

SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

G. RIDEAU

Possibilité de résolutions exactes en théorie des champs

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. n° 12, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A11_0

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POSSIBILITÉ DE RÉSOLUTIONS EXACTES EN THÉORIE DES CHAMPS,

par G. RIDEAU.

Introduction.

Le travail qui va être exposé dans ce séminaire a eu pour objet essentiel de répondre à une question depuis longtemps pendante en théorie quantique des champs : savoir, si les habituelles difficultés de divergence ne pourraient pas être levées par des méthodes mathématiques plus rigoureuses et mieux adaptées que celles utilisées jusqu'à maintenant. Il est, en effet, facile de fournir des exemples où une mauvaise transcription mathématique masque complètement les possibilités de résolution, ainsi, précisément, dans le cas de l'équation de Schrödinger :

$$(1) \quad i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi(t)$$

où H est supposé auto-adjoint, non borné. Nous savons alors, par un théorème de von Neumann, que H ne peut être rigoureusement représenté par une matrice que suivant certains systèmes orthonormés de l'espace de Hilbert supposé séparable, si donc, nous essayons de transcrire (1) dans un système de base ne contenant pas, nous devons nous attendre à un système d'équations d'aspect pathologique. Si, en particulier, les vecteurs de base n'appartiennent pas au domaine d'existence de H , les quantités $H \varphi_i$ seront des "vecteurs" de norme infinie et, quand nous tenterons de résoudre (1) par approximations successives, des divergences apparaîtront grâce à la présence des normes et produits scalaires de tels "vecteurs". Autrement dit, par un choix erroné de la base de notre espace de Hilbert, nous venons de réaliser une situation analogue à celle prévalant en théorie des champs. Or, en ce qui concerne (1), les "divergences" ne peuvent avoir de signification puisqu'à l'aide de la notion de fonction d'opérateur, on en peut construire la solution pour toute valeur initiale donnée. D'où une première orientation des recherches vers l'étude de la représentation matricielle habituelle des hamiltoniens de la théorie des champs. Nous verrons alors qu'il existe une manière de les définir qui les fera apparaître comme des opérateurs symétriques de l'espace de Hilbert, l'application du théorème de

von Neumann rappelé plus haut nous conduisant ensuite à une écriture saine des équations à résoudre. Restera posé le problème de la méthode de résolution. Il ne saurait être question d'utiliser la méthode de perturbation, car, en schématisant, cette dernière revient à écrire pour e^{iHt} le développement

$$e^{iHt} = 1 + iHt + \dots + \frac{(iHt)^n}{n!} + \dots$$

qui n'est plus généralement valable pour H non borné, puisque, chacun des termes devant avoir un sens, on ne peut appliquer le développement qu'à l'intersection des domaines d'existence de tous les H^n , alors que e^{iHt} est défini partout. D'où le deuxième point à considérer : recherche d'une méthode de calcul. Mais avant d'aborder ces questions, il va être nécessaire de préciser quelle représentation nous adopterons et dans quel espace nous allons plonger nos équations.

1.- Définition de l'espace utilisé.

La représentation que nous adopterons sera celle de Schrödinger, sacrifiant ainsi la covariance à la simplicité de l'exposé, et nous prendrons, pour fixer les idées, un champ de fermions en interaction avec des bosons pseudo-scalaires (couplage γ_5). Quant à l'espace où nous nous placerons ce sera un espace du type de Fock mais où les vecteurs de base seront repérés par indices discrets au lieu d'indices continus tels que la position ou l'impulsion. Nous montrerons rapidement comment construire cet espace à partir, par exemple, de sa définition en fonction des impulsions telle qu'elle est exposée dans la thèse de Maurice Jean. Nous avons alors des opérateurs de création de négatons $\Psi^+_{\vec{p}}$, des opérateurs de création $\Psi^-_{\vec{p}}$, des opérateurs de création de bosons $\Phi^*_{\vec{p}}$ dont l'application successive et aussi répétée que l'on voulait engendrait tous les vecteurs de base, une fois posée l'existence d'un vecteur du vide Φ_0 . Un léger inconvénient de cette construction était de ne pas fournir des vecteurs linéairement indépendants par suite des relations $\Psi^+_{\vec{p}} = \Lambda^+(\vec{p}) \Psi^+(\vec{p})$, $\Psi^-_{\vec{p}} = \Lambda^-(\vec{p}) \Psi^-(\vec{p})$. Mais Jean lui-même montrait comment y parvenir en introduisant les opérateurs de création et d'annihilation des spineurs de Dirac par :

