Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Jules Geheniau

Sur les complexes d'impulsion-énergie

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 5 (1961-1962), exp. nº 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1961-1962__5__A6_0>

SUR LES COMPLEXES D'IMPULSION-ÉNERGIE

par Jules GEHENIAU

Le problème de l'énergie de gravitation a été abordé de diverses manières. La première, celle d'EINSTEIN, s'inspire directement de la théorie du champ é. m. dans l'espace-temps de Minkowski, où les densités et les flux d'énergie et d'impulsion sont définis par un tenseur de rang 2 , le tenseur d'énergie-impulsion électromagnétique. On cherche à construire, à l'aide du champ de gravitation, une grandeur à 2 indices qui remplit certaines conditions destinées à lui donner, autant que possible, les caractères d'un tenseur d'énergie-impulsion.

Une telle grandeur, qui soit un tenseur de l'espace-temps riemannien, n'existe pas. On a donné le nom de "complexe" aux grandeurs cherchées, qui satisfont donc à des conditions tensorielles restreintes.

Les complexes d'énergie-impulsion, dont je parlerai ici, sont des complexes "canoniques", c'est-à-dire des complexes T_i^k dont la composante T_4^4 est une fonction hamiltonienne. Les identités ci-dessous les rattachent directement à la fonction lagrangienne dont dérivent les équations d'Einstein.

Soit F une densité fonction de tenseurs de composantes y^A , de leurs dérivées premières et secondes $y^A_{,i}$, $y^A_{,ik}$ par rapport aux coordonnées x^i , x^k .

A la transformation infinitésimale des x ,

$$\delta x^i = X^i(X) \qquad ,$$

correspond la transformation infinitésimale des y

$$\delta y^A = C_i^{Ak} X^i_{,k} \qquad .$$

Les C_i^{Ak} sont les composantes d'un tenseur déterminé par la variance de y .

De l'hypothèse

$$\delta F + F X^i_{,i} = 0$$

résulte que F satisfait à des identités parmi lesquelles

(1) $$- C^{\Lambda k}_{i} \frac{\delta F}{\delta y^{\Lambda}} + y^{\Lambda}_{,i} \frac{\delta F}{\delta y^{\Lambda}_{,k}} + y^{\Lambda}_{,i\ell} \frac{\partial F}{\partial y^{\Lambda}_{,k\ell}} - F\, \delta^{k}_{i} = \chi^{k\ell}_{i,\ell}$$

où

(2) $$2\chi^{k\ell}_{i} = r^{k\ell}_{i} - r^{\ell k}_{i} - \frac{1}{3} (F^{k\ell m}_{i} - F^{\ell km}_{I})_{,m} = - 2\chi^{\ell k}_{i} \quad ,$$

$$r^{k\ell}_{i} = C^{\Lambda k}_{i} \frac{\delta F}{\delta y^{\Lambda}_{,\ell}} + C^{\Lambda k}_{i,m} \frac{\partial F}{\partial y^{\Lambda}_{,\ell m}} - y^{\Lambda}_{,i} \frac{\partial F}{\partial y^{\Lambda}_{,k\ell}} \quad ,$$

$$F^{k\ell m}_{i} = C^{\Lambda k}_{i} \frac{\partial F}{\partial y^{\Lambda}_{,\ell m}} \quad .$$

Les premiers membres de (1) définissent un complexe d'énergie-impulsion $T^{k}_{i}(F)$, si F est une fonction lagrangienne dont dérivent les équations d'Einstein ; les y^{Λ} sont alors les composantes du champ de gravitation.

De (1), on tire l'équation de conservation

(3) $$T^{k}_{i,k} = 0 \,.$$

Il est aussi immédiat que

(4) $$T^{k}_{i} = \text{densité tensorielle affine} \quad .$$

On peut démontrer en outre [1],

(5) $$T^{4}_{4} = \text{densité}$$

$$T^{\alpha}_{4} = \text{densité contravariante} \quad (\alpha = 1 , 2 , 3)$$

pour les changements quelconques des coordonnées d'espace x^1 , x^2 , x^3 .

A noter que, pour (1), il suffit que F soit une densité pour les transformations linéaires des x .

Le premier complexe de Møller est $T^{k}_{i}(R)$ où R est la densité de courbure gaussienne.

Le complexe d'Einstein est $T_i^k(L)$ où L est la fonction du tenseur métrique g_{ik} et de ses dérivées premières qui figure dans la décomposition,

(6) $$R = L + \text{divergence} \quad .$$

La fonction lagrangienne L n'est plus une densité pour les changements quelconques des coordonnées, mais elle reste une densité pour les transformations affines. L'identité (1) est donc satisfaite par L, mais $T_4^i(L)$ perd la propriété (5).

