Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

BERNARD JOUVET

Quantification des couplages non linéaires

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 27 (1957-1958), exp. nº 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1957-1958__27__A4_0>

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1957/58
-:-:-:-

3 décembre 1957

QUANTIFICATION DES COUPLAGES NON LINÉAIRES

par Bernard JOUVET

1. Introduction.

Pour faire une théorie des particules élémentaires, basée sur l'idée d'une fusion de particules plus fondamentales [2], on est conduit à chercher à résoudre le problème du traitement de couplage du type de Fermi en théorique quantique des champs [3]. Nous étudierons ici le cas le plus simple, celui du traitement d'un couplage non linéaire $(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi)$.

Nous rappellerons d'abord brièvement une méthode que nous avons utilisée dans des travaux antérieurs pour démontrer l'existence des bosons résultants de ces couplages, et calculer leurs masse et charge. Nous exposerons ensuite une nouvelle méthode qui fournit directement les équations globales des masses et des couplages de ces bosons.

Nous retrouverons alors les valeurs anciennement calculées en résolvant les équations globales par une certaine méthode d'approximation. La discussion de la validité de cette méthode d'approximation fera l'objet d'un second séminaire.

2. Méthode de perturbation pour l'obtention des charges et masses des bosons.

Soit le noyau primitif d'interaction ([4] [5] [6] et [9], représenté graphiquement par

$$(N\, N_F)^{(2)} = \;>\!< \;+\; >\!\bigcirc\!< \;+\; >\!\bigcirc\!\bigcirc\!< \;+\; \dots$$

Le calcul de la boucle $\bigcirc$ fait intervenir une intégrale divergente. L'introduction d'une coupure Λ, interprétable comme un rayon $R \sim \hbar/\Lambda$ des fermions permet de calculer la valeur

$$\bigcirc = - K_o^{(2)}(p^2\,,\Lambda)$$

(p est l'implusion portée par la boucle)
($K_o^{(2)}(p^2)$ est imaginaire pour $p^2 = 0$)

On a alors

$$(N\ N_F)^{(2)} = ig_o/1 + ig_o\ K_o^{(2)}(p^2\ ,\Lambda)\ .$$

Cette fonction présente un pôle pour la valeur $-\mu_1^2$ de p^2 lorsque

(1) $$ig_o\ K_o^{(2)}(-\ \mu_1^2\ ,\Lambda) = -\ 1$$

et le résidu à ce pôle est

(2) $$iG_1^2 = 1/K_o'^{(2)}(-\ \mu_1^2\ ,\Lambda)\ .$$

Pour $p^2 \approx -\ \mu_1^2$

$$(N\ N_F)^{(2)} \approx iG_1^2/p^2 + \mu_1^2\ .$$

Les constantes μ_1 et G_1 sont interprétables comme étant la masse et la constante de couplage d'un boson couplé au champ de fermion. Soit en effet une théorie de Yukawa, renormalisée seulement au premier ordre en G_1^2 , postulant un tel méson $(\mu_1\ ,\ G_1)$; le noyau d'interaction, qui ne contient que des boucles $\bigcirc$, est alors renormalisé et a pour valeur

$$(N\ N_Y)^{(2)} = >\!\sim\sim\!< \ +\ >\!\sim\bigcirc\sim\!< \ + \ldots = (iG_1^2/p^2 + \mu_1^2)/1 + \frac{iG_1^2}{p^2+\mu_1^2}\ K_R^{(2)}(p^2)$$

$$-\ K_R^{(2)}(p^2) = (\bigcirc)_{\text{Renormalisé}},\ \text{est tel que} \begin{cases} K_R^{(2)}(-\ \mu_1^2) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial p^2}\ K_R^{(2)}(p^2)\Big|_{p^2=-\mu_1^2} = K_R'^{(2)}(-\ \mu_1^2) = 0 \end{cases}$$