$$\Psi^+_{\vec{p}} = \sum_{s=1,2} A^+_{\vec{p}} U^s_+(\vec{p}) \quad \Psi^-_{\vec{p}} = \sum_{s=1,2} A^-_{\vec{p}} U^s_-(\vec{p})$$

où $U_+^S(\vec{p})$ et $U_-^S(\vec{p})$ représentent les quatre solutions de l'équation de Dirac relatives à la valeur \vec{p} de l'impulsion.

C'est de ces opérateurs $A_S^+(\vec{p})$ que nous allons partir pour obtenir des vecteurs de base repérés par des indices discrets et cela en posant simplement :

$$A_{j,S}^+ = \int d^3p A_S^+(\vec{p}) \Psi_j^*(\vec{p}) \quad A_{j,S}^- = \int d^3p A_S^-(\vec{p}) \Psi_j(\vec{p})$$

$$\bar{\Phi}_i = \int d^3q \bar{\Phi}(q) \beta_i(q)^*$$

où les $\Psi_j(p)$, $\beta_i(q)$ sont deux systèmes orthonormés complets de L^2 .

De tels systèmes dépendant d'un indice discret, existent certainement dans L^2 qui est séparable. Un exemple en est fourni par les fonctions propres de l'oscillateur harmonique à trois dimensions. On vérifie alors aisément :

$$\left\{ A_{j,S}^+, A_{j',S'}^{+*} \right\} = \delta_{jj'} \delta_{SS'} \quad , \quad \left\{ A_{j,S}^-, A_{j',S'}^{-*} \right\} = \delta_{jj'} \delta_{SS'}$$

$$[\bar{\Phi}_i, \bar{\Phi}_j^*] = \delta_{ij}$$

tous autres commutateurs et anticommutateurs étant nuls, et il n'y a plus qu'à reprendre, mot pour mot, les raisonnements de Jean pour construire une base de l'espace de Fock où un vecteur attaché à n^+ négatons, n^- positrons et m bosons s'écrit :

$$\sqrt{n^+! n^-! m!} | j_1^+ \dots j_{n^+}^+ ; j_1^- \dots j_{n^-}^- ; i_1 \dots i_m \rangle =$$

$$S_1^+ \dots S_{n^+}^+ \quad S_1^- \dots S_{n^-}^-$$

$$= A_{j_1^+, S_1^+}^{+*} \dots A_{j_{n^+}^+, S_{n^+}^+}^{+*} A_{j_1^-, S_1^-}^- \dots A_{j_{n^-}^-, S_{n^-}^-}^- \bar{\Phi}_{i_1} \dots \bar{\Phi}_{i_m} \bar{\Phi}_0$$

Les opérateurs, nombre de particules sont toujours diagonaux, ce qui était nécessaire pour que l'on puisse parler d'espace de Fock et, à partir de cette base, on retrouvera toutes les propriétés démontrées par Jean, sauf sur un point: l'hamiltonien libre des particules n'est plus diagonal. En effet, cet hamiltonien s'écrit, par exemple pour les fermions,

$$\int d^3p \Psi^+ *(\vec{p}) E_p \Psi^+(\vec{p}) + \int d^3p \Psi^-(\vec{p}) E_p \Psi^-(\vec{p})^* \quad (E_p = \sqrt{p^2 + M^2}, M \text{ masse des fermions})$$

ce qui devient ici :

$$\sum_{j,k,s} A_{j,s}^{+,*} A_{k,s}^+ \int \Psi_j^*(p) E_p \varphi_k(p) d^3p + \sum_{j,k,s} A_{j,s}^- A_{k,s}^- \int \varphi_j(p) E_p \varphi_k^*(p) d^3p$$

et il suffit d'un calcul simple pour voir que, sous l'action de cet opérateur, chaque vecteur de base devient une combinaison linéaire de vecteurs rapportés aux mêmes nombres respectifs de particules.