En revanche, pour les systèmes fermés,

(7) $$P_i = \int_{x^4 = Cte} T_i^4 \, d^3 x = \text{vecteur covariant} \quad ,$$

pour les transformations linéaires. Il peut donc définir l'énergie et l'impulsion totale du système à l'instant x^4.

Le complexe de Møller $T_i^k(R)$ ne possède pas cette propriété. Le problème résolu récemment par MØLLER [2] consiste à trouver un complexe $T_i^k(\hat{L})$ qui possède cette propriété en même temps que (5). Pour ce faire, il a dû utiliser des champs de tétrapodes.

Un champ de tétrapodes est défini par quatre champs de vecteurs $\underset{a}{h}{}^i$ $(a = 1, \ldots, 4)$ linéairement indépendants. Par hypothèse leurs produits scalaires

(8) $$\underset{a}{h}{}_i \, \underset{b}{h}{}^i = N_{ab}$$

sont des constantes. Celles-ci et leurs mineurs normés servent à élever et abaisser les indices a, b, ...

De (8), on tire que

(8') $$\underset{a}{h}{}_i \, \overset{a}{h}{}_k = g_{ik} \quad .$$

On a aussi, avec les notations $h = \det \underset{a}{h}{}_i$ et $g = \det g_{ik}$,

$$h = \sqrt{-g} \quad .$$

La densité de courbure peut être exprimée en fonction des $\underset{a}{h}^{i}$ et de leurs dérivées covariantes (désignées par un point-virgule).

De plus

$$R = \hat{L} + \text{divergence}$$

où

$$\hat{L} = h(\underset{a}{h}^{r}{}_{;s}\, \overset{a}{h}{}^{s}{}_{;r} - \underset{a}{h}^{r}{}_{;r}\, \overset{a}{h}{}^{s}{}_{;s}) \tag{9}$$

est une densité pour les changements quelconques de coordonnées. C'est une nouvelle fonction lagrangienne qui fournit par variation des $\underset{a}{h}_{i}$ des équations équivalentes aux équations d'Einstein. De plus, $T_i^k(\hat{L})$ satisfait à tous les critères (3), (4), (5) et (7) qui, selon MØLLER, permettent de le considérer comme complexe d'énergie-impulsion.

Cependant un nouveau problème se présente. Le complexe $T_i^k(\hat{L})$ n'est pas entièrement déterminé par le tenseur métrique. Il dépend explicitement du champ de tétrapodes. La fonction (9) est bien invariante pour les rotations de Lorentz

$$\underset{a}{\chi}^{i} = {}_{a}\Omega^{b}\, \underset{b}{h}^{i} \tag{10}$$

lorsque les coefficients de la rotation sont des constantes, mais elle ne l'est plus si ces coefficients dépendent des x. Il faut donc imposer des conditions aux tétrapodes. Dans ce but, il convient d'introduire quelques propriétés d'un espace riemannien, muni d'un champ de tétrapodes déterminé (aux rotations (10) près à coefficients constants).

On peut définir dans ces espaces un "parallélisme absolu" : deux vecteurs situés en des points différents sont dits égaux (absolument égaux) si leurs composantes sont égales dans les tétrapodes attachés à ces points.

Soient $\overset{b}{A}(x)$ les composantes du vecteur A dans le tétrapode en x, $A^{i}(x)$ ses composantes dans le repère naturel en x. Par déplacement parallèle absolu, les composantes $\overset{b}{A}$ conservent leurs valeurs :

$$d_a \overset{b}{A} = 0$$

d'où

$$d_a A^i + A^k \Delta^i_{k\ell}\, dx^\ell = 0 \qquad ,$$

avec

(11) $$\Delta^i_{k\ell} = - \underset{a}{h}{}^i \overset{a}{h}_{k,\ell} \qquad ,$$

et la nouvelle dérivée covariante

(12) $$A^i{}_{/k} = A^i{}_{,k} + A^r \Delta^i_{rk} \qquad .$$

De la définition même

$$\underset{a}{h}{}^i{}_{/k} = 0 \, , \qquad \underset{a}{h}{}_{i/k} = 0 \qquad .$$

De

$$\underset{a}{h}{}_{k;\ell} = \underset{a}{h}{}_{k,\ell} - \underset{a}{h}{}_r \Gamma^r_{k\ell} \qquad ,$$

on tire l'expression de Δ ,

(13) $$\Delta^r_{k\ell} = \Gamma^r_{k\ell} + \gamma^r_{k\ell} \qquad ,$$

en fonction des symboles de Christoffel, et des composantes

(14) $$\gamma^r_{k\ell} = g^{ri} \gamma_{ik\ell} \, , \qquad \gamma_{ik\ell} = \overset{a}{h}_i \underset{a}{h}{}_{k;\ell}$$

des coefficients de rotation de Ricci dans le repère naturel.