$$K_R^{(2)}(p^2\ ,\Lambda) = K_o^{(2)}(p^2\ ,\Lambda) - K_o^{(2)}(-\ \mu_1^2\ ,\Lambda) - (p^2 + \mu_1^2)\ K_o'^{(2)}(-\ \mu_1^2\ ,\Lambda)$$

on a alors $(N\ N_Y)^{(2)} = (N\ N_F)^{(2)}$ si :

$$\frac{p^2 + \mu_1^2}{iG_1^2} + [K_o^{(2)}(p^2) - K_o^{(2)}(-\ \mu_1^2) - K_o'^{(2)}(-\ \mu_1^2).(p^2 + \mu_1^2)] = \frac{1}{ig_o} + K_o^{(2)}(p^2)$$

c'est-à-dire si : $\dfrac{1}{iG_1^2} = K_o'^{(2)}(-\ \mu_1^2)$ et $-\ K_o^{(2)}(-\ \mu_1^2) = \dfrac{1}{ig_o}$ (équations (2) et (1)).

On montre ensuite que les matrices S_F et S_Y de la théorie de Fermi et de la théorie de Yukawa (incomplètement renormalisée comme plus haut) sont identiques ([7] [8] et [10]). On procède pour cela en établissant entre les séries de S_F et de S_Y une correspondance biunivoque en faisant apparaître, par des sommations partielles convenables dans chaque série, les noyaux $(N N_F)^{(2)}$ et $(NN_Y)^{(2)}$. Cette correspondance devient une égalité lorsque $(NN)_F^{(2)} = (NN)_Y^{(2)}$.

Les véritables masse et charge (μ et G) observables du boson ne sont plus μ_1 et G_1, mais la somme de ces constantes et des corrections apportées par les termes de polarisation du vide d'ordre supérieur au second.

Seulement, sous l'hypothèse que la série des termes de polarisation du vide est fortement convergente, on peut dire que $\mu \approx \mu_1$ et $G \approx G_1$, valeurs données par les équations (1) et (2).

Remarquons que la valeur de la constante de couplage est indépendante, à cette approximation, de la valeur de la constante de Fermi, qui seule intervient pour fixer la masse du boson.

Connaissant par l'expérience les valeurs des constantes de couplage des mésons existant avec les paires connues de fermion, on détermine, avec les équations qui généralisent l'équation (2) lorsqu'on traite un mélange de couplages de Fermi faisant intervenir les paires convenables de fermions, les valeurs des constantes de régularisation Λ_m (correspondant aux rayons $R_m \sim \frac{tr}{\Lambda_m}$ des fermions de masse m). Par exemple :

Boson	couplage de Fermi	Valeur des rayons des Fermions
Photon	g J_μ(électron).J_μ(neutrino)	$\Lambda_e \approx m_e\, e^{3\pi.137}$; $\frac{\Lambda_\nu}{m_\nu} \longrightarrow \infty$
Méson π	g J_5(nucléon).$J_5(\mu, \nu)$	Λnucl $\approx$ Mnucl

On trouve que la loi expérimentale de coupure ([6] et [9]) est telle que (Λ_m/m) croit très rapidement avec (m) . Cette loi a aussi été obtenue par LANDAU ([12] , [13] , [14] et [15] à partir d'autres considérations, dont nous parlerons au paragraphe suivant.

3. Equations globales des charges et des matrices des bosons.

a. Rappel de la renormalisation de la théorie de Yukawa. - Si μ et G sont les constantes observables de la masse et de la charge mésique d'un boson, représenté par un champ A couplé au champ ψ des fermions de masse m , le lagrangien renormalisé de la théorie de Yukawa est :

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
L_Y = \; & -\bar{\psi}(\gamma\partial + m)\psi - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A \partial_\mu A + \mu^2 A^2) + GA\bar{\psi}\psi \\
& -(Z_2 - 1)\bar{\psi}(\gamma\partial + m)\psi - \partial m \bar{\psi}\psi \\
& -\tfrac{1}{2}(Z_3 - 1)(\partial_\mu A \partial_\mu A + \mu^2 A^2) - \tfrac{1}{2}\partial\mu^2 A^2 \\
& + (Z_1 - 1) GA\bar{\psi}\psi
\end{aligned}
$$

