

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

GEORGES REEB

Sur un théorème de Seifert sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 4 (1960-1961),
exp. n° 9, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1960-1961__4__A9_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉOREME DE SEIFERT
SUR LES TRAJECTOIRES FERMÉES DE CERTAINS CHAMPS DE VECTEURS

par Georges REEB

Introduction. - La situation suivante se présente dans de nombreuses questions de mécanique analytique classique [1].

Sur une variété compacte V_n (que l'on supposera orientée, munie d'une structure de variété différentiable de classe C_∞ et d'une structure d'espace de Riemann) est défini un champ de vecteurs E , de classe C_∞ , sans singularités, dont les trajectoires sont homéomorphes au cercle T et constituent les fibres d'une structure fibrée de V_n . La base de cette structure fibrée est alors une variété V_{n-1} de classe C_∞ , orientée et compacte. On se propose l'étude des trajectoires d'un champ $E + \Delta E$ obtenu par perturbation de E ; en fait ici on s'intéressera uniquement à l'étude de (certaines) trajectoires fermées. La petitesse de la perturbation sera mesurée, selon l'usage, par l'une des normes habituelles: les deux normes les plus intéressantes sont la norme habituelle (ou C_0 -norme) notée $\| \cdot \|_0$ et la norme qui porte sur les composantes et leurs dérivées appelée la C_1 -norme et notée $\| \cdot \|_1$. Il convient d'attirer tout de suite l'attention sur un point fondamental qui a souvent été mal compris.

La locution " ΔE est une petite perturbation" signifie $\| \Delta E \|_1 < \varepsilon$ ($i = 0$ ou 1), où $\varepsilon > 0$ et où ε ne dépend que du couple (V_n, E) . Dans la méthode classique du "petit paramètre" la notion d'une petite perturbation est tout à fait différente: une perturbation de la forme $\mu \Delta E$ (μ réel) est dite petite si $|\mu| < \varepsilon$ où ε dépend du triplet $(V_n, E, \Delta E)$.

En fait, nous nous intéressons ici à une classe particulière de trajectoires fermées: la classe des trajectoires simplement fermées ou, si l'on préfère, la classe des trajectoires qui se ferment après un tour. Cette notion est précisée par la construction naturelle mais utile que voici.

On définit dans V_n la famille de plaques $Q(x)$. La plaque $Q(x)$ est l'ensemble des points qu'il est possible de joindre au point x par un arc de géodésique orthogonal en x à $E(x)$ de longueur inférieure à l , $l > 0$ pour un l fixe convenable. Ces plaques sont homéomorphes à des cellules à $n - 1$ dimensions. Si la perturbation ΔE est petite, la trajectoire du champ perturbé $E + \Delta E$, issue de x , suit approximativement la fibre T_x contenant x et recoupe $Q(x)$ une

première fois en x' . On désigne par $V(x)$ le vecteur tangent en x à l'arc de géodésique orientée joignant x à x' et de longueur égale à la longueur de cet arc de géodésique.

Si ε est choisi convenablement, $V(x)$ est bien défini, et le champ de vecteurs $V(x)$ est continu. La trajectoire issue de x est dite simplement fermée si $V(x) = 0$. Les vecteurs $V(x)$ et $E(x)$ sont orthogonaux.

Il est quelquefois intéressant de considérer le cas où V_n est une variété à bord et où la perturbation ΔE vérifie l'hypothèse de "relaxation" $\%$ suggérée par la mécanique classique.

$\%$: le champ $V(x)$ est dirigé, en tout point du bord de V_n , vers l'intérieur de V_n .

On trouvera des exemples en [1].

Ici nous nous proposons de démontrer sous diverses hypothèses l'existence de trajectoires simplement fermées du champ perturbé. Le théorème le plus fin est certainement le théorème dû à SEIFERT [2] (cf. 1). La démonstration de ce théorème est délicate. Nous donnerons une démonstration plus directe de ce théorème, mais en substituant la C_1 -norme à la C_0 -norme. Notre démonstration offre l'avantage de pouvoir être transposée à certains cas où V_n est de dimension supérieure.

1. Examen de quelques cas particuliers.

Dans certains cas, l'existence d'au moins une trajectoire simplement fermée pour une petite perturbation (dans la C_0 -norme) est évidente.

