Séminaire L. de Broglie.
Théories physiques

J. Winogradzki

Retournements de l'espace, du temps et de l'univers et représentations spinorielles fondamentales du groupe de Lorentz général

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 27 (1957-1958), exp. n° 10, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1957-1958__27__A9_0>

-:-:-:-

Séminaire de THÉORIES PHYSIQUES
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1957/58

28 janvier 1958

-:-:-:-

RETOURNEMENTS DE L'ESPACE, DU TEMPS ET DE L'UNIVERS ET REPRÉSENTATIONS SPINORIELLES FONDAMENTALES DU GROUPE DE LORENTZ GÉNÉRAL

par Mme J. WINOGRADZKI

L'application de l'algorithme spinoriel à l'étude d'un problème physique peut être facilitée par l'adoption d'une représentation spinorielle particulière. On sait le service que rendent certaines représentations devenues classiques. Dans ce travail, nous étudions les représentations spinorielles du groupe de Lorentz général qui sont les plus simples pour les retournements de l'espace, du temps et de l'Univers.

Chapitre I. Les représentations normales.

1. Définition des représentations normales.

Considérons les trois groupes de deux éléments contenant, en dehors de la transformation identique, l'un des trois retournements fondamentaux :

- le retournement de l'espace

(1.1) $$x^\alpha \rightarrow - x^\alpha \ , \quad x^4 \rightarrow x^4 \ ,$$

- le retournement du temps

(1.2) $$x^\alpha \rightarrow x^\alpha \ , \quad x^4 \rightarrow - x^4 \ ,$$

- le retournement de l'Univers

(1.3) $$x^k \rightarrow - x^k \ .$$

(Les indices grecs prennent les valeurs 1 à 3, les indices latins 1 à 4 ; $x^4 = ict$. Les systèmes de référence sont orthonormaux). Ces trois groupes sont des sous-groupes du groupe de Lorentz général. Nous appelons "normales" les représentations spinorielles de groupe de Lorentz général, réduites, pour l'un de ces trois sous-groupes, en représentations de dimension 1.

Il résulte de cette définition que trois types de représentations normales sont à distinguer, suivant la nature du retournement figurant dans la définition ("retournement caractéristique"). Ils seront désignés par (E) , (T) et (U) .

2. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation spinorielle soit normale.

Comme il est bien connu, la matrice de transformation spinorielle s'écrit pour le retournement de l'espace (1.1)

$$\underset{E}{S} = \pm \underset{E}{\lambda} \gamma^4 , \tag{2.1}$$

pour le retournement du temps (1.2)

$$\underset{T}{S} = \pm \underset{T}{\lambda} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \tag{2.2}$$

et pour le retournement de l'Univers (1.3)

$$\underset{U}{S} = \pm \underset{E}{\lambda} \underset{T}{\lambda} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 . \tag{2.3}$$

γ^k sont les matrices de Dirac, c'est-à-dire quatre matrices d'ordre quatre satisfaisant à la condition

$$\frac{1}{2}(\gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i) = \delta^{ik} I \tag{2.4}$$

(I est la matrice unité d'ordre quatre). $\underset{E}{\lambda} = 1$ ou i , $\underset{T}{\lambda} = 1$ ou i .

Leurs valeurs déterminent la flectovariance du spineur $\Psi \equiv \overset{\overset{\lambda}{T}}{\underset{\underset{E}{\lambda}}{\Psi}}$ considéré [4] .

Ainsi, pour qu'une représentation spinorielle soit normale, il faut et il suffit que l'une des trois matrices γ^4 , $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$ soit diagonale.

Or

$$(\gamma^4)^2 = -(\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3)^2 = (\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4)^2 = I \tag{2.5}$$

$$Tr(\gamma^4) = Tr(\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = Tr(\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4) = 0 \tag{2.6}$$

Si l'une des trois matrices γ^4 , $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$ est diagonale, l'une des trois matrices γ^4, $i \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4$ est donc égale, à l'ordre des éléments près, à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \hat{1} & \\ & -\hat{1} \end{pmatrix} , \tag{2.7}$$

$\hat{1}$ étant la matrice unité d'ordre 2.

