SÉMINAIRE JEAN LERAY.
SUR LES ÉQUATIONS AUX
DÉRIVÉES PARTIELLES

PHAM THE LAI

Théorie spectrale d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés non nécessairement auto-adjoint

Séminaire Jean Leray, n° 3 (1974-1975), exp. n° 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___3_A7_0>

THÉORIE SPECTRALE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS NON NÉCESSAIREMENT AUTO-ADJOINT.

par PHAM THE LAI.

INTRODUCTION.

Nous donnons ici le résumé d'un travail qui va paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Il est essentiellement la suite de [10] dans lequel nous avons considéré une classe d'opérateurs différentiels d'ordre $2m$, auto-adjoints, elliptiques à l'intérieur, dégénérant à l'ordre m au bord d'un domaine Ω borné, très régulier de $\mathbb{R}^n$. Ces opérateurs constituent une généralisation, en dimension quelconque, de l'opérateur de Legendre $\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$ sur l'intervalle $[-1,1]$.

Dans [10], nous avons déterminé le comportement asymptotique des valeurs propres dans le cas $n=2$; le cas $n=1$ est résolu auparavant par M.S. Baouendi, C. Goulaouic dans [2].

Nous donnons ici le résultat correspondant lorsque $n>2$.

Dans cette direction, il n'y a pas de résultats connus dans le cas général d'un opérateur d'ordre $2m$. Dans le cas d'un opérateur auto-adjoint d'ordre 2, C. Nordin (cf. [8]) a résolu le problème pour l'opérateur $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad})$, φ étant une fonction $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant les propriétés :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) > 0\}$$

$$\Gamma = \text{ bord de } \Omega = \{ s \in \mathbb{R}^n ; \varphi(s) = C\}$$

$$\operatorname{grad} \varphi(S) \neq 0 \quad \text{pour} \quad S \in \Gamma$$

Auparavant, L. Boutet de Monvel, P. Grivard (cf.[6]) et J. Skimakura (cf. [11]) ont considéré le même opérateur avec Ω la boule unité et ont déterminé indépendamment le comportement asymptotique des valeurs propres à l'aide de la connaissance explicite de ces valeurs propres dans ce cas.

Toujours dans le cas d'un opérateur d'ordre 2, des généralisations sont étudiées par M. Guillemot (cf. [7]) et par L. Vulis, Z. Solomjak (cf. [12]) . Les méthodes utilisées par ces auteurs sont assez voisines et basées essentiellement sur le principe variationnel de R. Courant et sur le fait (exceptionnel), que pour l'ordre 2, il y a "séparation des variables". Elles ne semblent donc pas utilisables pour un opérateur d'ordre 2m quelconque.

Nous utilisons ici la méthode "indirecte" de S. Agmon (cf. [1]) .

Nous l'avons déjà utilisée dans [10] pour traiter le cas $n = 2$; dans ce cas, bien que l'équivalent de $N(\lambda)$ (le nombre de valeurs propres qui sont majorées par λ) soit donné en fonction d'une constante exprimée par une intégrale sur le bord de Ω, il est obtenu par une étude à l'intérieur de Ω. Dans ce sens, la méthode de résolution est analogue à celle des problèmes non dégénérés traités par S. Agmon ; de fait, cet équivalent de $N(\lambda)$ est le même pour toutes les réalisations de l'opérateur différentiel, comme dans le cas non dégénéré.

Lorsque $n > 2$, nous montrons ici que cet équivalent de $N(\lambda)$ est déterminé essentiellement par les données sur le bord de Ω ; il en résulte que pour deux réalisations distinctes de l'opérateur différentiel, les deux équivalents de $N(\lambda)$ sont distincts.

Nous traitons ici les réalisations de Neumann et de Dirichlet.

Nous remercions P. Bolley et J. Camus pour les nombreuses discussions que nous avons eues avec eux.