La partie antisymétrique de Δ ,

(15) $$\frac{1}{2} (\Delta^i_{k\ell} - \Delta^i_{\ell k}) = \frac{1}{2} (\gamma^i_{k\ell} - \gamma^i_{\ell k}) \qquad ,$$

est un tenseur qui a une signification géométrique simple : c'est un tenseur de "torsion".

Si cette torsion est nulle,

$$\overset{a}{h}_k = \overset{a}{\varphi}_{,k} \quad \text{avec} \quad g^{k\ell}\, \overset{a}{\varphi}_{,k}\, \underset{b}{\varphi}_{,\ell} = \delta^a_b \qquad .$$

Il en résulte que

$$\Gamma_{k\ell m} = \overset{a}{\varphi}_{,k\ell}\, \underset{a}{\varphi}_{,m}$$

et

$$\overset{a}{h}_{i;j} = 0 \qquad .$$

Le tenseur de Riemann est nul,

$$R_{ik\ell m} = 0 \qquad ,$$

et il en est de même du complexe

$$T^k_i(\hat{L}) = 0$$

quel que soit le système de coordonnées.

Cela se voit directement sur

$$\text{(16)} \qquad X^{k\ell}_i(\hat{L}) = h\big(\underset{a}{h}^k\, \overset{a}{h}^{\ell}_{;i} + (\delta^k_i\, \overset{a}{h}^{\ell} - \delta^{\ell}_i\, \overset{a}{h}^{k})\, \underset{a}{h}^{s}_{;s}\big) \qquad .$$

Pour découvrir la solution du problème posé, la détermination du champ de tétrapodes, il conviendrait d'étudier spécialement les espace-temps riemanniens où des champs de tétrapodes s'imposent de manière géométrique. Il est naturel de penser que ce sont ces tétrapodes qui doivent figurer dans le complexe d'énergie-impulsion.

Un exemple simple est celui du <u>champ statique à symétrie sphérique</u>. L'un des vecteurs se place naturellement suivant l'axe des temps. Le choix des trois autres doit respecter les symétries du champ. Cette règle interdit de prendre des axes tangents aux lignes de coordonnées sphériques $(r\ ,\ \theta\ ,\ \varphi)$ parce qu'elles introduisent un axe polaire. Un tripode conforme à la règle est celui formé du vecteur radial et des deux vecteurs isotropes du plan perpendiculaire à ce vecteur radial. On peut prendre aussi, c'est ce que fait MØLLER, un tripode tangent aux lignes de coordonnées "isotropiques", pour lesquelles

$$ds^2 = a(r)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - b(r)\ dt^2 \tag{17}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad .$$

Le complexe de Møller pour ces tétrapodes est égal au complexe d'Einstein en coordonnées isotropiques ; le premier est un tenseur d'espace mais dépend des tétrapodes, le second n'est pas un tenseur d'espace mais il est indépendant des tétrapodes. Rappelons que $T_4^4(L)$ fournit l'énergie totale correcte d'un système fermé ; il en est donc de même de $T_4^4(\hat{L})$.

Ces résultats sont satisfaisants, mais l'exemple choisi est trop simple. Pour mettre la théorie mieux à l'épreuve, il faut considérer des champs d'ondes gravitationnelles. On connaît de tels champs actuellement [2] ; il doit être possible de leur associer des complexes de Møller.

Une remarque à ce sujet. Pour ces solutions de Robinson et Trautman, les tétrapodes "naturels" sont déterminés par la famille d'hypersurfaces d'ondes et par la congruence de rayons. Les vecteurs h qui s'introduisent ainsi sont donc de longueur nulle, mais ces cas peuvent être envisagés dans la théorie de Møller. Un problème cependant. La coordonnée $x^4 = \sigma$ des métriques de Robinson et Trautman n'est pas le temps, mais un "temps retardé". Dans leurs systèmes de coordonnées, $T_4^4(\hat{L})$ n'est donc pas la densité spatiale d'énergie habituelle.