3. Forme des matrices de Dirac normales.

Les matrices diagonales ou antidiagonales par rapport aux sous-matrices joueront un grand rôle dans ce qui suit.

Pour alléger le langage, nous appellerons "gonales" les matrices diagonales ou antidiagonales, "quasi-gonales", "quasi-diagonales" ou "quasi-antidiagonales" les matrices d'ordre $2n$ gonales, diagonales ou antidiagonales par rapport aux sous-matrices d'ordre n.

Pour déterminer la forme des matrices de Dirac "normales" - matrices de Dirac correspondant à une représentation normale - utilisons le fait qu'une matrice commutant avec J est quasi-diagonale et qu'une matrice anticommutant avec J est quasi-antidiagonale.

Chacune des matrices γ^k commute ou anticommute avec chacune des matrices γ^4, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$. Les matrices de Dirac normales sont donc quasi-gonales.

La définition des trois matrices γ^4, $(\pm)\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $(\pm)\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ est symétrique par rapport aux trois indices d'espace. Par conséquent, chacune d'entre elles ou bien commute avec les trois matrices γ^α ou bien anticommute avec ces trois matrices. Les trois matrices γ^α, appartenant à un même jeu de matrices de Dirac normales, sont donc toutes du même genre : toutes quasi-diagonales ou toutes quasi-antidiagonales.

Comme il n'existe pas de jeux de matrices de Dirac dont les quatre matrices seraient quasi-diagonales, (1) trois cas seulement peuvent se présenter :

I. - γ^k quasi-antidiagonales,

II. - γ^α quasi-antidiagonales, γ^4 quasi-diagonale,

III. - γ^α quasi-diagonales, γ^4 quasi-antidiagonale.

Dans chacun de ces trois cas, une seule des trois matrices γ^4, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ est quasi-diagonale. La nature de cette matrice détermine donc le type de la représentation. C'est $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ qui est quasi-diagonale dans le cas (I), γ^4 dans le cas (II) et $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ dans le cas (III). Les représentations (I) sont donc de type (U), les représentations (II) de type (E) et les représentations (III) de type (T).

Inversement, des matrices de Dirac quasi-gonales, les trois matrices γ^α étant du même genre, forment un jeu de matrices de Dirac normales.

---

(1) Sinon il existerait quatre matrices du second ordre satisfaisant à la condition

$$\frac{1}{2}(\gamma^i\gamma^k + \gamma^k\gamma^i) = \delta^{ik}\hat{1}$$

En effet, dans ce cas, les trois matrices $\gamma^\alpha\gamma^\beta$ et l'une des trois matrices γ^4, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ sont quasi-diagonales. Les trois matrices $\gamma^\alpha\gamma^\beta$ anticommutent entre elles. Chacune des matrices γ^4, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ commute avec les trois matrices $\gamma^\alpha\gamma^\beta$. Une matrice d'ordre deux, commutant avec trois matrices d'ordre deux non singulières anticommutant entre elles, est proportionnelle à la matrice $\hat{1}$. Les sous-matrices d'une matrice d'ordre quatre quasi-diagonale, commutant avec trois matrices d'ordre quatre quasi-diagonales non singulières anticommutant entre elles, sont donc également proportionnelles à la matrice $\hat{1}$.

4. - Propriété principale des représentations normales.

Les représentations spinorielles normales du groupe de Lorentz général ont été définies comme les représentations spinorielles, réduites, pour certains groupes de deux éléments, en représentationsde dimension 1. Cherchons les sous-groupes du groupe de Lorentz général pour lesquels les représentations normales sont réduites en représentations de dimension 2.

