Séminaire Janet.
Mécanique analytique
et mécanique céleste

Claude Latrémolière

Formulation spinorielle de la relativité générale

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 6 (1962-1963), exp. nº 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1962-1963__6__A1_0>

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
6e année, 1962/63, n° 1

17 novembre 1962

FORMULATION SPINORIELLE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par Claude LATRÉMOLIÈRE

(d'après R. PENROSE [2])

1. Spineurs à quatre composantes (notations de A. LICHNEROWICZ, dans son cours au Collège de France, 1961/62).

On utilise la variété V_4 classique de la relativité générale de métrique $g_{\alpha\beta}$ et on désigne par z un repère orthonormé.

$$g_{00} = 1 \qquad g_{ii} = -1 \qquad (i = 1 , 2 , 3)$$

Soit γ_α $(\alpha = 0 , 1 , 2 , 3)$ les quatre matrices de Dirac d'éléments complexes $\gamma_\alpha{}^a{}_b$ $(a , b = 1 , 2 , 3 , 4)$ solutions de

$$(1.1) \qquad \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2g_{\alpha\beta}$$

(dans toute la suite la matrice unité est omise, et lorsque les indices a , b ,... ne seront pas écrits on supposera que l'on utilise la notation du produit matriciel).

On désignera par M une matrice de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$ construit sur les réels et les γ_α .

Une matrice (4×4) Λ appartiendra au groupe Spin(4) si elle vérifie

$$(1.2) \qquad \Lambda M \Lambda^{-1} \in \mathfrak{M}$$

$$(1.3) \qquad \det \Lambda = 1 \quad .$$

L'essentiel est qu'elle soit inversible, et alors on peut toujours, en la multipliant par un scalaire, imposer la condition (1.3).

On démontre alors

$$(1.4) \qquad \Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1} = \Lambda^{\beta'}{}_\alpha \gamma_{\beta'} \quad ,$$

où la matrice Λ d'éléments $\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha}$ appartient au groupe de Lorentz homogène $L(4)$, et on peut par ce procédé obtenir tout le groupe de Lorentz.

La relation (1.1) permet de voir que

$\Lambda = \gamma_0$ correspond à la symétrie d'espace

(1.5) $\Lambda = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ correspond à la symétrie de temps

$\Lambda = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ correspond à la symétrie d'univers (produit des deux précédentes)

Un spineur contravariant $\psi(z)$ de composantes $\psi^a(z)$ sera tel que

$$\psi(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi(z) \tag{1.6}$$

et un spineur covariant $\varphi(z)$ de composantes $\varphi_a(z)$ tel que

$$\varphi(z\Lambda^{-1}) = \varphi(z)\ \Lambda^{-1} \quad . \tag{1.7}$$

On peut passer d'un spineur contravariant ψ à un spineur covariant φ par une relation du type

$$\varphi = \rho_z (C\psi)^T \tag{1.8}$$

où ρ_z est une orientation temporelle de V_4 ; C est une matrice unique à un coefficient complexe près et qui vérifie

$$\gamma_\alpha^T = -\, C\gamma_\alpha\ C^{-1} \qquad C^T = -\, C \quad . \tag{1.9}$$

La matrice C ne définit pas une métrique car elle conduit à une norme nulle quel que soit le spineur envisagé. Cette pseudo-métrique est à dérivée covariante nulle dans la connexion spinorielle canoniquement associée à la connexion riemannienne de V_4 et d'autre part la relation (1.9) est équivalente à

$$\gamma_{\alpha ab} = \gamma_{\alpha ba} \quad .$$

2. Réduction aux spineurs à deux composantes.

On pose $\psi = \binom{\xi}{\eta}$, où ξ et η sont des éléments à deux composantes, et on désire des lois de transformations indépendantes pour ξ et η . Donc Λ est de la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \lambda\ ,\ \mu \ \text{ matrices } (2 \times 2) \qquad .$$

D'autre part il existe une famille de solutions particulières pour les γ_α du type

$$(2.1) \qquad \gamma_\alpha = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ \sigma^*_\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad (\sigma^{*a}_{\alpha\ b} \text{ complexe conjugué de } \sigma_{\alpha\ b}^{\ a})$$

où les σ_α sont des matrices 2×2 qui vérifient

$$(2.2) \qquad \sigma^*_\alpha \sigma_\beta + \sigma^*_\beta \sigma_\alpha = - g_{\alpha\beta}$$

dont on connait au moins une solution.

