Séminaire Jean Leray.
Sur les équations aux dérivées partielles

Claude Bardos

Estimations hölderiennes pour l'équation d'Euler

Séminaire Jean Leray, nº 3 (1974-1975), exp. nº 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SJL_1974-1975___3_A8_0>

ESTIMATIONS HÖLDERIENNES
POUR L'EQUATION D'EULER.

par Claude BARDOS

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2,3$ en général), on note $\partial\Omega$ la frontière de Ω, ν la normale extérieure à Ω. Un couple (u,p) est dit solution de l'équation d'Euler dans $\Omega \times I$ (I intervalle de $\mathbb{R}$). S'il vérifie les équations :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = - \nabla p \, , \nabla u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times I \, , \, u.\nu_{|\partial\Omega \times I} = 0.$$

u est une fonction vectorielle, p une fonction scalaire définie à une constante près, $u(x,o) = u_o(x)$ est dite donnée initiale.

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation d'Euler pour une donnée initiale assez régulière a été étudiée, dans le cas d'un ouvert <u>borné</u> par de nombreux auteurs. On prouve en dimension deux que la solution est définie sur $\mathbb{R}^+$ et est aussi régulière que la donnée initiale c.f. Wolibner [13], Kato [8], Youdovich [14] et Bardos [2] pour des résultats de perturbation, Ebin et Marsden [5] et Foïas, Frisch et Teman [6] pour la régularité. En dimension trois on sait démontrer qu'il existe un temps $T(u_o)$ dépendant d'une norme convenable de ∇u_o, tel que sur l'intervalle $]-T(u_o), T(u_o)[$ la solution de l'équation d'Euler existe, soit unique et aussi régulière que la donnée initiale. Ce résultat a été prouvé pour la première fois par Lichtenstein [11], repris dans un cadre plus général par Ebin et Marsden [5], puis par Kato [8]. Dans tous ces articles il est essentiel d'estimer la norme uniforme de ∇u et cela peut se faire soit avec le Théorème de Sobolev c.f. Kato [8] soit en utilisant directement les espaces de Hölder c.f. Ebin et Marsden [5] § 12. Les espaces de Hölder permettent en fait d'obtenir des évaluations plus explicites, en particulier du temps $T(u_o)$. Ils permettent aussi de traiter le cas des données initiales sans décroissance à l'infini dans un ouvert non borné c.f. Bardos et Frisch [3].

On notera $C^{k,\alpha}(\Omega)$ les espaces de Hölder de fonctions scalaires ou vectorielles, $C^{k,\alpha}_{\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions Hölderiennes à divergence nulle dans Ω vérifiant $\nu.u|_{\partial\Omega} = 0$.

I ESTIMATIONS A PRIORI.

a) Le système $\nabla\wedge .$, $\nabla.$ est elliptique en particulier on a pour tout $u \in C^{1,\alpha}_{\alpha}(\Omega)$

$$(1) \qquad \| u \|_{1,\alpha} \leq \begin{cases} C(n,\Omega)\, \| \nabla\wedge u \|_{0,\alpha} & \text{si } \Omega \text{ est borné} \\ C(n,\Omega)\, (\| \nabla\wedge u \|_{0,\alpha} + \| u \|_{0,\alpha}) & \text{sinon} \end{cases}$$

de plus, pour tout couple $(x,y) \in \Omega\times\Omega$ on a :

$$(2) \qquad | u(x) - u(y) | \leq D(\Omega)\, | x-y |\, \mathrm{Log}\, \frac{Le}{| x-y |}\, \| \nabla\wedge u \|_0 .$$

(L diamètre de Ω, $e = \exp 1$)

b) Le premier membre de l'équation d'Euler est un terme de transport alors pour tout triplet u,v,g

Solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\nabla u = g, \qquad V.\nu\, |_{\partial\Omega\times]-T,T[} = 0$$

on a les majorations.

