SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

JOSETTE RENAUDIE

Théorie hexadimensionnelle du champ de certaines particules

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 2 (1958-1959), exp. nº 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1958-1959__2__A2_0>

6 décembre 1958

THÉORIE HEXADIMENSIONNELLE DU CHAMP DE CERTAINES PARTICULES

par Mlle Josette RENAUDIE

1. Introduction.

Dans la précédente conférence, Mr Y. THIRY a montré que l'on pouvait représenter le champ électromagnétique et le champ de gravitation par un seul tenseur, le tenseur métrique d'une variété riemannienne V_5 à 5 dimensions. La cinquième dimension est sans signification physique, mais la relation d'équivalence définie par un postulat de cylindricité entraîne l'existence d'une variété-quotient V_4.

Sur V_4 est définie une métrique riemannienne fonction de celle de V_5, qui permet d'identifier V_4 à l'espace-temps de la relativité générale. Les équations du champ sont de la même forme que celles de la relativité générale, soit

$$S_{\alpha\beta} = 0 \qquad [\alpha , \beta = 0 , 1 , \ldots , 4]$$

où $S_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'Einstein de V_5, dans le cas du vide. Elles se transforment, en les écrivant tensoriellement dans V_4, en une équation vectorielle généralisant les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, une équation $T_{IJ} = 0$ où T_{IJ} $(I , J = 1 , \ldots , 4)$, est le tenseur d'impulsion-énergie du champ, une équation scalaire $S_{00} = 0$ sans interprétation.

La trajectoire d'une particule du modèle fluide parfait, soumise à ce champ, est une géodésique de V_5 invariante par les isométries. Le principe des géodésiques, admis en relativité générale, est ainsi encore vérifié ici.

Nous allons montrer qu'en conservant toujours un schéma riemannien, mais sur une variété à une dimension de plus, soit V_6, nous pourrons définir par le tenseur métrique de V_6 le champ (A) d'une particule de spin maximum 1 couplé avec le champ de gravitation. Le champ (A) est formé de la superposition de plusieurs champs tensoriels qui ont été considérés par L. de BROGLIE [1] sans interaction pour simplifier la mise en équations, qui sont alors linéaires, et parce qu'aucun critère ne permettait de choisir parmi les différents termes d'interaction tensoriellement possibles. La mise en équations faite ici fera apparaître d'une manière naturelle ces termes d'interaction. Nous montrerons aussi que l'on peut conserver ici le principe des géodésiques. Enfin nous aurons, comme dans la théorie de Jordan-Thiry, une équation supplémantaire déterminant la variation d'un paramètre non interprété.

2. La variété riemannienne V_6.

Soit V_6 riemannienne hyperbolique normale, nous supposerons que dans V_6 existe une relation d'équivalence qui permette de définir, par passage au quotient, une variété riemannienne V_4 identifiée à l'espace-temps de la relativité générale.

Y. THIRY a supposé pour V_5 l'existence d'un groupe à un paramètre d'isométries globales par rapport auquel existait un système de coordonnées adaptées. Nous généraliserons ceci par l'hypothèse :

V_6 admet un groupe d'isométries abélien à 2 paramètres engendré par deux vecteurs de Killing $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}'$.

Soit

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 5$$

la métrique de V_6 dans laquelle l'indice 2 est l'indice de temps.

Le caractère abélien du groupe permet de choisir un repère naturel adapté aux isométries par rapport auquel

$$\vec{\xi} = (1, 0, \ldots, 0), \qquad \vec{\eta}' = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

en coordonnées contravariantes, et les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont fonctions des x^I seulement $[I = 2, \ldots, 5]$.