La relation (1.4) devient

$$(2.3) \qquad \lambda\sigma_\alpha \lambda^{*-1} = \Lambda^{\beta'}_{\ \alpha}\, \sigma_{\beta'} \quad \text{et impose} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix}$$

Des relations (1.5) on déduit que ce choix particulier pour γ_α et Λ entraîne que l'on n'obtient que deux des quatre composantes connexes du groupe de Lorentz : celles qui contiennent l'identité et la symétrie d'univers.

Le spineur contravariant ψ se décompose en deux spineurs contravariants ξ et η dont les lois de transformation s'écrivent (d'après (1.6)) :

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} \xi(z\Lambda^{-1}) &= \lambda\xi(z) \\ \eta(z\Lambda^{-1}) &= \lambda^* \eta(z) \end{aligned}$$

et de même avec (1.7) pour le spineur covariant $\varphi = (\alpha\ ,\ \beta)$, on a

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} \alpha(z\Lambda^{-1}) &= \alpha(z)\ \lambda^{-1} \\ \beta(z\Lambda^{-1}) &= \beta(z)\ \lambda^{*-1} \end{aligned} \qquad .$$

<u>Notation indicielle</u>. - On désigne par A , B , ... des indices qui peuvent prendre les valeurs 1 , 2 , et on affecte d'un (') ceux qui correspondent à des spineurs des types ξ et α . Les formules (2.4) et (2.5) montrent que, lorsque l'on passe d'un spineur à son complexe conjugué (notation $*$), on change le type du spineur ; d'où les composantes :

$$\psi : \begin{pmatrix} \xi^A \\ \eta^A \end{pmatrix} \qquad \varphi : (\alpha_{A'} , \beta_A)$$

$$\xi^* : (\xi^{A}) \qquad \eta^* : (\eta^{A'}) \qquad \alpha^* : (\alpha_A) \qquad \beta^* : (\beta_{A'}) \qquad .$$

La relation (2.3) montre que les matrices σ_α sont du type : vecteur covariant, 1-spineur ξ , 1-spineur β .

$$\sigma_\alpha : (\sigma_\alpha{}^{A'}{}_{B}) \qquad \sigma^*_\alpha : (\sigma_\alpha{}^{A}{}_{B'})$$

et (2.2) s'écrit

$$\sigma_\alpha{}^{A}{}_{B'}\, \sigma_\beta{}^{B'}{}_{C} + \sigma_\beta{}^{A}{}_{B'}\, \sigma_\alpha{}^{B'}{}_{C} = - g_{\alpha\beta}\, \delta^A_C \qquad . \tag{2.6}$$

<u>Pseudo-métrique</u>. - On souhaite une formule du type $\alpha = \rho_z (c\xi)^T$, et de même pour β en passant au complexe conjugué ; donc

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^* \end{pmatrix} \text{ avec } c^T = - c \text{ , soit } c = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ - \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

C étant définie à un coefficient complexe près, on peut toujours écrire $\varepsilon = \rho_z$ lorsqu'une orientation a été choisie, et on vérifie que la matrice C ainsi définie est bien solution de (1.9).

On pose

$$\xi_{B'} = \xi^{A'}\, \varepsilon_{A'B'} \qquad \eta_B = \eta^A\, \varepsilon_{AB}$$

$$\varepsilon_{A'B'} = \varepsilon_{AB} = - \varepsilon_{BA} \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{1'2'} = 1$$

$$\eta^A = \varepsilon^{AB}\, \eta_B \quad \text{si} \quad \varepsilon^{AB} = \varepsilon_{AB} \qquad .$$