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\| u \|_0 \leq \| g \|_0 , \quad \frac{d}{dt}\| u \|_{0,\alpha} \leq \| g \|_{0,\alpha} + \| \nabla V \|_0\, \| u \|_{0,\alpha}$$

En prenant le rotationel de l'équation d'Euler on obtient l'équation .

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\wedge u) + u\nabla(\nabla\wedge u) = (\nabla\wedge u).\nabla u \qquad (= 0, \text{ si } n = 2)$$

on en déduit en utilisant (3)

$$(5) \qquad \| \nabla\wedge u \|_0 \leq \| \nabla\wedge u_0 \| \quad \text{si } n = 2 .$$

En utilisant (3), (4) et (1)

$$(6)\quad \frac{d}{dt}\|\nabla\wedge u\|_{o,\alpha} \leq \begin{cases} C(\Omega, n)\ \|\nabla\wedge u\|^2_{o,\alpha} & \text{si } \Omega \text{ est borné} \\ C(n)\ \{\ \|\nabla\wedge u\|^2_{o,\alpha} + \|u\|^2_{o,\alpha}\} & \text{sans hypothèse } \Omega \text{ borné.} \end{cases}$$

De l'équation (5) et de l'équation (2), Kato [7] déduit le résultat suivant :

THEOREME 1.

Toute solution régulière de l'équation d'Euler dans un ouvert borné en dimension deux vérifie la majoration :

$$(7)\qquad \|u\|_{1,\alpha(t)} \leq C\|\nabla\wedge u_o\|_{o,\alpha}\ (Le)^{\alpha(1-e^{-D\|\nabla\wedge u_o\|_o})t}$$

$$(\alpha\mid t) = \alpha e^{-tD\|\nabla\wedge u_o\|_o}$$

De l'équation 6 on déduit en comparant $\|\nabla\wedge u\|_{o,\alpha}$ avec la fonction

$$\|\nabla\wedge u_o\|_{o,\alpha}\ (1 - C(\Omega, n)\, t\, \|\nabla\wedge u_o\|_{o,\alpha})^{-1}$$

solution de l'équation

$$y' = C(\Omega,n)\, y^2, \quad y(o) = \|\nabla\wedge u_o\|_{o,\alpha} \quad \text{le}$$

THEOREME 2.

Soit u une fonction régulière solution de l'équation d'Euler dans un ouvert borné de R^n alors il existe un temps

$$T^* = 1/C(\Omega,n)\ \|\nabla\wedge u_o\|_{o,\alpha}$$

tel que sur l'intervalle $]-T^*, T^*[$ la fonction u vérifie la majoration :

$$(8)\qquad \|\nabla\wedge u\|_{o,\alpha} \leq \|\nabla\wedge u_o\|_{o,\alpha}\ (1 - C(\Omega,n)\,|t|\,\|\nabla\wedge u_o\|_{o,\alpha})^{-1}.$$

Dans le cas d'un ouvert non borné il faut contrôler le terme $\|u\|_{o,\alpha}$ de (6) aussi on utilisera une évolution de la pression dans l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u = -\nabla p$. Pour simplifier on se limite au cas $\Omega = \mathbb{R}^3$, le cas ou Ω est l'extérieur d'un ouvert borné se démontre de manière analogue. On remarque si u tend convenablement vers zéro on a:

$$-\nabla p = \nabla \left(\frac{1}{4\pi |x|} * \nabla . (u . \nabla u)\right) .$$

Pour séparer la contribution à distance finie et à l'infini de la convolution par $\nabla \left(\frac{1}{|x|}\right)$ on introduit une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de zéro
$(\tilde{\theta} = 1 - \theta)$
on écrit alors

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \left[\frac{\theta(x-y)}{|x-y|}\right] \nabla . (u \nabla u)(y)\, dy$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int \nabla \left[\frac{\tilde{\theta}(x-y)}{|x-y|}\right] \nabla . (u \nabla u)\ (y)\, dy.$$