Posant,

$$
\psi_o = \sqrt{Z_2}\,\psi, \quad A_o = \sqrt{Z_3}\,A, \quad G_o = G\frac{Z_1}{\sqrt{Z_3}.Z_2}, \quad \mu_o^2 = \mu^2 + \frac{\partial\mu^2}{Z_3}, \quad m_o = m + \frac{\partial m}{Z_2}
$$

on a :

$$
(4) \quad L_Y = -\bar{\psi}_o(\gamma\partial + m_o)\psi_o - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A_o \partial_\mu A_o + \mu_o^2 A_o^2) + G_o A_o \bar{\psi}_o \psi_o \; .
$$

On appelle ψ_o , A_o , m_o , G_o et μ_o les grandeurs nues, qui sont généralement différentes des grandeurs observables (ψ , A , G , μ , m) . Les lignes 2 , 3 , et 4 de la formule (3) sont des contre-termes qui ont pour effet qu'à chaque ordre de la théorie de perturbation en G , les valeurs des grandeurs observables ne soient pas modifiées par les termes de polarisation du vide. Les constantes Z_i , ∂m et $\partial\mu^2$ sont infinies à tout ordre de la théorie de perturbation, et on est obligé, pour les calculer avec cette méthode, d'introduire des constantes de coupure Λ . Cependant on peut aussi les définir globalement ; ce sont alors des fonctions $Z_i(G , m\mu)$ et, $\partial m(G , m , \mu)$ et $\partial\mu^2(G , m , \mu)$. La question de savoir si ces fonctions ont des valeurs bien définies pour toute valeur de leurs arguments, sans que des coupures soient introduites, sera discutée dans notre prochain exposé ; nous supposerons dans les considérations qui suivent que c'est bien le cas.

b. <u>Théorème d'équivalence</u> [11]. - Le lagrangien de la théorie de Fermi est :

$$
(5) \qquad L_F = -\bar{\psi}_o(\gamma\partial + m_o)\psi_o + \frac{g_o}{2}(\bar{\psi}_o \psi_o)(\bar{\psi}_o \psi_o) \; .
$$

Le champ ψ_o et les constantes m_o et g_o sont par hypothèse des grandeurs nues. Les grandeurs observables ψ, m et g sont des fonctions des grandeurs nues et ne leurs sont généralement pas égales.

Comparant alors les éléments de la matrice $\langle S_Y\rangle_{om}$ de Yukawa proportionnels à G_o^{2n} et pour lesquels il n'y a pas de mésons réels présents, avec ceux de la matrice S_F de Fermi d'ordre g_o^n , on voit qu'ils se correspondent biunivoquement, la constante g_o intervenant dans les termes de S_F aux mêmes lieux que l'expression $G_o^2/p^2 + \mu_o^2$ dans ceux de $(S_Y)_{om}$.

$$ >^{g_0}< \;\longleftrightarrow\; \underset{G_0^2/p^2+\mu_0^2}{>\!\sim\!\sim\!<} $$

Les deux matrices sont égales si $g_0 = G_0^2/p^2 + \mu_0^2$ donc si $G_0^2 = \infty$, $\mu_0^2 = \infty$, $G_0^2/\mu_0^2 = g_0$.

Exprimant ces conditions en termes des grandeurs observables, de la théorie de Yukawa, on obtient les deux équations :

(I) $Z_3(G^2 , m , \mu^2) = 0$ Equation de la charge

(II) $\delta\mu^2(G^2 , m , \mu^2) = G^2(\frac{Z_1}{Z_2})^2/g_0$ Equation de la masse.

REMARQUES.- 1° Une démonstration formelle plus simple peut être faite directement à partir des lagrangiens ; il suffit de porter la condition (I) dans la formule (3), et d'éliminer le champ A qui est déterminé par les conditions qu'aucun méson réel n'existe aux instants $\pm\infty$, pour obtenir le lagrangien de Fermi (5), dans lequel la constante g_0 est donnée par (II).