On a

$$\vec{\xi}^2 = -\xi^2 = \gamma_{00}\,; \qquad \vec{\eta}^2 = \gamma_{11}$$

Variété-quotient par le deux-groupe. - Considérons l'isométrie $\vec{\xi}$ et définissons une variété V_5, quotient de V_6, par la relation d'équivalence induite par l'isométrie. En coordonnées adaptées, un point de V_5 sera défini par

$$[x^1, \ldots, x^5] = [x^i] \qquad i, j = 1, \ldots, 5$$

Choisissons sur V_5 la métrique

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

telle que

$$d\sigma^2 = \gamma_{oo}(dx^o + \frac{\gamma_{oi}}{\gamma_{oo}} dx^i)^2 + ds^2 \ ; \quad g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{oi}\, \gamma_{oj}}{\gamma_{oo}}$$

(Celle introduite par Y. THIRY serait $\xi\, g_{ij}$).

L'isométrie $\vec{\eta}'$ induit dans V_5 une isométrie $\vec{\eta}$, $\vec{\eta} = [1 , 0 , \dots , 0]$ que l'on utilisera de même pour former V_4 , variété quotient de V_5 par la relation d'équivalence déterminée par $\vec{\eta}$, riemannienne par l'introduction de la métrique

$$d\ell^2 = h_{IJ}\, dx^I\, dx^J \qquad (I , J = 2 , \dots , 5)$$

$$h_{IJ} = g_{IJ} - \frac{g_{1I}\, g_{1J}}{g_{11}} \qquad ds^2 = g_{11}(dx^1 + \frac{g_{1I}}{g_{11}} dx^I)^2 + d\ell^2$$

Pour faire ceci nous avons choisi dans le 2-groupe deux isométries engendrées par deux vecteurs de Killing non colinéaires. Le tenseur métrique h_{IJ} ne dépend pas de ce choix, il pourrait donc être défini par descente directe de V_6 à V_4 à l'aide de la relation d'équivalence définie par le 2-groupe.

D'après les hypothèses faites, le champ des feuilles V_2 invariantes par le groupe d'isométrie est intégrable dans V_6 .

Tenseur d'Einstein de V_6. – Les équations du champ seront formées à partir du tenseur d'Einstein de V_6 . Nous calculerons les composantes de ce tenseur $S_{\alpha\beta}$ de V_6 par rapport à un repère orthonormé adapté

$$[d\sigma^2 = -(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 - \dots]$$

puis décomposerons ce tenseur en plusieurs tenseurs de V_4 . Ce sont :

$$\mathcal{S}_{IJ} \ ; \ \mathcal{S}_{Io} \ ; \ \mathcal{S}_{I1} \ ; \ \mathcal{S}_{oo} \ ; \ \mathcal{S}_{11} \ ; \ \mathcal{S}_{o1}$$

Posons :

$$\gamma_{oo} = -\xi^2 \ ; \quad g_{11} = -\eta^2$$

$$c = \frac{\gamma_{o1}}{\gamma_{oo}} \; ; \quad a_I = \frac{\gamma_{oI}}{\gamma_{oo}} \; ; \quad b_I = \frac{g_{1I}}{g_{11}}$$

$$\partial_I c = c_I \; ; \quad A_{IJ} = \partial_I a_J - \partial_J a_I \; ; \quad B_{IJ} = \partial_I b_J - \partial_J b_I$$

Les valeurs des $S_{\alpha\beta}$ sont, en notant ∇ la dérivation covariante dans V_4 et P_{IJ} le tenseur d'Einstein de V_4 :

$$S_{IJ} = P_{IJ} + \frac{\xi^2}{2}(A_I{}^L A_{JL} - \frac{1}{4} h_{IJ} A_{KL} A^{KL}) + \frac{\eta^2}{2} (B_I{}^L B_{JL} - \frac{1}{4} h_{IJ} B_{KL} B^{KL})$$

$$+ \frac{\xi^2}{2}(c_I c_J - \frac{1}{2} h_{IJ} c^K c_K) - \frac{1}{\eta}[\nabla_J(\partial_I \eta) - h_{IJ} \Delta\eta]$$

$$- \frac{1}{\xi}[\nabla_I(\partial_I \xi) - h_{IJ} \Delta \xi] + \frac{1}{\xi\eta} h_{IJ} \partial^K \xi \, \partial_K \eta$$