§ 1. - HYPOTHÈSES ET RÉSULTATS

Nous utilisons les notations classiques :

$$D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}\ ,\ i = \sqrt{-1}\ ,\quad j = (1,\dots,n)\ ,\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$$

$$\partial_t = -i\frac{\partial}{\partial t}$$

Pour m entier $\geq$ et k réel, nous considérons les espaces de Sobolev avec poids (cf. [3]):

$$H_m^k(\Omega) = \{\ u \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ \varphi^k D^\alpha u \in L_2(\Omega)\ ,\ \forall\ |\alpha| \leq m\ \}$$

Ces espaces sont munis des normes hilbertiennes naturelles notées $|\ |_{m:k;\Omega}$

On définit de manière analogue les espaces $H_m^k(R_+^n)$

Nous considérons une forme intégro-différentielle :

$$a(u,v) = \int_\Omega \varphi^m \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}\, D_u^\alpha\, \overline{D^\beta v}\, dx$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont des fonctions $\in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et notons $\mathcal{a}(.\,, D)$ l'opérateur différentiel d'ordre $2m$ associé à cette forme.

Il est clair que $a(u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H_m^{\frac{m}{2}}(\Omega)\times H_m^{\frac{m}{2}}(\Omega)$; comme on vérifie aisément que $H_m^{\frac{m}{2}}(\Omega)\hookrightarrow L_2(\Omega)$ avec une image dense, il est bien connu que ces données définissent un opérateur A, non borné dans $L_2(\Omega)$; A est une réalisation de $\mathcal{a}(.,D)$; nous dirons que A est la réalisation de Neumann de $\mathcal{a}(.,D)$, par analogie avec des problèmes non dégénérés.

Pour $s\in\Gamma$, notons :

T_s le sous espace vectoriel des vecteurs tangents, associé à l'hyperplan tangent en s à Γ.

S_{T_s} la sphère unité de T_s

$\nu_s = \dfrac{\operatorname{grad}\varphi(s)}{|\operatorname{grad}\varphi(s)|}$

Nous faisons les <u>hypothèses (H)</u> suivantes sur $a(u,v)$:

(i) Il existe une constante $C>0$ telle que l'on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x)\,\xi^{\alpha+\beta} \geq C\,|\xi|^{2m}$$

pour tout $x\in\Omega$ et $\xi\in\mathbb{R}^n$.

(ii) $$a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$$

pour tout $x\in\Omega$, α et β vérifiant $|\alpha| = |\beta| = m$

(les $\alpha_{\alpha\beta}(x)$ sont réelles en vertu de (i))

(iii) pour $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$, il existe une constante $C > 0$

telle que :

$$\int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)\,(\omega+\nu_s\partial_t)^\alpha u\,(\omega+\nu_s\partial_t)^\beta u\,dt \geqq C\,|u|^2_{m;\frac{m}{2};\mathbb{R}_+}$$

pour tout $u \in H_m^{\frac{m}{2}}(\mathbb{R}_+)$

Notons :

$$b_{\omega,s}(u,v) = \int_0^\infty t^m \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(s)\,(\omega+\nu_s\partial_t)^\alpha u\,\overline{(\omega+\nu_s\partial_t)^\beta v}\,dt$$

C'est une forme intégro-différentielle d'une variable, homogène, à coefficients constants. En notant $\mathcal{B}_{\omega,s}$ l'opérateur differentiel d'une variable d'ordre $2m$ associé à $b_{\omega,s}$, nous pouvons considérer $\beta_{\omega,s}$ la réalisation de Neumann de $\mathcal{B}_{\omega,s}$.

Nous avons alors les résultats suivants :

THEOREME 1.1. - Supposons que $n > 2$ et soit $a(u,v)$ la forme définie précidemment avec les hypothèses (H).

alors :

(1) Pour $s \in \Gamma$, $\omega \in S_{T_s}$, $\beta_{\omega,s}$ est auto-adjointe, strictement positive, à résolvante compacte.

(2) Si $(\mu_j(\omega,s))_{j\geqq 1}$ est la suite (*) des valeurs propres (réelles et positives) de $\beta_{\omega,s}$, rangé par ordre de valeur croissante et si nous notons :

(*) avec la convention habituelle : chaque valeur propre est répétée suivant sa multiplicité, qui est finie en vertu de la compacité de la résolvante.

$$\rho_j(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \mu_j(\omega,s)^{\frac{1-n}{m}} d\omega \quad (*)$$

la série $\sum_{j\geq 1} \rho_j(s)$ est convergente et la somme est une fonction bornée sur Γ.