Conséquences :

$$\xi^{A} \eta_{A} = \varepsilon^{AB} \xi_{B} \eta^{C} \varepsilon_{CA} = - \xi_{A} \eta^{A}$$

$$\gamma_{\alpha ba} = \gamma_{\alpha ab} \quad \text{s'écrit} \quad \sigma_{\alpha AB'} = \sigma_{\alpha B'A}$$

donc les matrices d'éléments $\sigma_{\alpha AB'}$ sont hermitiques et (2.6) devient

$$(2.7) \qquad \sigma_{\alpha}{}^{A}{}_{B'} \sigma_{\beta}{}^{CB'} + \sigma_{\beta}{}^{A}{}_{B'} \sigma_{\alpha}{}^{CB'} = g_{\alpha\beta} \varepsilon^{AC}$$

3. Correspondances entre tenseurs et spineurs.

Au tenseur $X^{\lambda\mu}{}_{\nu}$ on associe le spineur

$$(3.1) \qquad X^{AB'CD'}{}_{EF'} = \sigma_{\lambda}{}^{AB'} \sigma_{\mu}{}^{CD'} X^{\lambda\mu}{}_{\nu} \sigma^{\nu}{}_{EF'} .$$

Or, la relation fondamentale (2.7) entraîne

$$(3.2) \qquad \sigma_{\lambda}{}^{AB'} \sigma_{\mu AB'} = - \sigma_{\lambda}{}^{A}{}_{B'} \sigma_{\mu}{}^{B'}{}_{A} = g_{\lambda\mu}$$

$$(3.3) \qquad X^{\lambda\mu}{}_{\nu} = \sigma^{\lambda}{}_{AB'} \sigma^{\mu}{}_{CD'} X^{AB'CD'}{}_{EF'} \sigma_{\nu}{}^{EF'} .$$

Au tenseur complexe conjugué $X^{*\lambda\mu}{}_{\nu}$ est associé le spineur $X^{B'AD'C}{}_{F'E}$ donc à un tenseur réel correspond un spineur hermitique (pour chaque couple d'indices spinoriels).

La relation (3.2) montre qu'au tenseur $g_{\lambda\mu}$ est associé le spineur

$$g^{AB'CD'} = \varepsilon^{AC} \varepsilon^{B'D'}$$

et les deux "métriques" $g_{\lambda\mu}$ et ε_{AB} se correspondent.

Cas des tenseurs antisymétriques. - De la relation $\eta_{A}{}^{A} = \varepsilon^{AB} \eta_{AB} = \eta_{12} - \eta_{21}$ on déduit la formule auxiliaire, pour tout spineur η_{AB} ,

$$(3.4) \qquad \eta_{AB} - \eta_{BA} = \eta_{R}{}^{R} \varepsilon_{AB} .$$

Pour un tenseur antisymétrique $F_{\alpha\beta} = - F_{\beta\alpha}$ et $F_{AB'CD'} = - F_{CD'AB'}$.

En utilisant la relation (3.4) on obtient

$$F_{AB'CD'} = \frac{1}{2} (\Phi_{AC} \, \varepsilon_{B'D'} + \varepsilon_{AC} \, \Phi_{B'D'})$$

où Φ_{AC} est un spineur symétrique et $\Phi_{B'D'}$ son hermitique conjugué (si $F_{\alpha\beta}$ est réel).

Au tenseur adjoint $(*F)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\lambda\mu} F^{\lambda\mu}$ est associé le spineur

$$(*F)_{AB'CD'} = \frac{1}{2} (- i\Phi_{AC} \, \varepsilon_{B'D'} + i\varepsilon_{AC} \, \Phi_{B'D'})$$

(formule exacte au signe près : le signe dépend du choix de l'orientation qui intervient dans la définition de l'adjoint et du choix des solutions σ_α des relations (2.7)).

Comme dans le cas des spineurs à quatre composantes, la dérivation covariante ∇_α commute avec $\sigma_\beta^{\ AB'}$ et ε^{AB} . Dans la suite on posera $\nabla_{AB'} = \sigma^\alpha_{\ AB'} \nabla_\alpha$.