$$S_{Io} = - \frac{\xi}{2} \nabla_J A_I{}^J - \frac{\xi}{2} \frac{\partial^J \eta}{\eta} A_{IJ} - \frac{3}{2} A_{IJ} \partial^J \xi$$

$$S_{I1} = - \frac{\eta}{2} \nabla_J B_I{}^J + \frac{\xi^2}{2} A_{IJ} c^J - \frac{\eta}{2\xi} B_{IJ} \partial^J \xi - \frac{3}{2} B_I{}^J \partial_J \eta$$

$$S_{1o} = - \frac{\xi}{2} \nabla_J c^J + \frac{\xi\eta}{4} B_{IJ} A^{IJ} - \frac{3}{2} c^J \partial_J \xi$$

$$S_{oo} = \frac{3}{8} \xi^2 A_{IJ} A^{IJ} + \frac{\eta^2}{8} B_{IJ} B^{IJ} + \frac{\xi^2}{4} c^J c_J - \frac{1}{\eta} \Delta \eta$$

$$S_{11} = \frac{\xi^2}{8} A_{IJ} A^{IJ} + \frac{3\eta^2}{8} B_{IJ} B^{IJ} + \frac{\xi^2}{4} c^J c_J - \frac{1}{\xi} \Delta \xi$$

3. Champ de la particule de spin maximum 1, [1].

Les potentiels du champ sont :

$$\begin{cases} \varphi_I \quad \text{potentiel-vecteur complexe} = \overset{1}{\varphi}_I + i \overset{2}{\varphi}_I \\ \psi \quad \text{potentiel-scalaire complexe} = \overset{1}{\psi} + i \overset{2}{\psi} \end{cases}$$

(en coordonnées réelles).

Les équations sont, si $k_o = \frac{2\pi}{h} m_o c$ $(s = 1 , 2)$

$$\begin{cases} k_o \ \varphi_{IJ} = \partial_I \ \varphi_J - \partial_J \ \varphi_I \\ k_o \ \psi_I = \partial_I \psi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_o \ \overset{s}{\varphi}_{IJ} = \partial_I \ \overset{s}{\varphi}_J - \partial_J \ \overset{s}{\varphi}_I \\ k_o \ \overset{s}{\psi}_I = \partial_I \ \overset{s}{\psi} \end{cases}$$

qui expriment que le tenseur de champ φ_{IJ} est le rotationnel du vecteur φ_I et que ψ_I est le gradient de ψ et :

$$\begin{cases} \partial^I \ \varphi_{IJ} = k_o \ \varphi_J \\ \partial^I \ \psi_I = k_o \psi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \partial^I \ \overset{s}{\varphi}_{IJ} = k_o \ \overset{s}{\varphi}_J \\ \partial^I \ \overset{s}{\psi}_I = k_o \ \overset{s}{\psi} \end{cases}$$

Ces équations sont exprimées tensoriellement dans l'espace-temps de la relativité restreinte.

L'introduction de la gravitation se fait, d'après l'étude de la relativité générale en remplaçant ∂ par ∇ calculé à l'aide des h_{IJ} .

Le tenseur d'impulsion-énergie associé peut être déduit de son expression à l'aide des fonction d'onde

$$T_{IJ} = \sum_{s=1,2} \left\{ \left(\overset{s}{\varphi}_{IK} \ \overset{s}{\varphi}_J{}^K - \frac{1}{4} h_{IJ} \ \overset{s}{\varphi}_{KL} \ \overset{s}{\varphi}{}^{KL} \right) + \left(\overset{s}{\varphi}_I \ \overset{s}{\varphi}_J - \frac{1}{2} h_{IJ} \ \overset{s}{\varphi}_K \ \overset{s}{\varphi}{}^K \right) + \left(\overset{s}{\psi}_I \ \overset{s}{\psi}_I - \frac{1}{2} h_{IJ} \ \overset{s}{\psi}_K \ \overset{s}{\psi}{}^K \right) - h_{IJ} (\overset{s}{\psi})^2 \right\}$$

<u>Termes d'interaction</u>. - Si nous voulons préciser les équations du champ, pour l'instant linéaires, en leur ajoutant des termes non linéaires qui traduisent les interactions des champs en présence $(\overset{s}{\varphi}_I , \overset{s}{\psi})$, nous devrons toujours pouvoir le faire directement sur les équations complexes, i.e. si nous ajoutons séparément des termes aux premiers membres des équations scalaires réelles par exemple, ils devront être les partie réelle et coefficient de i d'une même expression scalaire complexe.