THEOREME 1.2. - Avec la donnée et les hypothèses du théorème 1.1, soit A la réalisation de Neumann de $\mathcal{a}(.,D)$. Alors :

(1) La résolvante de A est compacte et pour tout θ vérifiant $0 < \theta < 2\pi$, $e^{i\theta}$ est une direction de croissante minimale de la résolvante (terminologie de S. Agmon)

(2) Si $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ est la suite des valeurs propres de A, rangée par ordre croissant des modules et si nous notons :

$$N(\lambda) = \sum_{\operatorname{Re}\lambda_j \leq \lambda} 1$$

$N(\lambda)$ vérifie la formule asymptotique :

$$N(\lambda) = \gamma \lambda^{\frac{n-1}{m}} + o(\lambda^{\frac{n-1}{m}}) \quad \lambda \to +\infty$$

avec γ la constante :

$$\gamma = (2\pi)^{1-n} \int_\Gamma |\operatorname{grad} \varphi(s)|^{1-n} \left[\sum_{j\geq 1} \rho_j(s) \right] ds \quad (**)$$

Remarque Si l'on note $\overset{o}{H}{}^k_m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^k_m(\Omega)$, l'opérateur $\overset{o}{A}$ engendré par le triplet $\{ \overset{o}{H}{}^{\frac{m}{2}}_m(\Omega), L_2(\Omega), a(u,v)\}$ est appelé la réalisation de Dirichlet de $\mathcal{a}(.,D)$

Pour $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$, soit $\overset{o}{\beta}_{\omega,s}$ la réalisation de Dirichlet de $\mathcal{B}_{\omega,s}$; alors $\overset{o}{\beta}_{\omega,s}$ a des propriétés analogues à $\beta_{\omega,s}$. En particulier, si $\{\overset{o}{\mu}_j(\omega,s)\}_{j\geq 1}$ est la suite des valeurs propres de $\overset{o}{\beta}_{\omega,s}$ et si nous notons :

(*) $d\omega$ est la mesure de surface ((n-2)-dimensionnelle) de la sphère S_{T_s}.

(**) ds est la mesure de surface ((n-1)-dimensionnelle du bord) Γ de Ω

$$\overset{\circ}{\rho}_j(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \overset{\circ}{\mu}_j(\omega,s)^{\frac{1-n}{m}} d\omega$$

la série $\sum_{j\geq 1} \overset{\circ}{\rho}_j(s)$ est convergente et la somme est une fonction bornée sur Γ.

Cependant, d'après [5], $\overset{\circ}{A}$ n'a pas les propriétés de régularité que possède A ; alors, moyennant une hypothèse supplèmentaire, nous avons un résultat analogue au théorème 1.2.

THEOREME 1.2'. - Avec la donnée et les hypothèses du théorème 1.2, supposons de plus que :

$$m > n.$$

Alors la réalisation de Dirichlet $\overset{\circ}{A}$ vérifie :

(1) La résolvante de $\overset{\circ}{A}$ est compacte et pour tout θ vérifiant $0 < \theta < 2\pi$, $e^{i\theta}$ est une direction de croissance minimale de la résolvante.

(2) Si $(\overset{\circ}{\lambda}_j)_{j\geq 1}$ est la suite des valeurs propres de $\overset{\circ}{A}$ et si nous notons :

$$\overset{\circ}{N}(\lambda) = \sum_{\mathrm{Re}\,\overset{\circ}{\lambda}_j \leq \lambda} 1$$

$\overset{\circ}{N}(\lambda)$ vérifie la formule asymptotique :

$$\overset{\circ}{N}(\lambda) = \overset{\circ}{\gamma}\, \lambda^{\frac{n-1}{m}} + o\,(\lambda^{\frac{n-1}{m}}) \qquad \lambda \to +\infty$$

avec $\overset{\circ}{\gamma}$ la constante :

$$\overset{\circ}{\gamma} = (2\pi)^{1-n} \int_{\Gamma} |\mathrm{grad}\,\varphi(s)|^{1-n} \Big[\sum_{j\geq 1} \overset{\circ}{\rho}_j(s)\Big]\, ds$$

§ 2. - NOYAU DE LA RESOLVANTE

Les résultats annoncés au § 1 s'obtiennent par une étude du noyau de la résolvante, la résolvante est un opérateur intégral avec un noyau d'Agmon continu et borné (cf [10]) lorsque $m > n$.

Nous faisons donc dans toute cette partie l'hypothèse :

$$(2.1) \qquad m > n > 2\,.$$

a - Le cas d'un opérateur homogène à coefficients constants dans un demi-espace.