2.- Etude de la représentation matricielle de l'hamiltonien.

C'est un résultat implicitement contenu dans l'existence des divergences de la méthode de perturbation que les hamiltoniens de la théorie des champs transforme tout vecteur de base de Fock en un vecteur de norme infinie. Le mieux que nous puissions espérer sera donc de trouver que l'hamiltonien est un certain opérateur non-borné représentée dans une base non adéquate. Pour cela, nous devons montrer qu'il existe un ensemble linéaire de vecteurs, dense dans l'espace de Fock, sur lequel on peut donner un sens à l'hamiltonien et nous allons voir que l'existence d'un tel ensemble est impliquée par celle de "facteurs de convergence".

Pour plus de clarté, considérons en effet un tableau de nombres A_{ik} tels que $A_{ik} = \bar{A}_{ki}$ et tels qu'il existe des nombres C_i impliquant la convergence des séries $\sum_i |C_i A_{ik}|^2$. A partir des nombres $C_i A_{ik}$, nous allons définir un opérateur de l'espace de Hilbert en convenant de faire correspondre au kème vecteur de base φ_k le vecteur ayant $C_i A_{ik}$ comme i-ème composante. On constituera un opérateur linéaire en faisant correspondre à la combinaison $\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k$ le vecteur dont la i-ème composante sera $\sum_{k=1}^N C_i A_{ik} \lambda_k$ et l'on obtiendra un opérateur linéaire fermé en prenant la fermeture du graphique. Or, l'adjoint d'un opérateur linéaire fermé a un domaine d'existence dense dans l'espace de Hilbert, et en appliquant la définition de l'adjoint à l'opérateur fermé que nous venons de former, on verra que ce domaine est constitué par tous les y_i tels que la série $\sum_k A_{ik} \bar{C}_k y_k$ soit la i-ème composante d'un vecteur de l'espace de Hilbert, c'est-à-dire tels que la série $\sum_i \left| \sum_k A_{ik} \bar{C}_k y_k \right|^2$ converge. Par conséquent en faisant correspondre au vecteur $\sum_i \bar{C}_i y_i \varphi_i$, le vecteur ayant pour i-ème composante $\sum_k A_{ik} \bar{C}_k y_k$, nous aurons défini, à l'aide des A_{ik} une transformation de l'espace de Hilbert, dont le domaine sera le transformé par l'opérateur diagonal $\left\{ C_i \delta_{ik} \right\}$

d'un domaine dense dans l'espace de Hilbert. Il est facile de montrer que si aucun des C_i n'est nul, ce domaine transformé est lui-même dense. Donc, grâce à l'existence des "facteurs de convergence" C_i , nous aurons pu faire correspondre au tableau A_{ik} un opérateur linéaire non borné de l'espace de Hilbert, et, en partant du fait qu'un adjoint est fermé, on montrera sans peine que cet opérateur est lui aussi fermé. Il ne reste plus, pour démontrer notre proposition sur les hamiltoniens de la théorie des champs, qu'à prouver l'existence des C_i .

L'hamiltonien que nous devons considérer est la somme de l'hamiltonien libre et de l'hamiltonien d'interaction, et ce sont les "éléments de matrice" de cette somme qui jouent le rôle des A_{ik} . On soupçonne qu'étant donnée la complexité des dits éléments, une démonstration directe de la propriété n'est guère praticable. Mais nous avons heureusement à notre disposition le théorème de Landau qui énonce que la série $\sum_k A_k X_k$, ne peut converger quels que soient les X_k avec $\sum_k |X_k|^2$ convergente que si, et seulement si $\sum |A_k|^2$ converge. Considérons donc l'hamiltonien H agissant sur un vecteur de base de notre espace de Fock. Ces composantes seront, formellement, les quantités :