On pourrait par exemple ajouter à

$$\partial^I \ \overset{1}{\varphi}_I , \quad \overset{1}{\varphi}_{IJ} \ \overset{1}{\varphi}{}^{IJ} - \overset{2}{\varphi}_{IJ} \ \overset{2}{\varphi}{}^{IJ}$$

et à

$$\partial^I \ \overset{2}{\varphi}_I , \quad 2 \ \overset{1}{\varphi}_{IJ} \ \overset{2}{\varphi}{}^{IJ}$$

qui proviennent de

$$\varphi_{IJ}\ \varphi^{IJ}\ .$$

4. Ecriture des équations dans V_6 .

Choix des tenseurs de champ. - Nous cherchons à identifier les premiers membres des équations réelles du champ, le tenseur d'impulsion-énergie, avec des combinaisons linéaires des $S_{\alpha\beta}$, ceci par une identification convenable entre tenseurs de champ et tenseurs fonctions du tenseur métrique $\gamma_{\alpha\beta}$.

Pour ceci nous tiendrons compte des termes en dérivées secondes des potentiels et identifierons ainsi, à un facteur scalaire près A_{IJ} et $\overset{1}{\varphi}_{IJ}$, B_{IJ} et $\overset{2}{\varphi}_{IJ}$, c_I et $\overset{1}{\psi}_I$, une combinaison linéaire de $\partial_I \xi$ et $\partial_I \eta$ et $\overset{2}{\psi}_I$, puis nous étudierons les termes du second degré par rapport à l'ensemble des tenseurs, dans $S_{\alpha\beta}$.

Considérons d'abord

$$S_{oo} - S_{11} = \frac{1}{4}(\xi^2 A_{IJ} A^{IJ} - \eta^2 B_{IJ} B^{IJ}) + (\frac{1}{\xi}\Delta\xi - \frac{1}{\eta}\Delta\eta) + \dots$$

$$S_{1o} = \frac{\xi\eta}{4} B_{IJ} A^{IJ} - \frac{\xi}{2}\nabla_J c^J$$

Le dernier terme écrit dans $S_{oo} - S_{11}$ peut s'écrire

$$\nabla^I \partial_I \log(\frac{\xi}{\eta}) + \text{termes du 1er ordre en } \xi, \eta\ .$$

Il nous conduit à prendre

$$\overset{2}{\psi}_I = \frac{\partial_I \xi}{\xi} + \frac{\partial_I \eta}{\eta}$$

Puis, les termes en A , B de $S_{oo} - S_{11}$ et S_{1o} proviendront d'un même terme complexe $\varphi_{IJ}\ \varphi^{IJ}$ si l'on pose

$$\overset{1}{\varphi}_{IJ} = \xi A_{IJ} \qquad \overset{2}{\varphi}_{IJ} = \eta B_{IJ}$$

qui nous force ensuite à poser $\xi c^I = \overset{1}{\psi}{}^I$

[ceci n'aurait pas été possible si l'un des vecteurs de Killing était orienté dans le temps, car on aurait eu $+\eta^2$ au lieu de $-\eta^2$]. Les tenseurs géométriques à identifier aux tenseurs de champ sont alors parfaitement déterminés par cette étude alors que, dans la théorie de Y. THIRY, on avait pu choisir à posteriori le facteur par lequel il fallait multiplier F_{IJ} par des calculs de solutions approchées.

De plus, nous avons dans $S_{\alpha\beta}$ les termes d'interaction ; nous venons de mettre en évidence $\varphi_{IJ}\,\varphi^{IJ}$, on peut aussi mettre en évidence des termes analogues dans S_{Io} et S_{I1}.