Soit E^n_+ un demi-espace ouvert de $\mathbb{R}^n$, défini par son bord T et par un vecteur unitaire ν, normale intérieure à E_+^n.

Nous supposons que T est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et pour $x \in E_+^n$ nous notons $\delta(x) = \text{dist}(x,T)$. On définit les espaces $H_m^k(E_+^n)$ avec le poids $\delta(x)$.

Nous considérons ici une forme intégro-différentielle homogène :

$$c(u,v) = \int_{E_+^n} \delta(x)^m \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ |\beta| = m}} a_{\alpha\beta} \, D_u^\alpha \, \overline{D^\beta v} \, dx$$

avec $a_{\alpha\beta}$ constants

Nous notons $\mathcal{C}(.,D)$ l'opérateur différentiel associé et C la réalisation de Neumann de $\mathcal{C}(.,D)$ dans $L_2(E_+^n)$

Pour $\omega \in S_T$, la sphère unité de T, nous considérons la forme $b_\omega(u,v)$, l'opérateur $\mathcal{B}_\omega(.,\partial_t)$ associé et la réalisation de Neumann β_ω de $\mathcal{B}_\omega$ comme au § 1.

Nous avons le :

LEMME 2.1 - <u>Supposons qu'il existe</u> $C > 0$ <u>telle que</u> :

$$\text{(2.2)} \qquad \text{Re } c(u,u) \geq C \, |u|^2_{m:\frac{m}{2}\,;\,E_+^n} \quad \forall\, u \in H_m^{\frac{m}{2}}(E_+^n)$$

<u>Alors, pour</u> $\omega \in S_T$

(1) β_ω <u>est à résolvante compacte</u>

(2) <u>Si</u> $(\mu_j(\omega))_{j \geq 1}$ <u>est la suite des valeurs propres de</u> β_ω, <u>rangée par ordre de module croissant et si nous notons</u> :

$$\rho_j = \frac{1}{n-1} \int_{S_T} \mu_j(\omega)^{\frac{1-n}{m}} \, d\omega$$

<u>la série</u> $\sum_{j \geq 1} \rho_j$ <u>est absolument convergente.</u>

<u>(dans l'intégrale précédente, sachant que</u> $\text{Re } \mu_j(\omega) > 0$, <u>la puissance de</u> $\mu_j(\omega)$

correspond à la détermination holomorphe de μ^{α} , $\mu \notin \overline{R}_-$, qui est positive sur R_+)

On prouve ce lemme en utilisant le théorème du noyau établi dans [9] qui permet de montrer que la suite $(\mu_j(\omega))_{j \geq 1}$ a un comportement :

$$|\mu_j(\omega)^{-1}| \leq C\, j^{-m}$$

pour tout $\omega \in S_T$ et $j \geq 1$

Grâce à l'hypothèse (2.1), le noyau de la résolvante de C est continu et borné. Une transformation de Fourier partielle par rapport aux variables tangentielles permet d'exprimer le noyau en fonction des éléments "spectraux" de la réalisation de Neumann β_ω. C'est le :

THEOREME 2.2. - Sous les hypothèses (2.1) (2.2), nous avons :

(1) Pour $\lambda \geq 0$, $F_\lambda = (C+\lambda)^{-1}$ existe et est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon $F_\lambda(x,y)$ associé est continu et borné sur $E^n_+ \times E^n_+$

(2) Nous avons la formule :

$$\int_0^\infty F_\lambda(\nu t,\nu t)\, dt = (2\pi)^{1-n}\, \frac{\pi(n-1)}{m} \left(\sin \frac{\pi(n-1)}{m}\right)^{-1} \left[\sum_{j\geq 1} \rho_j\right] \lambda^{-1+\frac{n-1}{m}}$$

pour tout $\lambda > 0$.

(3) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_o > 0$ telle que :

$$\left| \int_0^\epsilon F_\lambda(\nu t,\nu t)\, dt - \int_0^\infty F_\lambda(\nu t,\nu t)\, dt \right| \leq C_\epsilon\, \lambda^{-1+\frac{n-1}{m}-\frac{n-2}{2m}}$$

pour tout $\lambda > 0$

b - Le cas général

Nous considérons ici la situation générale du § 1 ; nous avons noté A la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel $\mathcal{a}(.,D)$.