Il convient de signaler tout d'abord le cas où la structure fibrée associée à (V_n, E) est triviale et où la caractéristique d'Euler Poincaré $\chi(V_{n-1})$ de l'espace de base est non nulle. L'existence de trajectoires simplement fermées résulte alors du théorème de points fixes de Lefschetz ; d'ailleurs ce théorème montre de plus que la somme des index des trajectoires simplement fermées (supposées isolées) est égale à $\chi(V_{n-1})$. Malheureusement le cas envisagé ne se présente guère dans les problèmes suggérés par la mécanique des systèmes conservatifs (l'invariant intégral d'Elie Cartan permet de le montrer).

Un deuxième cas intéressant correspond aux variétés V_n n'admettant pas deux champs de vecteurs linéairement indépendants : le champ V admet dans ce cas des points singuliers et, par conséquent, le champ perturbé admet au moins une trajectoire simplement fermée. Un exemple intéressant correspond au cas où V_n

est la sphère S_{4p+1} (p entier, $p > 0$) et où E admet, comme lignes intégrales, les fibres de la fibration classique de Hopf. De même, si

$$V_n = S_{4p+1} \times (0, 1) \quad ,$$

si E désigne le champ associé à la fibration de Hopf du facteur S_{4p+1} et si ΔE vérifie l'hypothèse de relaxation $\%$ énoncée dans l'introduction, on peut affirmer que le champ perturbé admet au moins une trajectoire simplement fermée. On remarque cependant que dans le cas envisagé nous n'avons aucun résultat sur les index des trajectoires simplement fermées.

Le cas des variétés à trois dimensions échappe aux remarques précédentes. Mais le théorème de Seifert affirme précisément :

Si $n = 3$ et si la base V_2 n'est pas le tore à deux dimensions, alors le champ perturbé admet au moins une trajectoire simplement fermée.

En fait le théorème de Seifert comporte un complément affirmant que la somme des index des trajectoires simplement fermées (supposées isolées) est égale à la caractéristique d'Euler Poincaré $\chi(V_2)$.

2. Examen du cas où $n = 3$.

Nous supposons à partir de maintenant $n = 3$; nous supposons également que le champ perturbé étudié n'admette pas de trajectoire simplement fermée (donc $V(x) \neq 0$ pour tout point x de V_3); notre but est évidemment d'aboutir sous certaines hypothèses à une contradiction, établissant ainsi l'existence d'au moins une trajectoire fermée.

A tout point x de V_3 associons l'entier $i(x)$ ainsi défini : soit p la projection canonique de V_3 sur la base V_2 ; l'entier $i(x)$ est la variation angulaire, divisée par 2π , du vecteur $p(V(y))$ lorsque y parcourt la fibre $T(x)$ contenant x dans le sens direct. L'entier $i(x)$ est indépendant de x , on le désignera simplement par I , ou éventuellement par $I(\Delta E)$ pour rappeler que I dépend de la perturbation ΔE .

On peut supposer la base V_2 triangulée; on distingue un simplexe à deux dimensions e_2 de cette triangulation et le complexe K obtenu en privant V_2 des points internes de e_2 . Le simplexe e_2 est muni de l'orientation induite par l'orientation de V_2 , et ∂e_2 désigne le bord de e_2 muni de l'orientation cohérente. La théorie de la construction d'une section de l'espace fibré V_3 montre :

(i) qu'il existe des sections f_1 et f_2 au-dessus de e_2 et K . (Donc f_1 et f_2 sont des applications continues de e_2 et K dans V_3 telles que pf_1 et pf_2 soient respectivement les applications identiques de e_2 et K .)

(ii) que $(f_1, \partial e_2)$ et $(f_2, \partial e_2)$ définissent de façon naturelle deux éléments α_1 et α_2 du groupe de Poincaré $\pi(T)$ de la fibre. La différence $i = \alpha_1 - \alpha_2$ est donc un entier rationnel ; cet entier i ne dépend pas du choix particulier des sections f_1 et f_2 , cet entier caractérise le premier obstacle de la structure fibrée.