La condition qu'il n'y ait pas de méson présent aux instants $\pm\infty$, implique que, si S_F est unitaire, le méson doit être instable ; c'est le cas si $\mu > 2m$.

2° Si on veut résoudre les équations (I) et (II) en théorie de perturbation en G , on a

$$ Z_3 = 1 - iG^2\, K_0'^{(2)}(-\mu^2) + \mathcal{O}(G^4) \;\ldots $$
$$ \delta\mu^2 = 1 - iG^2\, K_0^{(2)}(-\mu^2) + \mathcal{O}(G^4) \;\ldots $$

la fonction $K_0^{(2)}(p^2)$ étant définie du paragraphe 2 .

Les équations (I) et (II) donnent respectivement

$$ \text{(I)} \rightarrow \left(i\, K_0'^{(2)}(-\mu_1^2) = \frac{1}{G_1^2}\right) = \text{équations (2)} $$

$$ \text{(II)} \rightarrow \left(i\, K_0^{(2)}(-\mu_1^2) = \frac{1}{g_0}\right) = \text{équations (1)} $$

les constantes G_1 et μ_1 étant les 1res approximations des vraies constantes G et μ . On peut comprendre maintenant pourquoi LANDAU a trouvé les mêmes lois de coupures que celles déterminées au paragraphe 2 ; il déterminait en effet les constantes de régularisation Λ telles que $Z_3(G , \Lambda) \geqslant 0$, alors que la méthode que nous avions employée était équivalente à calculer les Λ tels que $Z_3(G, \Lambda) = 0$.

c. Equations des charges et des masses. - Nous avons obtenu les équations (I) et (II) qui déterminent en principe les valeurs de G et μ en fonction de m et g_o. Mais la constante g_o est inconnue et non mesurable (constante nue). Il est donc nécessaire de déterminer la relation entre cette constante et la constante de Fermi observable. Nous définissons la constante de Fermi observable, g_F, comme la valeur de l'élément de matrice de diffusion de deux fermions lorsque ces deux fermions ont des impulsions nulles. Utilisant le théorème d'équivalence, on calcule, en tenant compte de la définition de la constante observable G par Kroll et Ruderman, que

$$\text{(II')} \qquad g_F = G^2 \Delta'_F(p^2 = 0, G^2, \mu^2, m)$$

($\Delta'_F(p^2 = 0)$ étant la valeur du propagateur de méson renormalisé pour $p^2 = 0$). Cette définition fournit en fait une relation entre G et μ, si on suppose donnée la valeur de g_F. Les relations (I) et (II') ne doivent donc pas être indépendantes de la relation (II).

Pour le montrer il faut pouvoir exprimer g_o en fonction de g_F, c'est-à-dire qu'il faut renormaliser la théorie de Fermi. On y arrive en montrant qu'une théorie de Yukawa pour laquelle les constantes des bosons satisfont (I) et (II') est identique à une théorie de Fermi dans laquelle la constante nue est

$$g_o = g_F (Z_1/Z_2)^2 / 1 - i g_F \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 K_o(p^2 = 0)$$

on peut voir alors que la relation (II) est bien vérifiée. Finalement :

Si la constante fondamentale g_o est connue, les équations déterminant G et μ sont (I) et (II). Si au contraire, (ce qui est le cas présentement) la constante g_o est inconnue, mais la constante observable g_F est mesurée, les équations pour G et μ sont (I) et (II').

REMARQUE. - Le théorème d'équivalence permet de démontrer que la théorie de Fermi est globalement renormalisable alors qu'elle ne l'est pas en théorie de perturbation. La présente méthode permet de voir d'où viennent les obstacles.

d. Conclusion. - Nous avons vu que la donnée d'un couplage de Fermi conduit à prévoir l'existence de boson dont la masse μ et la constante de couplage avec les fermions, G, sont déterminées par deux équations (I) et (II) ou (II').