En vertu des hypothèses du § 1, il existe $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tel que l'opérateur $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$ existe pour tout $\lambda \geq \lambda_o$.

Grâce à l'hypothèse (2.1), G_λ est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon $G_\lambda (x,y)$ associé est continu et borné sur $\Omega \times \Omega$.

Sur tout compact inclus dans Ω, ce noyau a un comportement asymptotique bien connu (cf. [1] par exemple). Au voisinage de chaque point s du bord Γ, nous étudions ce noyau en le comparant à celui qui correspond à la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel homogène, à coefficients constants obtenu en prenant la partie homogène de degré $2m$ de $\mathcal{a}(.,D)$, les coefficients étant ceux de $\mathcal{a}(.,D)$, pris au point s. On utilise les résultats de la partie a et nous avons le :

THEOREME 2.3. - <u>Le noyau</u> $G_\lambda (x,y)$ <u>de</u> $G_\lambda = (A + \lambda)^{-1}$ <u>vérifie la formule asymptotique :</u>

$$\int_\Omega G_\lambda(x,x)\, dx = (2\pi)^{1-n} \frac{\pi(n-1)}{m} \left(\mathrm{Sin} \frac{\pi(n-1)}{m}\right)^{-1} \left(\int_\Gamma |\mathrm{grad}\, \varphi(s)|^{1-n} \Big[\sum_{j\geq 1} \varphi_j(s)\Big] ds\right)$$

$$\lambda^{-1+\frac{n-1}{m}} + O\left(\lambda^{-1+\frac{n-1}{m}}\right) \quad \lambda \to +\infty$$

c) - <u>Esquisse de la preuve du résultats du §1.</u> Le théorème 1.1. se prouve comme le lemme 2.1.

Lorsque $m > n$, on utilise le théorème 2.3 et un théorème taubérien classique donne la conclusion du théorème 1.2. Dans le cas contraire, on considère k entier tel que $km>n$ et on étudie A^k à la place de A, sachant que $\mathcal{D}(A^k) = H^{km}_{2km}(\Omega)$. On achève la preuve comme auparavant.

§ 3. - LE CAS D'OPÉRATEURS D'ORDRE DEUX (*)

a) - <u>L'opérateur -div (φ grad)</u>

Cet opérateur est étudié par C. Nordin dans [8]. La structure simple de cet opérateur permet de "séparer" les variables tangentielles de la variable normale et l'opérateur différentiel $\mathcal{B}_{\omega,s}(.,\partial_t)$ ne dépend ni de ω, ni de s.

(*) Il est prouvé dans [5] que $H^k_m(\Omega)$ coïncide avec $\overset{o}{H}{}^k_m(\Omega)$ lorsque $k \geq m - \frac{1}{2}$. Donc, pour la classe des opérateurs que nous étudions, la réalisation de Neumann coïncide avec la réalisation de Dirichlet pour les opérateurs d'ordre 2 puisque $H^{\frac{1}{2}}_1(\Omega) = \overset{o}{H}{}^{\frac{1}{2}}_1(\Omega)$

En effet, cet opérateur s'écrit, comme il est aisé de le voir :

$$\mathcal{B}_{s,\omega} = t + \partial_t \, t \, \partial_t$$

C'est donc l'opérateur de Laguerre. C'est un cas particulier d'une classe d'opérateur différentiel d'ordre 2 étudié par P. Bolley et J. Camus dans [4].

$$Lu = P^2 (\partial_t) (tu(t)) + P^1 (\partial_t) u(t)$$

où $P^2(\partial_t)$ et $P^1(\partial_t)$ sont des opérateurs différentiels à coefficients constants d'ordre ≤ 2 et ≤ 1 respectivement. En supposant que $P^2(\tau) \neq 0$ pour tout $\tau \in R$ et que les deux racines τ_+ et τ_- de $P^2(\tau) = 0$ vérifient $\operatorname{Im} \tau_+ > 0$ et $\operatorname{Im} \tau_- < 0$, les valeurs propres (*) de la réalisation de Neumann (ou de Dirichlet) de L sont données par les formules explicites :

$$\mu_j = P^1(\tau_+) - ij (\tau_+ - \tau_-) \quad j \geqq 1$$

Dans le cas de l'opérateur de Laguerre, nous avons :

$$\mu_j = 2j - 1 \qquad j \geqq 1$$

Comme on a, en notant V_{n-1} le volume de la boule de R^{n-1} :