$$(i_1^+ \dots i_{m^+}^+ ; i_1^- \dots i_{m^-}^- ; j_1 \dots j_q) | H | i_1^+ \dots i_{n^+}^+ ; i_1^- \dots i_{n^-}^- ; j_1 \dots j_p)$$

et cherchons à déterminer l'existence de "facteurs de convergence" de la forme :

$$C(i_1^+ \dots i_{m^+}^+ ; i_1^- \dots i_{m^-}^- ; j_1 \dots j_q) = f_{i_1^+}^+ \dots f_{i_{m^+}^+}^+ \cdot f_{i_1^-}^- \dots f_{i_{m^-}^-}^- b_{j_1} \dots b_{j_q}$$

Il va nous suffire de montrer que la série :

$$(2) \sum_{m^+} \sum_{m^-} \sum_q U(i_1^+ \dots i_{m^+}^+ ; i_1^- \dots i_{m^-}^- ; j_1 \dots j_q) f_{i_1^+}^+ \dots f_{i_{m^+}^+}^+ f_{i_1^-}^- \dots f_{i_{m^-}^-}^- b_{j_1} \dots b_{j_q} (i_1^+ \dots i_{m^+}^+ ; i_1^- \dots i_{m^-}^- ; j_1 \dots j_q) | H | i_1^+ \dots i_{n^+}^+ ; i_1^- \dots i_{n^-}^- ; j_1 \dots j_p)$$

va converger quels que soient les U composantes d'un vecteur de l'espace de Fock. Or, de par la structure même de H ,

$$n^+ - 1 \leq m^+ \leq n^+ + 1, \quad n^- - 1 \leq m^- \leq n^- + 1, \quad j_p - 1 \leq j_q \leq j_p + 1$$

de sorte que la série (2) va apparaître comme la somme d'un nombre fini de séries partielles où seules interviendront des sommations sur les indices i^+ , i^- , j , et, toujours grâce à la structure de H , chacune de ces séries partielles se

scinde à son tour, en une somme d'un nombre fini de séries où les sommations ne portent que sur au plus trois indices. L'application répétée du théorème de Landau à ce dernier type de séries nous ramène alors au problème de faire converger à l'aide des f_{i+}^+ , f_{i-}^- et b_j , cinq séries distinctes et indépendantes du choix du vecteur de base auquel avait été appliqué H , si tout au moins, les fonctions ψ_i et β_j ont été choisies telles que les intégrales $\int \psi_i(p) E_p^2 \psi_j^*(p) d^3p$, $\int \psi_i(q) \xi_q^2 \beta_j^*(q) d^3q$ convergent pour tout i et j (E_p , énergie d'un fermion d'impulsion \vec{p} , ξ_q énergie d'un boson d'impulsion \vec{q}). C'est évidemment le fait de nous être ainsi ramenés à la considération d'un nombre fini de séries qui nous assure de l'existence des f^+ , f^- et b convenables.

Ainsi nous pouvons affirmer qu'il existe dans l'espace de Fock un ensemble dense de vecteurs sur lequel H a un sens. Etant donnée la forme particulière des "facteurs de convergence" utilisée, le domaine obtenu est, a priori restreint, mais nous pouvons toujours prolonger H ainsi défini de manière à lui donner son extension maximum. Enfin, étant donnée la façon même dont on l'obtient, ^{on constate} qu'il est aussi symétrique. Nous pourrions donc appliquer le théorème de von Neumann rappelé dans l'introduction, nous assurant qu'il existe un système de base de l'espace de Fock dans lequel H sera représentable par une matrice d'éléments H_{ij} avec $H_{ij} = \bar{H}_{ji}$ et $\sum |H_{ij}|^2 < \infty$.

3.- La méthode de calcul.