Nous avons admis pour cette démonstration que les constantes de renormalisation de la théorie de Yukawa sont des fonctions bien déterminées des constantes observables de cette théorie. Cependant nous avons vu que la solution de ces équations par la méthode de perturbation ne fournit pas des constantes bien déterminées car il est nécessaire d'introduire des constantes arbitraires de régularisation (constante Λ). Deux points de vue opposés peuvent donc être envisagés :

1° la donnée d'un couplage de Fermi est une donnée incomplète ; ce serait le cas si la méthode de perturbation est valable pour calculer (I), ou bien si les constantes de renormalisation ne sont pas des fonctions bien définies des constantes de la théorie.

2° Au contraire, la donnée d'un couplage de Fermi est une donnée complète, auquel cas il existe une solution bien définie de l'équation (I) ; il est clair que si tel est le cas, la théorie de perturbation n'est pas valable pour résoudre (I).

Nous discuterons dans notre prochain exposé des éléments dont on dispose à l'heure actuelle pour décider de ces deux éventualités.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABRIKOSOV (A.A.), GALANIN (A.D.) i KHALATNIKOV (I.M.). - Funkcii grina v teorii mezonov so slaboj psevdoskaljarnoj svjaz'ju, Doklady Akad. Nauk SSSR., t. 97, 1954, p. 793-796.

[2] de BROGLIE (Louis). - Une nouvelle conception de la lumière. - Paris, Hermann, 1934 (Act. scient. et ind., n° 181, Exposés de Physique théorique, n° 13).

[3] HEISENBERG (Werner). - Zur Quantisierung nichtlinearer Gleichungen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., Math.-phys.-chem. Abt., 1953, p. 111-127.

[4] HEISENBERG (W.), KORTEL (F.) und MITTER (H.). - Zur Quantentheorie nichtlinearer Wellengleichungen, III., Z. für Naturf., t. 10a, 1955, p. 425-446.

[5] HEISENBERG (W.) und von ASCOLI (R.). - Zur Quantentheorie nichtlinearer Wellengleichungen, IV., Z. für Naturf., t. 12a, 1957, p. 177-187.

[6] JOUVET (Bernard). - Introduction à une théorie électro-neutrinienne du photon, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 237, 1953, p. 1642-1644.

[7] JOUVET (Bernard). - L'électromagnétisme électroneutrinien, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 33, 1954, p. 201-262.

[8] JOUVET (Bernard). - Théorie réaliste des mésons, Séminaire Louis de Broglie, t. 24, 1954/55.

[9] JOUVET (Bernard). - A realistic theory of mesons, Nuovo Cimento, Suppl., Série 10, t. 2, 1955, p. 941-968.

[10] JOUVET (Bernard). - Les couplages de Fermi et la théorie des bosons, Nuovo Cimento, Suppl., Série 10, t. 4, 1956, p. 738-742.

[11] JOUVET (Bernard). - Fermi coupling and mass and charge spectra of bosons, Nuovo Cimento, Série 10, t. 5, 1957, p. 1-20.

[12] LANDAU (L.D.), ABRIKOSOV (A.A.) i KHALATNIKOV (I.M.). - Ob ustranenii beskonečnostej v kvantovoj, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 95, 1954, p. 497-500.

[13] LANDAU (L.D.), ABRIKOSOV (A.A.) i KHALATNIKOV (I.M.). - Asimptotičeskoe vyraženie dlja grinovskoj funkcii èlektrona v kvantovoj èlektrodinamike, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 95, 1954, p. 773-776.

[14] LANDAU (L.D.), ABRIKOSOV (A.A.) i KHALATNIKOV (I.M.). - Asimptotičeskoe vyraženie dlja grinovskoj funkcii fotona v krantovoj èlektrodinamike, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 95, 1954, p. 1177-1180.

[15] LANDAU (L.D.), ABRIKOSOV (A.A.) i KHALATNIKOV (I.M.). - Massa èlektrona v kvantovoj èlektrodinamike, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 96, 1954, p. 261-264.