Afin d'obtenir des indications sur la manière de fixer les tétrapodes, MØLLER a considéré en détail le cas du <u>système "isolé"</u>, c'est-à-dire du système pour lequel le tenseur matériel est nul en dehors d'un tube d'univers à sections spatiales finies. L'espace-temps est asymptotiquement de Minkowski (pour $r \to \infty$). On peut donc introduire des coordonnées asymptotiquement pseudo-cartésiennes

$$g_{ik} \to \eta_{ik} = \begin{cases} +1 & i = k = 1, 2, 3 \\ -1 & i = k = 4 \\ 0 & i = k \end{cases} \quad .$$

Les conditions à imposer aux champs h sont de deux types : les conditions asymptotiques et les conditions locales.

Conditions asymptotiques.

A. $\underset{a}{h}^{i}(x) \to \delta_a^i$ pour $r \to \infty$

B. $\underset{a}{h}^{i}(x) - \delta_a^i$ se comporte asymptotiquement comme $g_{ik}(x) - \eta_{ik}$ pour un système isolé.

Conditions locales.

(18)
$$\varphi_{ik} = 0$$

où φ_{ik} est un tenseur antisymétrique fonction des champs h et de leurs dérivées premières et secondes au plus (par hypothèse).

MØLLER a pu démontrer que, pour les champs faibles, le champ de tétrapodes est déterminé par A , B et (18) exprimé par

(19)
$$\xi_{ik} \equiv \gamma_{ik}{}^{\ell}{}_{/\ell} = 0 \quad .$$

Esquissons la démonstration. On pose

(20)
$$g_{ik} = \eta_{ik} + y_{ik}(x) \quad ,$$

(21)
$$\underset{a}{\lambda_i} = \eta_{ai} + \underset{a}{\mu_i}(x)$$

où les y et les μ sont des infiniment petits du premier ordre qui satisfont à B , et sont liés par

(22)
$$y_{ik} = \underset{i}{\mu_k} + \underset{k}{\mu_i} \quad .$$

Le champ h est lié au champ λ par des relations de la forme

(23)
$$\underset{a}{h_i} = \underset{a}{\lambda_i} + {}_a\omega^b \underset{b}{\lambda_i}$$

où

$$\underset{ab}{\omega}(x) = - \underset{ba}{\omega}(x) \quad .$$

De (21) et (23) :

(24)
$$\underset{a}{h_i} = \eta_{ai} + \underset{ai}{\omega} + \underset{a}{\mu_i} \quad .$$

Le calcul donne

(25)
$$\gamma_{ik\ell} = \gamma_{ik,\ell} + \frac{1}{2}\,(y_{k\ell,i}\; y_{i\ell,k})$$

où

(26)
$$\gamma_{ik} = \underset{ik}{\omega} + \frac{1}{2}\,(\underset{i}{\mu_k} - \underset{k}{\mu_i}) = -\,\gamma_{ki}$$

Ensuite

(27)
$$\xi_{ik} = \Box\gamma_{ik} + \frac{1}{2}\,(y^{\ell}_{k,i} - y^{\ell}_{i,k})_{,\ell}$$

ou <u>en coordonnées harmoniques</u>

(27')
$$\xi_{ik} = \Box\gamma_{ik} \quad .$$

L'équation (19) se réduit donc à

(28)
$$\Box\gamma_{ik} = 0$$

dont la seule solution qui satisfait aux conditions aux limites est

(29)
$$\gamma_{ik} = 0 \quad .$$

D'où, (26), (24),

(30)
$$\underset{ik}{\omega} = -\frac{1}{2}\,(\underset{i}{\mu_k} - \underset{k}{\mu_i}) \quad ,$$

(31)
$$\underset{a}{h_i} = \eta_{ai} + \frac{1}{2}\, y_{ai} \quad .$$

C. Q. F. D.

Au premier ordre en les y, le complexe de Møller est égal au complexe d'Einstein et se réduit d'ailleurs au tenseur matériel :

(32) $$T_i^k = -\frac{1}{2}(\Box y_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k y) = -G_i^k \quad .$$

Au second ordre en les y, le complexe de Møller est la somme du tenseur matériel et de

(33) $$t_i^k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(y_\ell^{m,k} - y_\ell^{k,m})\, y^\ell_{m,i} + \frac{1}{4}(y_{,\ell}\, y^{\ell k}_{,i} - y_{,i}\, y^{,k}) - \delta_i^k \hat{L}\right)$$

et à cette approximation

(34) $$\hat{L} = \frac{1}{4} y_{rs,t}(y^{rs,t} - y^{ts,r}) - \frac{1}{16} y_{,r}\, y^{,r} \quad .$$

(Dans les équations d'Einstein, il faut cette fois conserver les termes du second ordre en les y.)