Grâce à ce choix d'une base bien adaptée, nous pourrions écrire l'équation de Schrödinger du système de champs :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi(t)$$

Sous la forme d'un système infini d'équations différentielles linéaires :

$$(3) \quad i \frac{\partial U_i(t)}{\partial t} = \sum_k H_{ik} U_k(t) \quad i = 1, 2, \dots, \infty$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons représenté par un unique indice l'ensemble des indices repérant les nouveaux vecteurs de base.

Il s'agit maintenant de voir si (3) admet effectivement des solutions, et de donner une méthode pour les calculer. Nous en proposerons une, généralisation d'une méthode due à Schmidt, qui sera une méthode d'approximation, totalement distincte de la méthode de perturbation et dont la convergence en moyenne vers une solution de (3) sera assurée.

Nous commencerons par ne considérer que les n premières équations de (3) et nous résoudrons ce système partiel en y posant

$$\left\{ \begin{array}{l} U_k^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^n z_j^{(n)}(t) \bar{H}_{jk} - i \frac{d}{dt} z_k^{(n)}(t) + \eta_k(t) \quad k \leq n \\ U_k^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^n z_j^{(n)}(t) \bar{H}_{jk} + \eta_k(t) \quad k > n \end{array} \right.$$

où les $\eta_k(t)$ sont, à chaque instant t , les composantes d'un vecteur de l'espace de Hilbert.

En portant dans les n premières équations de (3) nous obtenons pour déterminer les n inconnues $z_j^{(n)}(t)$, le système d'équations différentielles linéaires suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_i^{(n)}(t)}{dt^2} + 2i \sum_{j=1}^n H_{ij} \frac{d z_j^{(n)}(t)}{dt} - \sum_{j=1}^n \nu_{ij} z_j^{(n)}(t) &= \\ &= \sum_k H_{ik} \eta_k(t) - i \frac{d \eta_n(t)}{dt} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \nu_{ij} &= \sum_k H_{ik} \bar{H}_{jk} \end{aligned}$$

dont on notera pour la suite que sa solution générale dépend de $2n$ constantes.

Désignons par $\Psi^{(n)}(t)$ le vecteur de Hilbert dont les composantes sont les quantités $U_k^{(n)}(t)$ et écrivons :

$$(4) \quad \Psi^{(n)}(t) = \Psi^{(1)}(t) + [\Psi^{(2)}(t) - \Psi^{(1)}(t)] + \dots + [\Psi^{(n)}(t) - \Psi^{(n-1)}(t)]$$

Le calcul montre alors que pour $\ell \geq m+1$, nous avons :

$$(5) \quad \int_{t_1}^{t_2} dt (\Psi^{(\ell)}(t) - \Psi^{(\ell-1)}(t), \Psi^{(m)}(t) - \Psi^{(m-1)}(t)) = \\ = i \left[\sum_{k=1}^m (U_k^{(\ell)}(t) - U_k^{(\ell-1)}(t)) \bar{y}_k^{(m)}(t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\text{où } \begin{cases} y_k^{(m)}(t) = z_k^{(m)}(t) - z_k^{(m-1)}(t) & = 1, 2, \dots, m-1 \\ \dot{y}_m^{(m)} = z_m^{(m)}(t) \end{cases}$$

Il serait évidemment avantageux que (5) soit nul car alors les termes du second membre de (4) seraient deux à deux orthogonaux au sens du produit scalaire de (5) et il suffirait de démontrer la convergence des normes pour être assurés de la convergence forte de la série. Or un moyen simple d'annuler (5) est de poser $\bar{y}_k^{(m)}(t_2) = 0$ d'une part et $U_k^{(\ell)}(t_1) - U_k^{(\ell-1)}(t_1) = 0$ d'autre part. La première condition équivaut à $z_k^{(m)}(t_2) = 0$, ce qui fait m conditions linéaires liant les $2m$ constants contenues dans les $z_k^{(m)}(t)$. La seconde nous donne $U_k^{(m)}(t_1) = U_k^{(m-1)}(t_1)$ pour $k = 1, 2, \dots, m-1$, soit $(m-1)$ conditions linéaires de plus. Nous pouvons donc assurer l'annulation des produits scalaires tels que (5) en conservant encore une constante arbitraire dans l'expression des $z_k^{(m)}(t)$.