Le point essentiel est de remarquer que le deuxième terme s'écrit :

$$\frac{1}{4\pi} \int \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{\theta}(x-y)}{|x-y|}\right) u_i\ (y)\ u_j\ (y)\, dy$$

il définit donc un opérateur continu quadratique de $C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.
On posera donc

$$F_\theta(u,u) = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \left[\frac{\theta(x-y)}{|x-y|}\right] \nabla\ (u \nabla u)\ (y)\, dy\, .$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tilde{\theta}(x-y)}{|x-y|}\right) u_i(y)\ u_j(y)\, dy.$$

On démontre (c.f Bardos, Frisch [3]) que l'opérateur ainsi défini est quadratique continu de $C_\sigma^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ dans $C_\sigma^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, qu'il est indépendant du choix de θ et qu'il existe une distribution p telle que $F\ (u,u) = \nabla p$. On a alors le

THEOREME 3.

<u>Soit</u> $u \in C^1\ (]-T, T[\ ;\ C_\sigma^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n))$ $(n = 2$ ou $3)$

<u>Solution de l'équation</u>

(9) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = F\ (u,u).$$

alors il existe deux constantes C et D telles que sur l'intervalle $-T^*, T^*$.

$$T^* = 1/C \|u_o\|_{1,\alpha}$$

telle que sur l'intervalle $]-T^*, T^*[$ (on suppose $T^* < T$) la solution de l'équation (9) vérifie la majoration :

$$\|u(.,t)\|_{1,\alpha} \leqq D\,(1-|t|\;C\,\|u_o\|_{1,\alpha})^{-1}\,\|u_o\|_{1,\alpha}.$$

Démonstration : Compte tenu de ce qui précéde elle est évidente. On écrit les relations :

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u\nabla u = F(u,u) \quad (\|F(u,u)\|_{o,\alpha} \leqq C\|u\|^2_{1,\alpha})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\wedge u) + u\nabla(\nabla\wedge u) = (\nabla\wedge u)\,.\,\nabla u\,.$$

Puis on utilise (1) (cas des ouverts non bornés) et (3) pour obtenir :

$$(10) \qquad \frac{d}{dt}\,(\|u\|_{o,\alpha} + \|\nabla\wedge u\|_{o,\alpha}) \leqq C\,(\|u\|_{o,\alpha} + \|\nabla\wedge u\|_{o,\alpha})^2.$$

II. EXISTENCE ET UNICITE DES SOLUTIONS .

Les solutions se construisent sans difficulté par des méthodes itératives.

a) Dans le cas d'un ouvert borné de R^n $(n = 2,3)$ en désignant par u^n la solution du problème :

$$(11) \qquad \frac{\partial u^n}{\partial t} + u^{n-1}\,\nabla u^n = -\nabla p\,,\ \nabla\,.\,u^n = 0,\ u^n\,.\,\nu\,|_{\partial\Omega\, X R} = 0,$$

$$u^n\,(x,o) = u_o\,(x)\,.$$

En procédant comme dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 on montre que les suites u^n satisfont des inégalités du même type, le passage à la limite est alors facile.

b) dans le cas d'un ouvert non borné il convient de remplacer l'équation (11) par l'équation.

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u^n}{\partial t} + u^{n-1}\, \nabla u^n = F\,(u^{n-1}, u^n)\ . \\ u^n \in C\,(\mathbb{R}+\ ,\ C^{1,\alpha}_{\sigma}\,(\Omega)\,) \end{cases}$$

Comme on prouve ainsi l'existence de solution assez régulière l'unicité ne présente pas de difficulté, sauf dans le cas d'un ouvert non borné. S'il est alors facile d'établir l'unicité de la solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = F(u,u)\ ,\ \nabla u = 0\ ,\ u \cdot \nu_{|\partial\Omega \times [0,T^*]} = 0$$

il n'est pas possible d'établir l'unicité de la solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = \nabla p\ ,\ \nabla u = 0\ , u \cdot \nu_{|\partial\Omega \times [\,0\ ,\ T^*\,]} = 0\ ,$$

car alors ∇p est déterminé à un vecteur constant $\xi\,(t)$ près : $\nabla p = F(u,u) + \xi(t)$. Cette remarque a conduit à particulariser l'équation et à ce limiter au cas ou $\nabla p = F(u,u)$.