Comme il est bien connu, la matrice de transformation spinorielle s'écrit pour la rotation de l'angle θ de x^k vers x^m

$$S_{km} = \cos\frac{\theta}{2}\, I - \sin\frac{\theta}{2}\, \gamma^k\gamma^m \quad . \tag{4.1}$$

(L'angle θ est réel ou imaginaire suivant la nature du plan $x^k x^m$).

En U-représentation, les six matrices $\gamma^k\gamma^m$ sont quasi-diagonales et, par conséquent, aussi S_{km}. En représentations de dimension 2, les U-représentations sont donc réduites pour le groupe de Lorentz propre (2).

En E-représentation et en T-représentation, les trois matrices $\gamma^\alpha\gamma^\beta$ sont quasi-diagonales et, par conséquent, aussi $S_{\alpha\beta}$. En représentations de dimension 2, les E-représentations sont donc réduites pour le groupe des rotations et retournements spatiaux, les T-représentations pour le groupe des rotations spatiales et du retournement du temps.

De ce qui précède, on déduit une nouvelle définition des représentations normales : représentations spinorielles du groupe de Lorentz général, réduites, en

(2) Sous-groupe du groupe de Lorentz général pour les transformations duquel $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right) = +1$.

représentations de dimension 2, pour un groupe contenant les rotations spatiales et l'un des trois retournements fondamentaux. (3)

En effet, dans de telles représentations, les trois matrices $\gamma^\alpha\gamma^\beta$ et l'une des trois matrices γ^4 , $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ sont quasi-diagonales. Que des matrices de Dirac satisfaisant à cette condition sont normales, a été démontré au paragraphe 3.

5. Représentations normales du groupe des retournements de l'espace, du temps et de l'Univers (4).

Il résulte de la forme des matrices de Dirac normales qu'en représentation normale la matrice de transformation spinorielle est quasi-gonale pour chacun des trois retournements fondamentaux. D'où l'intérêt d'écrire, en représentation normale, les lois de transformation des spineurs pour les retournements de l'espace, du temps et de l'Univers en mettant en évidence les semi-spineurs.

1° En représentation normale, pour le retournement caractéristique, la matrice de transformation spinorielle s'écrit

$$S = \pm \underset{1}{\lambda} \; J , \tag{5.1}$$

le coefficient $\underset{1}{\lambda}$ étant égal, d'après (2.1), (2.2) et (2.3), à $\underset{E}{\lambda}$, i $\underset{T}{\lambda}$ ou $\underset{E}{\lambda}$ $\underset{T}{\bar{\lambda}}$, suivant la nature du retournement caractéristique. Donc, en représentation normale, pour le retournement caractéristique, chaque semi-spineur se transforme en lui-même, au coefficient ± 1 ou $\pm i$ près; les deux semi-spineurs étant de parités relatives opposées :

$$\varphi \rightarrow \pm \underset{1}{\lambda} \, \varphi \; , \; \psi \rightarrow \mp \underset{1}{\lambda} \, \psi \; . \tag{5.2}$$

(φ et ψ désignent les semi-spineurs Ψ^1 , Ψ^2 et Ψ^3 , Ψ^4 d'un spineur de Dirac Ψ^k).

2° En représentation normale, pour chacun des deux retournements fondamentaux non caractéristiques, la matrice de transformation spinorielle est quasi-antidiagonale

---

(3) La quasi-diagonalité des matrices $\gamma^\alpha\gamma^\beta$ et $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ entraîne celle des matrices $\gamma^\alpha\gamma^4$. Les représentations spinorielles réduites pour le groupe des rotations spatiales et du retournement de l'Univers et celles réduites pour le groupe de Lorentz propre sont donc les mêmes.

(4) Groupe de quatre éléments contenant, en dehors de la transformation identique, ces trois retournements.

et, par conséquent, chaque semi-spineur se transforme en une fonction de l'autre.

Chapitre II. Les six représentations fondamentales.

6. Condition supplémentaire imposée à la loi de transformation des semi-spineurs pour les retournements fondamentaux non caractéristiques.