Si maintenant nous passons au calcul de la norme de $\Psi^{(\ell)}(t)$ au sens de (5), il vient

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\Psi^{(\ell)}(t)\|^2 dt = R \sum_{k=1}^{\ell} U_k^{(\ell)}(t_1) z_k^{(\ell)}(t_1) + R \int_{t_1}^{t_2} (\Psi^{(\ell)}(t), \eta(t)) dt$$

où R indique que l'on prend la partie réelle, et en posant :

$$\phi^{(i)}(t) = \Psi^{(i)}(t) - \Psi^{(i-1)}(t) \quad i = 2, 3, \dots$$

$$\phi^{(1)}(t) = \Psi^{(1)}(t) - \eta(t)$$

il vient, après quelques manipulations utilisant les relations d'orthogonalité (5) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\Psi^{(\ell)}(t)\|^2 dt = 2R \sum_{k=1}^{\ell} U_k^{(\ell)}(t_1) z_k^{(\ell)} + \int_{t_1}^{t_2} \|\eta(t)\|^2 dt - \sum_{i=1}^{\ell} \int_{t_1}^{t_2} \|\phi^{(i)}(t)\|^2 dt \geq 0$$

si bien que la convergence de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \|\phi^{(i)}(t)\|^2 dt$ sera assurée si l'est celle de la suite à termes positifs :

$$(6) \quad \int_{t_1}^{t_2} \|\eta(t)\|^2 dt + 2R \sum_{k=1}^{\ell} U_k^{(\ell)}(t_1) \bar{z}_k^{(\ell)}(t_1)$$

Ce qui sera toujours réalisé si on égale chacun de ses termes à ceux d'une suite convergente donnée a priori. En tenant compte de l'expression des $U_k^{(2)}(t_1)$ en fonction des $z_k^{(\ell)}(t)$ ceci ajoutera une condition quadratique sur la seule constante dont dépendent maintenant les $z_k^{(\ell)}(t)$, achevant ainsi leur détermination.

En définitive, nous avons montré que les $\Psi^{(\ell)}(t)$ tendent fortement, presque partout dans l'intervalle (t_1, t_2) , vers un $\bar{\Psi}(t)$, solution de (3) prenant pour $t = t_1$ certaines valeurs initiales. Mais, dans cette méthode, ces valeurs initiales ne peuvent être prises totalement arbitraires : il faut que converge la série (6). Or, d'après les conditions imposées pour l'annulation de (5), les $X_k^{(\ell)}(t_1)$ sont égaux aux $X_k^{(\ell-1)}(t_1)$ pour $k = 1, 2, \dots, \ell-1$ et le choix de la valeur de $X^{(\ell)}(t_1)$ est restreint par la nécessité d'égaliser (6) au terme correspondant d'une certaine suite convergente et $X^{(\ell)}(t_1)$ va être la valeur pour $t = t_1$ de la ℓ -ème composante de $\bar{\Psi}(t_1)$. Ainsi, par exemple, les conditions initiales $U_k(t_1) = \delta_{ik}$ peuvent très bien ne pas convenir.

Malheureusement, nous ne savons pas dire si les solutions de (3) atteintes par cette méthode sont les seules solutions possibles. Cependant, il nous semble que la forme même des équations déterminant les $z_i^{(n)}(t)$ nous indique que c'est dans cette direction qu'il faut chercher. En effet les solutions principales de ces équations sont des exponentielles $e^{\alpha t}$ où α est généralement complexe de sorte que l'on peut espérer rendre compte sans nouvelle hypothèse des phénomènes de damping. Mais la complexité actuelle de la méthode ne rend pas aisé l'abord de ces problèmes.

Nous nous contenterons, pour le moment, de ce résultat purement mathématique savoir qu'avec certaines conditions initiales, on peut théoriquement trouver une solution des équations de la théorie des champs sans qu'apparaissent jamais les habituelles difficultés de divergences.