III REGULARITE ET REMARQUES FINALES.

On trouve dans Ebin et Marsden [5] § 12 et dans Frisch, Foias et Teman [6] le résultat suivant .

THEOREME 4.

<u>Soit</u> $u \in C\,(o,T\ ;\ C^{1,\alpha}_{\sigma}(\Omega))$ <u>solution de l'équation d'Euler</u>.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = -\nabla p,\ u(x,o) = u_o(x)$$

alors si $u_o \in C^{k,\alpha}_{\sigma}(\Omega)$, $u \in C^k\,(o,T\ ;\ C^{1,\alpha}_{\sigma}\,(\Omega)\,)$.

Ce résultat se démontre facilement par récurrence en utilisant l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\nabla \wedge u) + u \nabla\,(\nabla \wedge u) = -\,(\nabla \wedge u)\ \nabla u$$

que l'on dérive k-1 fois. Il convient ensuite d'utiliser (3) et l'ellipticité.

Il convient de remarquer que l'estimation $|u|_{L^2(\Omega)}$ = cte valable pour toute fonction régulière solution de l'équation d'Euler n'a pas été utilisée ci dessus, de plus en dimension deux d'espace l'estimation $|\nabla \wedge u|_{L^\infty(\Omega)}$ = cte est suffisante pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible, c.f. Bardos [ ], elle est insuffisante pour prouver la régularité, il faut alors utiliser le théorème 1.

Le théorème 4 permet d'établir des majorations à priori pour les dérivées successives de u, ces majorations font apparaître des facteurs croissant très rapidement avec l'ordre de dérivation. Ceci laisse à supposer que la solution de l'équation d'Euler ne serait pas andytique ; c'est en fait ce qui se produit pour la solution de l'équation de Burger M.R.C.M. c.f. Penel [12] .

Enfin il convient de noter que pour l'ouvert non borné, on ne peut prouver, même en dimension deux d'espace que l'existence locale en temps de la solution, cela est du au facteur $\|u\|^2_{0,\alpha}$ apparaissant dans la majoration de $F(u,u)$.

APPENDICE .

On se propose de prouver ici les deux inégalités les plus importantes. Le premier résultat (1), (2) est classique. Il suffit de vérifier les hypothèses d'Agmon Douglis Nirenberg [1] ; pour avoir une inégalité du type :

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq C(n,\Omega)\ \{\|\nabla \wedge u\|_{0,\alpha} + \|u\|_{0,\alpha}\}\ ,$$

ici Ω n'intervient que par sa frontière. Ensuite pour montrer que si Ω est borné on a en fait

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq C(\Omega)\ \{\|\nabla \wedge u\|_{0,\alpha}\}\ ,$$

il suffit de montrer que $\nabla \wedge$ est injectif sur $C^{1,\alpha}_\sigma(\Omega)$. En effet si $u \in C^{1,\alpha}_\sigma(\Omega)$ et vérifie $\nabla \wedge u = 0$, il existe une fonction scalaire ψ telle que: $u = \nabla \psi$ (la condition $u\nu_{|\partial\Omega} = 0$ joue ici un rôle essentiel pour le cas d'ouverts non simplement connexe) c.f. Ladyzenskaia [9] ou Zerner [15]. On a alors, comme $\nabla . u = 0$ la relation : $\nabla \psi = 0\ , \frac{\partial \psi}{\partial u}_{|\partial\Omega} = 0$, et le résultat est évident. La formule (2) se démontre par des considérations analogues, en utilisant une représentation intégrale des solutions.

Prouvons les relations (2) et (3) . On introduit pour tout $x \in \Omega$ la fonction $x(t)$ solution de l'équation différentielle.