En représentation normale quelconque, pour chacun des deux retournements fondamentaux non caractéristiques, chaque semi-spineur se transforme en une fonction de l'autre. Pour un de ces deux retournements, imposons à ces fonctions une forme aussi simple que possible, en posant :

$$(6.1) \qquad \varphi \to \pm \underset{2}{\lambda} \psi , \quad \psi \to \pm \varepsilon \underset{2}{\lambda} \varphi \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

avec $\underset{2}{\lambda} = 1$ ou i . (On ne peut pas poser $\underset{2}{\lambda} = 1$. La valeur de $\underset{2}{\lambda}$ dépend en effet de la flectovariance du spineur considéré. Si $\underset{2}{\lambda} = 1$ pour certains spineurs, $\underset{2}{\lambda} = i$ pour les autres).

La loi de transformation pour le dernier retournement fondamental se trouve ainsi déterminée. On obtient, en effectuant successivement, dans un ordre quelconque, les transformations (5.2) et (6.1) :

$$(6.1') \qquad \varphi \to \pm \underset{3}{\lambda} \psi , \quad \psi \to \mp \varepsilon \underset{3}{\lambda} \varphi .$$

$\underset{3}{\lambda} = 1$ ou i . Les trois coefficients $\underset{\alpha}{\lambda}$ sont liés par la relation

$$(6.2) \qquad \underset{1}{\lambda} \underset{2}{\lambda} \underset{3}{\lambda} = \pm 1 .$$

7. Définition des représentations fondamentales.

Les matrices de transformation spinorielle correspondant aux lois de transformation (6.1) et (6.1') sont

$$(7.1) \qquad S = \pm \underset{2}{\lambda} \begin{pmatrix} & \hat{1} \\ \varepsilon \hat{1} & \end{pmatrix} , \qquad S = \pm \underset{3}{\lambda} \begin{pmatrix} & \hat{1} \\ -\varepsilon \hat{1} & \end{pmatrix}$$

La matrice de transformation spinorielle pour le retournement de l'espace, du temps ou de l'Univers est proportionnelle à γ^4 , $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ou $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$. Celles des trois matrices γ^4 , $i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ et $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ qui ne sont pas égales à J , sont donc égales, compte tenu de (2.5), à

$$(7.2) \qquad K = \begin{pmatrix} & \hat{1} \\ \hat{1} & \end{pmatrix} , \qquad L = \begin{pmatrix} & i\hat{1} \\ -i\hat{1} & \end{pmatrix} ,$$

au signe près.

Les trois matrices J , K , L peuvent s'écrire, en utilisant la multiplication de Kronecker (5),

(7.3) $$J = \sigma^1 \times \hat{1}\ ,\quad K = \sigma^2 \times \hat{1}\ ,\quad L = \sigma^3 \times \hat{1}\ ,$$

σ^α étant les trois matrices de Pauli

(7.4) $$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix},\quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}$$

Ainsi, la condition pour que les semi-spineurs obéissent, pour les trois retournements fondamentaux, aux lois de transformation (5.2), (6.1) et (6.1') s'écrit (en fixant arbitrairement les deux premiers signes)

(7.5) $$\gamma^4 = \sigma^\nu \times \hat{1}\ ,\quad i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \sigma^\mu \times \hat{1}\ ,\quad \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \pm\sigma^\omega \times 1 \quad \nu \neq \mu \neq \omega$$

deux quelconques de ces équations entraînant la troisième.

Il reste à déterminer les trois matrices γ^α.

