilon_\alpha}{i\sqrt{2}}$, constituent une base symplectique de E.

$U(r, \mathbb{C})$ est l'intersection 2 à 2 des groupes $Sp(2r, \mathbb{R})$, $SO(2r, \mathbb{R})$ et $GL(r, \mathbb{C})$.

<u>Proposition 8</u>. <u>$p \circ \exp\,(t \sum_\alpha \varepsilon_\alpha\, \varepsilon_{\alpha^*})$ induit $x \to e^{-it}.\,x$ sur $\mathcal{C}_1$ et $x \to e^{it}.x$ sur $\mathcal{C}_2$</u>.

On remarque que $\varepsilon_\alpha\, \varepsilon_{\alpha^*}$ commute avec $\varepsilon_\beta\, \varepsilon_{\beta^*}$, $\alpha \neq \beta$, et que

$$\exp\,(t \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha^*}) = \prod_\alpha \exp\,(t\, \varepsilon_\alpha\, \varepsilon_{\alpha^*})$$

Cela ramène à un espace de dimension 2, et à :

$$\exp(tab)a\, \exp(-tab) = e^{-it}\, a.$$

Il en résulte que $p \circ \exp\,(-\frac{\pi}{2} \Sigma\, \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha^*}) = J$.

<u>Proposition 9</u>. <u>$U(r, \mathbb{C})$ est dans l'image par p de l'ensemble des produits d'éléments de $Mp(r)$ de la forme</u>

<u>$\exp \lambda\ \ \exp(a^{\alpha\beta^*}\ \varepsilon_\alpha\, \varepsilon_{\beta^*})$, (sans sommation), $a^{\alpha\beta^*} \in \mathbb{C}$</u>

<u>et $a^{\alpha\beta^*} = \bar{a}^{\beta\alpha^*}$, $\lambda = -\,i\, \dfrac{\Sigma a^{\alpha\alpha^*}}{2}$</u>.

On exprime une condition de réalité, que $\varepsilon_\alpha\, \varepsilon_{\beta^*}$ commute avec $\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\, \varepsilon_{\alpha^*}$ et on utilise la proposition 8.

$Sp_2(r)$ peut être muni d'une structure de groupe de Lie par transport par image réciproque de la structure de $Sp(2r, \mathbb{R})$, séparant localement les deux nappes. L'exponentielle formelle s'identifie alors à celle de $Sp_2(r)$ pour les éléments de $\underline{Sp_2(r)}$, (les symboles soulignés correspondent à des algèbres de Lie).

<u>Proposition 10</u>. <u>$Sp_2(r)$ est un groupe topologique connexe, revêtement d'ordre 2 de $Sp(2r, \mathbb{R})$</u>.

On montre qu'on peut relier (-1) à 1 par un chemin continu dans $Sp_2(r)$.

$t \to \exp(-\frac{rit}{2}) \exp(t \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha^*}) = \alpha(t)$ est de norme spinorielle 1, c'est un chemin continu de $Sp_2(r)$, $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(2\pi) = \exp(-i\pi r) \exp(2\pi \sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha^*})$.

- Si r est impair, on déduit de la proposition 8 que $p_0\, \alpha(2\pi) = Id$, $\underline{\exp(2\pi \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha^*})} = 1$, $\alpha(2\pi) = -1$.
- Si r est pair, on raisonne par récurrence sur la dimension de E. $E = \widehat{E}_1 \oplus \widehat{E}_2$ en somme directe symplectique. On prend $\alpha_1(t)$ induisant l'identité sur $\widehat{E}_1$ et $\alpha_2(t)$ comme $\alpha(t)$ ci-dessus.

Il est possible d'introduire sur Mp(r) une structure de groupe de Lie, $Sp(2r, \mathbb{R})$ est isomorphe à Mp(r)/S1, donc Mp(r) est aussi connexe.

<u>Lemme</u>. Si $ad_u(x) = ux - xu$, $u \in C_S(F)$, $x \in E$, <u>pour que $ad_u(x) \in E$, $\forall x \in E$, il faut et il suffit que u soit la somme de termes de degré 0 et 2, ad_u est dans l'algèbre de Lie du groupe symplectique et $u \in (\mathbb{R} \oplus \overset{2}{\vee} E) \to \underline{Sp(n, \mathbb{R})}$ est surjective de noyau $\mathbb{R}$</u>.

La vérification est facile, les éléments $ad_{(e_i)^2}$, $ad_{(e_i e_j)}$, $i < j$, sont atteints, ils constituent une base de $\underline{Sp(2r, \mathbb{R})}$. On en déduit :

<u>Proposition 11</u>. <u>$\underline{Mp(r)}$ est une sous-algèbre de Lie de $C_s(F)$ munie du crochet $[u, v] = uv - vu$, qui admet pour base $(e_i)^2$,</u>

$e_i e_j$, 1, $(i < j)$, les (e_i) étant une base de E.

Sp$_2$(r) est l'algèbre quotient de Mp(r) par $\mathbb{R}$. λ étant la composante selon 1 :

Proposition 12. Les éléments de U(r, $\mathbb{C}$), s'identifient aux éléments $p \circ \exp \lambda \;\; \exp\,(a^{\alpha\beta^*}\varepsilon_\alpha\,\varepsilon_{\beta^*})$, $a^{\alpha\beta^*} \in \mathbb{C}$, $a^{\alpha\beta^*} = \bar{a}^{\beta\alpha^*}$

$$\lambda = -\, i\, \Sigma a^{\alpha\alpha^*}/2.$$

Il suffit de considérer $p \circ \exp\,(t\, \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*})$ et l'application tangente à l'identité.

Les revêtements d'ordre q du groupe symplectique.

On peut montrer que l'élément le plus général de Mp(r) s'écrit : $\exp i\,\theta \exp a^{\alpha\beta^*}\varepsilon_\alpha\,\varepsilon_{\beta^*} \exp u_2 \exp u_1$; $u_i \in \overset{2}{\vee} \mathcal{E}_i$, $\theta \in \mathbb{R}$; les éléments avec $\theta = -\dfrac{\Sigma a^{\alpha\alpha^*}}{q}$ constituent un sous-groupe Sp$_q$(r) qui est un revêtement non trivial d'ordre q du groupe symplectique, le noyau de la restriction de p à Sp$_q$(r) est l'ensemble des q éléments $\exp\,(\frac{2k\pi i}{q})$, $k \in \mathbb{Z}$. La connexité de Sp$_q$(r) s'établit comme celle de Sp$_2$(r).

On voit aisément comment on obtiendra le revêtement universel de Sp(n, $\mathbb{R}$) ($\Sigma a^{\alpha\alpha^*} / \theta$ rationnel).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN E. Geometric algebra - Interscience - New-York 1957.

[2] BOURBAKI N. Algèbre. Livre II. chapitre 9, Hermann Paris.

[3] CHEVALLEY C. The construction and study of important algebras (Math. Soc. Japan 1955).

[4] DIEUDONNE J. Sur les groupes classiques. Hermann Paris 1944.

[5] LERAY J. Solutions asymptotiques et groupe symplectique (Actes du colloque de Nice. Lectures notes Springer 1974).