4. Spineurs de courbure.

Le tenseur de courbure $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ est antisymétrique en α , β et λ , μ et on peut alors obtenir la décomposition

$$R_{AE'BF'CG'DH'} = \frac{1}{2} (\chi_{ABCD} \, \varepsilon_{E'F'} \, \varepsilon_{G'H'} + \varepsilon_{CD} \, \Phi_{ABG'H'} \, \varepsilon_{E'F'} + \dots + \varepsilon_{AB} \, \Phi_{E'F'CD} \, \varepsilon_{G'H'} + \varepsilon_{AB} \, \varepsilon_{CD} \, \chi_{E'F'G'H'}) \quad . \tag{4.1}$$

En tenant compte de la symétrie $R_{\alpha\beta\lambda\mu} = R_{\lambda\mu\alpha\beta}$ on obtient

$$\begin{aligned} &\chi_{ABCD} = \chi_{BACD} = \chi_{ABDC} \, \chi_{CDAB} \\ &\Phi_{ABC'D'} = \Phi_{BAC'D'} = \Phi_{ABD'C'} = \Phi_{C'D'AB} \quad . \end{aligned} \tag{4.2}$$

En utilisant l'adjoint à droite

$$(R*)_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2} \eta_{\lambda\mu\rho\sigma} R_{\alpha\beta}^{\ \ \rho\sigma} \tag{4.3}$$

l'identité de Bianchi pour la torsion s'écrit

(4.4) $$(R*)_{\alpha\beta\lambda}{}^{\beta} = 0$$

et en notation spinorielle

(4.5) $$\chi_{ABC}{}^{B} = \lambda\varepsilon_{AC} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{2}\chi_{AB}{}^{AB} \quad \text{réel} \qquad ;$$

(4.2) et (4.5) constituent toutes les relations algébriques satisfaites sur une variété riemannienne.

L'identité de Bianchi pour la courbure

(4.6) $$\nabla^{\lambda}(R*)_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$$

est équivalente à

(4.7) $$\nabla^{D}{}_{G'}\,\chi_{ABCD} = \nabla_{C}{}^{H'}\,\Phi_{ABG'H'} \qquad .$$

Les identités de Ricci peuvent également être écrites en notation purement spinorielle en utilisant les deux spineurs de courbure χ_{ABCD} et $\Phi_{ABC'D'}$.

5. Les conditions d'Einstein.

Au tenseur de Ricci $R_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\rho\lambda}{}^{\rho}$ est associé le spineur

$$R_{AC'BD'} = \lambda\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{C'D'} - \Phi_{ABC'D'} \quad \text{avec} \quad R = R^{\alpha}{}_{\alpha} = 4\lambda$$

et au tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,R$ le spineur

$$S_{AC'BD'} = -\lambda\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{C'D'} - \Phi_{ABC'D'} \qquad .$$

Les équations d'Einstein du vide montrent que λ est égal à la constante cosmologique (éventuellement nulle) et le spineur

$$\psi_{ABCD} = \chi_{ABCD} - \frac{\lambda}{3}\,(\varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{BD} + \varepsilon_{AD}\,\varepsilon_{BC})$$

est totalement symétrique.

Les identités de Bianchi $\nabla^{DE'} \psi_{ABCD} = 0$ correspondent aux équations d'une particule de masse nulle et de spin 2 .

Le tenseur $T_{\alpha\beta\lambda\mu}$ qui correspond à

$$T_{AE'BF'CG'DH'} = \psi_{ABCD} \psi_{E'F'G'H'}$$

est totalement symétrique, a des traces nulles et est à divergence nulle ; donc, il s'agit d'un multiple du tenseur de super-énergie de Bel.

En présence d'un champ électromagnétique Φ_{AB} on obtient dans le vide les équations (après un choix convenable des unités)

$$\nabla^{AC'} \Phi_{AB} = 0 \qquad \text{(MAXWELL)}$$

$$\nabla^{D}{}_{G'} \psi_{ABCD} = \Phi_{G'H'} \nabla_C{}^{H'} \Phi_{AB} \qquad \text{(BIANCHI)}$$

$$\Phi_{ABC'D'} = \Phi_{AB} \Phi_{C'D'} \qquad .$$

6. La géométrie et les invariants de ψ_{ABCD} .

D'un spineur η^A on peut déduire le spineur

$$x^{AB'} = \eta^A \eta^{B'}$$

auquel est associé un vecteur isotrope ; donc, à toute direction du cône isotrope est associée une famille de 1-spineurs proportionnels.