Comme les quatre matrices σ^α , $\sigma^4 = \hat{1}$ sont linéairement indépendantes, toute matrice d'ordre quatre peut s'écrire $a^k \times \sigma^k$ (6), a^k étant quatre matrices d'ordre deux. Quelles que soient les matrices γ^α , on peut donc les écrire

(7.6) $$\gamma^\alpha = \overset{\alpha k}{a} \times \sigma^k\ .$$

Les trois matrices γ^α anticommutent avec γ^4 et $\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$:

(7.7) $$[\gamma^\alpha, \gamma^4]_+ = [\gamma^\alpha, \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4]_+ = 0$$

Compte tenu de (7.5) et (7.6),

(7.8) $$[\gamma^\alpha,\ \gamma^4]_+ = [\overset{\alpha k}{a}, \sigma^\nu]_+ \times \sigma^k\ ,$$

(7.9) $$[\gamma^\alpha, \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4]_+ = \pm[\overset{\alpha k}{a}, \sigma^\omega]_+ \times \sigma^k\ .$$

---

(5) a et b étant deux matrices du second ordre

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1^1\, b & a_2^1\, b \\ a_1^2\, b & a_2^2\, b \end{pmatrix}$$

Rappelons que $(a \times b)(c \times d) = ac \times bd$.

(6) avec la condition de sommation habituelle.

Pour qu'une matrice $a^k \times \sigma^k$ soit nulle, il faut que les quatres matrices a^k soient nulles. Donc, d'après (7.7),

(7.10) $$[\overset{\alpha k}{a}, \sigma^{\nu}]_+ = [\overset{\alpha k}{a}, \sigma^{\omega}]_+ = 0 \ .$$

Puisque les matrices $\overset{\alpha k}{a}$ anticommutent avec σ^{ν} et σ^{ω}, elles sont proportionnelles à σ^{μ} :

(7.11) $$\overset{\alpha k}{a} = \overset{\alpha k}{\underset{o}{a}} \sigma^{\mu}$$

$\overset{\alpha k}{\underset{o}{a}}$ étant des nombres ordinaires. L'équation (7.6) s'écrit donc

(7.12) $$\gamma^{\alpha} = \overset{\alpha k}{\underset{o}{a}} \sigma^{\mu} \times \sigma^{k} = \sigma^{\mu} \times \overset{\alpha k}{\underset{o}{a}} \sigma^{k}$$

ou

(7.13) $$\gamma^{\alpha} = \sigma^{\mu} \times \tau^{\alpha} \ ,$$

τ^{α} étant trois matrices quelconques.

Les trois matrices (7.13) forment avec γ^4 un jeu de matrices de Dirac, si elles satisfont à la condition (2.4) aussi pour k , $m \neq 4$, c'est-à-dire, comme d'après (7.13)

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} = \hat{1} \times \tau^{\alpha}\tau^{\beta}$$

si les τ^{α} satisfont à la condition

(7.14) $$\frac{1}{2}(\tau^{\alpha}\tau^{\beta} + \tau^{\beta}\tau^{\alpha}) = \delta^{\alpha\beta}\hat{1}$$

Les équations (7.13), (7.5) et (7.14) déterminent 6 classes de représentations spinorielles. Chaque classe est caractérisée par la valeur des indices μ et ν . D'après (7.5), les matrices S_E , S_T et S_U sont identiques pour toutes les représentations d'une même classe. C'est pourquoi nous ne garderons qu'une représentation par classe. On extrait une représentation de chaque classe, en choisissant un jeu de matrices τ^{α} déterminé. Adoptons pour matrices τ^{α} les matrices les plus simples satisfaisant à la condition (7.14), c'est-à-dire les matrices de Pauli.

Les matrices de Dirac (7.5), (7.13) s'écrivent alors

(7.15) $$\boxed{\gamma^{\alpha} = \sigma^{\mu} \times \sigma^{\alpha} \ , \qquad \gamma^{4} = \sigma^{\nu} \times \hat{1}} \qquad \mu \neq \nu$$