<u>Seconds membres</u>. – Dans les équations, tensorielles dans R_4, nous avons des seconds membres différents de zéro, fonctions des potentiels des champs avec coefficient proportionnel à la masse propre de la particule. De même, nous aurons ici un second membre $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ dans $S_{\alpha\beta} = \mathcal{T}_{\alpha\beta}$ qui sera fonction uniquement des potentiels, le coefficient étant k_o.

Remarquons qu'il n'existe pas, pour le champ électromagnétique gravitationnel, de second membre dans V_5 mais que l'on suppose que la masse propre du photon est nulle, donc que le coefficient appelé ici k_o est nul.

Ici $\mathcal{T}_{IJ}$ devra contenir les termes en potentiel de T_{IJ}

$\mathcal{T}_{Is}$ s'identifiera à $k_o\,\overset{s}{\psi}_I$

$\mathcal{T}_{oo} - \mathcal{T}_{11}$ et $\mathcal{T}_{1o}$ et $k_o\,\overset{s}{\psi}$.

On peut exprimer $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ à l'aide de potentiels-vecteurs à 6 composantes :

$\overset{s}{\theta}_\alpha$: qui appartiennent aux V_2 généralisent $\overset{s}{\psi}$

$\overset{s}{\zeta}_\alpha$: qui généralisent $\overset{s}{\psi}_I$

Nous avons alors

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = \sum \left[U_\alpha\, U_\beta - \frac{1}{2}\,\gamma_{\alpha\beta}\, U_\rho\, U^\rho \right]$$

la somme étant étendue à $U_\alpha = \overset{s}{\theta}_\alpha$, $\overset{s}{\zeta}_\alpha$.

5. <u>Trajectoire d'une particule modèle fluide parfait.</u>

Prenons pour second membre

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = r\, u_\alpha\, u_\beta \qquad (r \text{ fonction de la masse})$$

Des conditions de conservation, on déduit que la trajectoire est une géodésique de V_6 invariante par le groupe d'isométries ; il y a deux intégrales premières du mouvement :

$$u_0 = h \quad ; \qquad u_1 = k$$

L'équation s'écrit dans V_4 sous la forme

$$u^I \nabla_I u_J = -\frac{h}{\xi} \overset{1}{\varphi}_{IJ} u^I - \lambda \overset{2}{\varphi}_{IJ} u^I - \mu \overset{1}{\psi}_J - \nu \overset{2}{\psi}_J + \alpha_J \rho$$

(λ, μ, ν, ρ fonctions de ξ et η)

$$\alpha_J = \partial_J(\xi \eta)$$

6. Paramètre surabondant.

Nous avons utilisé comme variable de champ ξ et η par la combinaison $\frac{\xi}{\eta}$; la quantité $\alpha_J = \partial_J(\xi \eta)$ peut ainsi être considérée comme variable sans interprétation, indépendante des champs. Sa variation serait régie par $S_{00} + S_{11}$.

$\xi \eta$ semble se comporter d'une manière analogue à un champ scalaire qui interagirait avec le champ (A) mais les théories physiques du champ ne permettent pas de lui donner d'interprétation précise. Remarquons cependant que le choix arbitraire des vecteurs de Killing dans V_2 peut entrainer l'existence d'un arbitraire dans les équations du champ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] de BROGLIE (Louis). - Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion), 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954.

[2] PODOLANSKI (P.). - Unified field theory in six dimensions, Proc. royal Soc., series A, t. 201, 1950, p. 234-260.

[3] RENAUDIE (Mlle J.). - Etude mathématique d'une théorie hexadimensionnelle du champ unifié, Bull. scient. Com. Trav. hist. et scient., t. 1, 1956, 2e partie : Mathématiques. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 ; p. 1-73 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).

[4] THIRY (Yves). - Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ, J. Math. pures et appl., série 9, t. 30, 1951, p. 275-396 (Thèse Sc. math. Paris. 1950).

[5] YANO (Kentaro) and OHGANE (Masayoshi). - On six-dimensional unified field theories, Rend. di Mat. e delle sue appl., Série 5, t. 13, 1955, p. 99-132.