Au spineur ψ_{ABCD} totalement symétrique correspond une forme multilinéaire qui admet la décomposition unique à un coefficient complexe près

$$\psi_{ABCD} \xi^A \xi^B \xi^C \xi^D = (\alpha_A \xi^A)(\beta_B \xi^B)(\gamma_C \xi^C)(\delta_D \xi^D)$$

d'où

$$\psi_{ABCD} = \alpha_{(A} \beta_B \gamma_C \delta_{D)}$$

où le signe ( ) indique la somme des termes correspondants à toutes les permutations possibles des indices compris entre les parenthèses.

Ainsi ψ_{ABCD} définit univoquement quatre directions du cône isotrope (ou quatre points A , B , C , D d'une sphère de R^3).

Les seuls invariants sont

$$I = \psi_{ABCD}\,\psi^{ABCD} \qquad J = \psi_{ABCD}\,\psi^{CDEF}\,\psi_{EF}{}^{AB}$$

dont les parties réelles et imaginaires s'expriment en fonction des quatre invariants réels de $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu}\,R^{\alpha\beta\lambda\mu} \qquad R_{\alpha\beta\lambda\mu}\,R^{\lambda\mu\rho\sigma}\,R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu}\,(R*)^{\alpha\beta\lambda\mu} \qquad R_{\alpha\beta\lambda\mu}\,(R*)^{\lambda\mu\rho\sigma}\,R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \quad .$$

Si on fait un classement d'après l'ordre de multiplicité des directions isotropes définies par ψ_{ABCD} on obtient le tableau

		(1111)	$I^3 \neq 6J^2$
	(211)	(22)	$I^3 = 6J^2 \neq 0$
(31)	(4)	$(\psi = 0)$	$I = J = 0$
III	II	I	

Une notation comme (211) désigne deux directions confondues et deux autres distinctes. Les chiffres I , II , III caractérisent le type dans la classification de Petrov. Un type de Petrov correspond à une colonne du tableau. Une ligne du tableau est caractérisée par les valeurs de I et J .

7. Solutions analytiques des équations d'Einstein.

La résolution par développement en série du tenseur de courbure, connaissant sa valeur et celles de ses dérivées successives en un point, se heurte aux difficultés provoquées par les nombreuses relations algébriques qui relient ces dérivées entre elles (identités de Bianchi et de Ricci) et qui doivent être vérifiées par les valeurs initiales. Sous forme spinorielle ces relations sont plus simples et plus utilisables. En effet les expressions

$$\psi_{ABCD}$$

$$\nabla_{(E}^{\;\;P'}\psi_{ABCD)}$$

$$\nabla_{(E}^{\;\;(P'}\nabla_{F}^{\;\;Q')}\psi_{ABCD)} \qquad \text{etc.}$$

sont indépendantes et forment un système qui permet de calculer toutes les dérivées de ψ_{ABCD} .

On obtient ainsi immédiatement la solution en ondes planes

$$(\psi_{ABCD})_x = f(x^\lambda p_\lambda)\, \pi_A\, \pi_B\, \pi_C\, \pi_D$$

où

$$f(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \frac{1}{2!}\alpha_2 s^2 + \dots \qquad p_{AB'} = \pi_A \pi_{B'} \qquad .$$

Les α_n sont des constantes arbitraires (compatibles avec la convergence de la série en s^n). π_A est un spineur donné au point 0 , et le point x est situé sur la géodésique issue de 0 dans la direction x^λ à une distance de 0 égale à $\pm\sqrt{|x^\lambda x_\lambda|}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADE (W. L.) and JEHLE (H.). - An introduction to spinors, Rev. of modern Phys., t. 25, 1953, p. 714-728.

[2] PENROSE (Roger). - A spinor approach to general relativity, Annals of Phys., t. 10, 1960, p. 171-201.

[3] WITTEN (Louis). - Invariants of general relativity and the classification of spaces, Phys. Rev., t. 113, 1959, p. 357-362.