Les champs de vecteurs V_1 et V_2 sur e_2 et K qui associent à $x \in e_2$ le vecteur $p(V(f_1(x)))$ et qui associent à $y \in K$ le vecteur $p(V(f_2(y)))$ ne se raccordent pas le long de ∂e_2 ; la somme S des index des singularités des champs V_1 et V_2 est nulle d'après l'hypothèse $V(x) \neq 0$. D'autre part il est clair, d'après la formule d'Euler-Poincaré pour les singularités d'un champ de vecteurs, que

$$S = \chi(V_2) + iI$$

donc

$$(1) \quad 0 = \chi(V_2) + iI \quad .$$

La démonstration (de la première partie) du théorème de Seifert résulterait donc de l'affirmation $I = 0$. En fait l'affirmation $I = 0$ constitue le lemme fondamental de l'article de SEIFERT. C'est également ce lemme fondamental que nous étudions dans la suite et que nous démontrons dans le cas d'une petite perturbation par rapport à la C_1 -norme.

Signalons une conséquence directe de la formule (1). Le cas $i = 0$ correspond à une structure fibrée triviale de V_3 et par conséquent nous laissons ce cas de côté. La formule (1) montre alors que l'absence de trajectoires simplement fermées implique : i est un diviseur de $\chi(V_2)$. (On rappelle que i ne dépend que de la structure fibrée de V_3 .) Si V_2 est la sphère à deux dimensions S_2 et si $i \neq 1$ et $i \neq 2$ (les cas $i = 1$ et $i = 2$ correspondent respectivement à $V_3 = S_3$ et $V_3 = p_3(\mathbb{R})$) alors le champ perturbé $E + \Delta E$, où ΔE est petit dans la C_1 -norme, admet au moins une trajectoire simplement fermée.

On observera que ce dernier résultat est sans objet puisque le théorème de Seifert le contient comme cas particulier ; mais ce résultat est obtenu par des

moyens élémentaires ; les raisonnements utilisés se transposent sans difficulté au cas où $V = V_3 \times (0, 1)$ et où le champ perturbateur ΔE vérifie l'hypothèse de relaxation énoncée dans l'introduction. Il n'en est pas de même des techniques de Seifert.

3. Étude du lemme fondamental ($I = 0$).

Dans le plan xOy les inégalités

$$|y| \leq 0,9, \quad |y| \leq 1 \quad \text{et} \quad |y| \leq 1,1$$

définissent trois bandes emboîtées $D'DD''$. Nous étudions un homéomorphisme φ de D dans D'' vérifiant, pour tout point m , les propriétés suivantes :

- (i) $\varphi(m + e) = \varphi(m) + e$ où e est le vecteur $(1, 0)$;
- (ii) $\|\varphi(m) - m\| < 0,1$;
- (iii) $\varphi(m) \neq m$.

Cet homéomorphisme φ est compatible avec la relation d'équivalence ρ engendrée par le groupe des translations de vecteurs ne (n entier) ; l'homéomorphisme φ vérifie l'inclusion $\varphi(D) \supset D'$. Par passage au quotient selon la relation d'équivalence ρ , l'homéomorphisme φ définit un homéomorphisme d'une couronne circulaire dans une couronne circulaire un peu plus grande.

La construction, classique, suivante associe à φ un entier rationnel $I(\varphi)$; faisons décrire au point m le segment ℓ d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité $(1, 0)$ et soit $U(m)$ le vecteur $\varphi(m) - m$. Au segment ℓ correspond dans l'espace quotient un chemin fermé qui représente un générateur du groupe de Poincaré. L'entier $I(\varphi)$ est la variation angulaire, divisée par 2π , du vecteur $U(m)$ lorsque m décrit le segment ℓ .

Considérons maintenant un deuxième exemplaire des bandes emboîtées $D'DD''$ et un homéomorphisme ψ de D dans D'' vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) imposées à φ ; soit $I(\psi)$ l'entier associé à ψ .

Supposons de plus qu'il existe un homéomorphisme Φ du rectangle fondamental $0 \leq x \leq 1$ de D dans D'' vérifiant les propriétés suivantes :

- (α) $\|\Phi(m) - m\| \leq 0,1$
- (β) $\varphi(m) = \Phi^{-1} \psi \Phi(m)$ (modulo $e = (0, 1)$).