Le complexe (33) diffère de celui d'Einstein à cette approximation. Il serait intéressant de le comparer aux autres tenseurs d'impulsion-énergie introduits récemment en théorie du champ de gravitation.

Avant de passer à des considérations plus générales, il est bon de signaler que dans le cas du champ à symétrie sphérique examiné plus haut (formule (17)), les fonctions h^i_a utilisées satisfont aussi aux équations (19) et aux conditions asymptotiques A , B .

Bien que l'équation locale (19) fournisse des résultats satisfaisants dans certains cas particuliers, il n'est pas prouvé qu'il en soit toujours ainsi. Le problème se pose donc de trouver un tenseur φ_{ik} plus général, en se limitant toutefois, pour simplifier, aux fonctions algébriques des h^i_a et de leurs dérivées premières et secondes.

A partir des deux tenseurs antisymétriques en ik,

(35) $$\gamma_{ik\ell} \quad \text{et} \quad \gamma_{\ell ik} - \gamma_{\ell ki} \quad ,$$

on construit facilement quatre grandeurs qui satisfont aux conditions requises, en les multipliant par

(36) $$\Phi^{\ell} = g^{\ell k}\,\Phi_k \qquad \Phi_k = \gamma^{i}_{ki}$$

ou par l'opérateur contravariant de dérivation absolue par rapport à x^{ℓ} . Cela donne

(37) $$\zeta_{ik} = \gamma_{ik\ell}\,\Phi^{\ell} \quad ,$$

(38) $$\tau_{ik} = \Phi^{\ell}(\gamma_{\ell ik} - \gamma_{\ell ki}) \quad ,$$

(39) $$\xi_{ik} = \gamma^{\ell}_{ik/\ell} \quad ,$$

(40) $$\eta_{ik} = \Phi_{k,i} - \Phi_{i,k} \quad ,$$

ce dernier en utilisant les identités

$$\gamma^{\ell}_{ik/\ell} - \gamma^{\ell}_{ki/\ell} - \Phi_{i,k} + \Phi_{k,i} = 0 \quad .$$

Toute combinaison linéaire de (37) à (40) à coefficients constants (ou invariants)

(41) $$\alpha\xi_{ik} + \beta\eta_{ik} + \gamma\zeta_{ik} + \delta\tau_{ik} = 0$$

vérifie donc les conditions tensorielles.

Pour le champ à symétrie sphérique (17), les quatre fonctions (37) à (40) sont nulles séparément. Il ne fournit donc aucune indication sur les valeurs des coefficients.

A l'approximation linéaire, les deux derniers termes de (41) sont à négliger et MØLLER a montré en outre qu'en ajoutant les conditions aux limites, l'unicité du champ de tétrapodes est assurée si

(42) $$\beta \neq -\alpha \quad \text{et} \quad \alpha \neq 0$$

ce qui le conduit, par raison de simplicité, à prendre

(43) $$\alpha \neq 0, \quad \beta = \gamma = \delta = 0 \quad .$$

Il est clair cependant que ce raisonnement n'élimine pas définitivement d'autres combinaisons linéaires (41).

Il n'est même pas encore démontré que l'équation cherchée soit du type (41). A priori, il faudrait aussi considérer d'autres grandeurs, par exemple celles obtenues en remplaçant dans (37) à (40), Φ_k par

$$\Phi^*_k = \gamma^{*\ell}_{k\ell} \quad \text{où} \quad \gamma^*_{ik\ell} = \eta_{ikrs}\, \gamma^{rs\ell} \quad . \tag{44}$$

La discussion reste ouverte.

Signalons enfin une intéressante suggestion faite par MØLLER à la fin du travail cité [1]. Le tenseur φ_{ik} et le champ é. m. F_{ik} ayant la même variance, l'idée se présente assez naturellement de les relier simplement par

$$F_{ik} = q\varphi_{ik} \tag{45}$$

où q est une constante universelle dont la dimension est celle d'une charge électrique.

L'équation (18) exprimerait alors l'absence de champ é. m. Dans le cas général, elle serait remplacée par des équations maxwelliennes. Ceci est peut-être l'amorce d'une nouvelle théorie unitaire. Ici encore, les solutions connues des équations de Maxwell-Einstein viendront à point pour justifier et préciser la relation (45).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GEHENIAU (Jules). - Remarques sur les "pseudo-tenseurs" et les identités satisfaites par un lagrangien, Colloque de Royaumont, 1960.

[2] MØLLER (C.). - Conservation laws and absolute parallelism in general relativity (à paraître).

[3] ROBINSON (I.) and TRAUTMAN (A.). - Some spherical gravitational waves in general relativity (à paraître).