(13) $$x\,(t) = v(x(t),t), x(o) = x$$

On démontre Brézis et Bourguignon [4]. Lemme A.6, que si $v \in C\,(-T,T\,;\,C^{1,\alpha}_{\alpha}(\Omega))$ il existe une unique fonction $t \to x(t)$ continument différentiable de $-T\,,T$ à valeur dans Ω, solution de l'équation (13) l'application $x \to x(t)$ est une bijection de Ω sur Ω notée $x(t) = \mathcal{V}\,(t)x$; d'après le Théorème de Liouville elle conserve la mesure de Lebesgue. Soit $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ et $x(t)\,,\,y(t)$ les solutions correspondante de (13), on pose $\rho\;(t) = |\,x(t) - y(t)\,|$.

On a $\frac{\partial}{\partial t} u + \nabla u = \frac{d}{dt} u\,(x(t),t)$, on en déduit la relation :

La première des deux inégalités (3) est alors évidente, pour prouver la seconde on remarque que l'on a en utilisant la bijection $x \to x\,(t)$ la relation :

(14) $$\|u\|_{o,\alpha} = \|u\|_{o} + \sup_{x,y} \frac{|\,u(x(t),t) - u(y(t),t)\,|}{|x(t) - y(t)|^{\alpha}}\,.$$

En suite on écrit

(15) $$\frac{d}{dt}\left(\sup_{x,y} \frac{|\,u(x(t),t) - u(y(t),t)\,|}{|x(t) - y(t)|^{\alpha}}\right)$$

$$\leq \sup_{x,y} \left|\frac{d}{dt}\left(u\,(x(t),t) - u(y(t),t)\right)\rho\,(t)^{-\alpha}\right|$$

Comme u est solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + v\,\nabla u = g$ on en déduit la relation.

(16) $$\frac{d}{dt}\|u\|_{o,\alpha} \leq \|g\|_{o,\alpha} + \alpha\,|u(x(t),t - u(y(t)\,,t\,|\rho'(t)\rho(t)^{-(\alpha+1)}$$

Comme $x'(t) - y'(t) = \mathbf{v}\,(x(t)\,,t) - \mathbf{v}\,(y(t)\,,t)$ on termine la démonstration en utilisant le théorème des accroissements finis.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.AGMON, A. DOUGLIS et L. NIRENBERG - Estimates near the Boundary for solutions of elliptic partial differential equations .... Comm. Pure and App. Math. Vol. XVII (1964) 32 - 92

[2] C.BARDOS Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler J. of Math. Ann. and App. 40 p 769-790 (1972)

[3] C.BARDOS et U. FRISCH - A paraître.

[4] H.BREZIS et J.P BOURGUIGNON - Remarks of the Euler Equation . J. of Funct-Analysis.

[5] D.EBIN et J. MARSDEN - Groups of Difféomorphisms and the motion ot an incompressible fluid. Annals of Mathematics Vol 92 (1970) p. 102 - 163.

[6] U.FRISCH, C.FOIAS et R.TEMAM . Existence de solutions C^∞ des équations d'Euler C.R.A.S. t. 280 (24 fev. 1975) Série A. 505 - 508

[7] T. KATO - On classical solution of the two dimensional, non stationary Euler Equation Arch. for Rat. Mech. and Analysis 25 (3) (1967) 188 - 200

[8] T.KATO - Non Stationary flows of viscous and ideal fluids in R^3 J. of funct. Anal, 9 1972 296 - 305.

[9] O.A LADYZENSKAIA - The mathematical theory of viscous imcompressible flow Gordon and Breach New york 1969.

[10] J.LERAY - Mouvement plan illimité ... C.R.A.S. Tome 194 p. 1893 (1932).

[11] L.LICHTENSTEIN - Uber Einige Existenz problem der hydrodynamik ... Math. Z. 23 (1925). 89-154, 309-316 ; 26 (1927) 196-323 ; 28 (1928) 387-415, 32 (1930) 608-725.

[12] P. PENEL - Thèse à paraitre .

[13] W.WOLIBNER - Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait... Math. 2.37 (1933) 698-728.

[14] V.YOUDOVITCH- Non stationary flows ... Z. Vyasl. Mat. i. Fiz. (3) (1963) 1032-1066.

[15] M.ZERNER - Sur une inégalité de Poincaré, à paraitre.