En d'autres termes, Φ transporte l'homéomorphisme φ sur l'homéomorphisme ψ . Nous affirmons que le lemme fondamental du paragraphe précédent est une conséquence de l'égalité :

$$(1) \quad I(\varphi) = I(\psi) \quad .$$

Cette implication sera établie au paragraphe 4.

Il est probable que l'égalité (1) soit susceptible d'une démonstration géométrique simple, mais je ne suis pas capable d'indiquer une telle démonstration. Par contre l'égalité (1) est évidente si, en plus des conditions α et β , on impose à Φ la condition γ , qui exprime la petitesse des dérivées partielles de Φ :

$$(\gamma) \quad \|\Phi\|_1 < \varepsilon' \quad \text{pour un } \varepsilon' \quad (\varepsilon' > 0) \quad \text{convenable}.$$

4. L'égalité $I(\varphi) = I(\psi)$ implique $I = 0$.

Pour établir le lemme $I = 0$, il suffit de se restreindre au cas où V_3 est la variété (à bord) $V_3 = B_2 \times T$, où T est le cercle trigonométrique et B_2 le disque plan défini par $x^2 + y^2 \leq 2$; le champ E a pour composantes $(0, 0, 1)$. Mieux encore, il suffit de considérer le cas où $V_3 = \Gamma_2 \times T$; ici Γ_2 est la couronne circulaire définie par l'inégalité $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Le champ V ne sera évidemment défini que pour les points d'un sous-espace $\Gamma_2' \times T$ de $\Gamma_2 \times T$, où Γ_2' est la couronne définie par les inégalités $1, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 1,9$. Dans l'espace $\Gamma_2 \times T$, nous construisons deux sections h_1 et h_2 :

(i) h_1 est la section droite $h_1 : (x, y) \rightarrow (x, y, 0)$;

(ii) h_2 décrit un tour autour de la fibre T , elle est définie par

$$h_2 : (x, y) \rightarrow (x, y, \theta(x, y))$$

où $\theta(x, y)$ est l'argument de (x, y) .

Les deux sections h_1 et h_2 peuvent être envisagées comme des applications du recouvrement universel D (cf. 3) de Γ_2 dans $\Gamma_2 \times T$; on peut même supposer que D est appliqué par h_1 et h_2 au-dessus de Γ_2 . Nous définissons maintenant deux homéomorphismes φ et ψ dans Γ_2 , ou (ce qui revient au même) dans D , par la construction suivante :

Au point m de Γ_2' faisons correspondre le point m_i de la section h_i ($i = 1$ ou 2) qui recouvre m ; la trajectoire du champ perturbé $E + \Delta E$,

issue de m_i , recoupe la section h_i une première fois en m_i' , le point m_i' se projette en $p(m_i') = m_i''$. Le point m_i'' est précisément $\varphi(m)$ si $i = 1$ et $\psi(m)$ si $i = 2$. Il est clair que φ et ψ vérifient les propriétés (i), (ii) et (iii) requises en 3; la propriété (iii) résulte de l'hypothèse $V(x) \neq 0$ pour tout x .

Il reste à voir que φ et ψ sont bien reliés par un homéomorphisme Φ vérifiant les propriétés (α) et (β) de 3. A cet effet il convient d'étudier le rectangle fondamental Q de D .

Si m_0 est le point de Q de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$, on désignera par $m_0' = \Phi(m_0)$ la projection $p(\mu')$ du premier point de rencontre μ' de $h_2(Q)$ avec la trajectoire de $E + \Delta E$, issue de $\mu \in h_1(Q)$. La correspondance $m \rightarrow \mu'$ peut être étendue de façon continue à Q de telle sorte que μ et μ' appartiennent à la même trajectoire; cette correspondance définit l'homéomorphisme Φ qui remplit les conditions requises.

Concluons en remarquant que si la perturbation ΔE est faible, dans la C_1 -norme, alors Φ vérifie la condition (γ) du paragraphe 3; ce qui établit la version du théorème de Seifert obtenue en remplaçant la C_0 -norme par la C_1 -norme.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] REEB (Georges). -- Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, Acad. royale Belg., Mém. Cl. Sc., 2e série, t. 27, 1952, n° 9, 64 p.
- [2] SEIFERT (Herbert). -- Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 287-302.