$$\frac{1}{n-1} \int_{S_T} d\omega = V_{n-1}$$

le théorème 1.2 donne la formule asymptotique :

$$N(\lambda) = (2\pi)^{1-n} V_{n-1} \left[\sum_{j \geqq 1} \frac{1}{(2j-1)^{n-1}} \right] \cdot \left(\int_\Gamma |\operatorname{grad} \varphi(s)|^{1-n} ds \right) \lambda^{n-1}$$

$$+ o(\lambda^{n-1}) \qquad \lambda \to +\infty$$

C'est la formule donnée par C. Nordin

b) - Opérateur de second ordre général

Dans le cas présent, écrivons la forme $a(u,v)$ de la manière classique suivante :

(*) Ce calcul nous est communiqué par P. Bolley et J. Camus.

$$a(u,v) = \int_\Omega \varphi(x) \sum_{k,j=0}^{n} a_{kj}(x)\, D_k u\, \overline{D_j v}\, dx$$

Pour $x \in \overline{\Omega}$, notons $a(x)$ la matrice $(a_{kj}(x))_{k,j} : 1,\dots,n$

Par un changement de variable localement au voisinage de chaque point du bord Γ on se ramène au calcul de la partie a et on a le :

THEOREME 3.1. - Supposons que $n > 2$ et que $a(x)$ soit une matrice réelle symétrique, uniformément définie positive.

Alors, les conclusions du théorème 1.2 sont vérifiées pour $A = \overset{\circ}{A}$ et la constante γ est donnée par la formule :

$$\gamma = (2\pi)^{1-n}\, V_{n-1} \left[\sum_{j \geq 1} \frac{1}{(2j-1)^{n-1}} \right] \int_\Gamma \frac{\langle a(s)\nu_s, \nu_s\rangle^{1-\frac{n}{2}}\, ds}{|\mathrm{grad}\,\varphi(s)|^{n-1}\, (\mathrm{d\acute{e}t}\ a(s))^{\frac{1}{2}}}$$

Remarque. Le théorème 3.1, donne dans le cas auto-adjoint, un résultat de L. Vulis, Z. Solomjak [12]. Ces auteurs ont étudié, dans le cadre qui nous intéresse, le cas :

$$a(u,v) = \int_\Omega d(x) \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x)\, D_k u\, \overline{D_j v}\, dx + h \int_\Omega u \overline{v}\, dx$$

avec $d(x) = \mathrm{dist}\,(x,\Gamma)$

La formule du théorème 3.1 donne le résultat de [12] avec ici $|\mathrm{grad}\,\varphi| = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON - Lectures on Elliptic Boundary value Problems, Princeton Van Nostrand Mathematical Studies, (1965)

[2] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC - Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 34, (1969), p 361-379

[3] P. BOLLEY - J. CAMUS - Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids. Publications de l'Université de Rennes, (1969).

[4] P. BOLLEY, J. CAMUS - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable. J. Math. Pures Appl. vol. 51, (1972) p. 429-46..

[5] P. BOLLEY, J. CAMUS - Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels. C.R. Acad. Sc. Paris, t 278 (1974), p. 651-653.

[6] L. BOUTET de MONVEL, P. GRISVARD - Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur. C.R. Acad. Sc. Paris, t 272, (1971), p. 23-25.

[7] M. GUILLEMOT, TESSIER - Application des méthodes variationnelles à l'étude spectrale d'opérateurs dégénérés. C.R. Acad. Sc. Paris, t277, (1973), p. 739-742.

[8] C. NORDIN - The asymptotic distribution of eigenvalues of a degenerate elliptic operator. Arkiv för Mathematik, vol. 10, (1972) p. 3-21

[9] PHAM THE LAI - Noyaux d'Agmon. Séminaire Jean LERAY - Collège de France (1973).

[10] PHAM THE LAI - Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2. Séminaire Jean LERAY - Collège de France, (1973).

[11] J. SHIMAKURA - Quelques exemples des 3 fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés de second d'ordre. Proc. Japan Acad. Sc., vol. 46, (1970) p. 1065-1069.

[12] I.L. VULIS, M.Z. SOLOMJAK - Spectral asymptotics of degenerate elliptic operators. Soviet. Math. Dokl, vol 13, (1972), p. 1484-1488.