Ou, explicitement,

$$
(7.16)\quad \begin{cases}
(a)\quad \mu = 1\,,\ \nu = 2\ :\ \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} \sigma^\alpha & \\ & -\sigma^\alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} & \hat{1} \\ \hat{1} & \end{pmatrix} \\
(b)\quad \mu = 1\,,\ \nu = 3\ :\ \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} \sigma^\alpha & \\ & -\sigma^\alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} & i\,\hat{1} \\ -i\,\hat{1} & \end{pmatrix} \\
(c)\quad \mu = 2\,,\ \nu = 3\ :\ \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} & \sigma^\alpha \\ \sigma^\alpha & \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} & i\,\hat{1} \\ -i\,\hat{1} & \end{pmatrix} \\
(d)\quad \mu = 2\,,\ \nu = 1\ :\ \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} & \sigma^\alpha \\ \sigma^\alpha & \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \\ & -\hat{1} \end{pmatrix} \\
(e)\quad \mu = 3\,,\ \nu = 1\ :\ \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} & i\sigma^\alpha \\ -i\sigma^\alpha & \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \\ & -\hat{1} \end{pmatrix} \\
(f)\quad \mu = 3\,,\ \nu = 2\ :\ \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} & i\sigma^\alpha \\ -i\sigma^\alpha & \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} & \hat{1} \\ \hat{1} & \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

Nous appellerons "fondamentales" les six représentations spinorielles correspondantes.

Le type d'une représentation fondamentale dépend de la nature de l'indice égal à 1 :

si $\mu = 1$, la représentation est une T-représentation,

si $\nu = 1$, la représentation est une E-représentation,

si $\omega = 1$ $(\omega \neq \mu, \nu)$ la représentation est une U-représentation.

Il y a donc deux représentations fondamentales de chaque type.

REMARQUE. - Les deux représentations classiques (1) et (2) sont les représentations fondamentales $\mu = 3$, $\nu = 1$ et $\mu = 3$, $\nu = 2$.

8. <u>Relation entre les six jeux de matrices de Dirac fondamentales</u>.

γ^k étant un jeu de matrices de Dirac quelconque, considérons les 16 matrices linéairement indépendantes

$$
I\,,\ \gamma^1\,,\ \ldots\,,\ i\gamma^2\gamma^3\,,\ \ldots\,,\ i\gamma^2\gamma^3\gamma^4\,,\ \ldots\,,\ \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\ .
$$

De cet ensemble, on peut évidemment extraire des jeux de matrices de Dirac autres que γ^k . Six d'entre eux seulement sont symétriques par rapport aux indices d'espace :

$$(8.1)\quad \begin{cases} \gamma^\alpha,\ \gamma^4\ ; & \gamma^\alpha, \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\ ; \\ i\gamma^\alpha\gamma^4,\ i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\ ; & i\gamma^\alpha\gamma^4,\ \gamma^4\ ; \\ i\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^4,\ \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\ ; & i\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^4,\ i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\ . \end{cases}$$

Si γ^k correspond à une représentation fondamentale, ces six jeux s'écrivent :

$$(8.2)\quad \begin{cases} \sigma^\mu \times \sigma^\alpha,\ \sigma^\nu \times \hat{1}\ ; & \sigma^\mu \times \sigma^\alpha,\ \mp \sigma^\omega \times \hat{1}\ ; \\ \pm\ \sigma^\omega \times \sigma^\alpha,\ \sigma^\mu \times \hat{1}\ ; & \pm\ \sigma^\omega \times \sigma^\alpha,\ \sigma^\nu \times \hat{1}\ , \\ \sigma^\nu \times \sigma^\alpha,\ \mp\sigma^\omega \times \hat{1}\ ; & \sigma^\nu \times \sigma^\alpha,\ \sigma^\mu \times \hat{1}\ . \end{cases}$$

(Le signe supérieur est valable, si $\mu\nu$ sont égaux aux indices d'une composante principale : 23, 31 ou 12). A des signes près, les six jeux de matrices de Dirac (8.2) correspondent aux six représentations fondamentales.

9. Représentation fondamentale du sous-groupe des rotations tri-dimentionnelles.

Une rotation spatiale quelconque peut être réalisée par une suite de rotations dans les plans orthogonaux. On peut considérer ces plans comme plans de coordonnées $x^\alpha x^\beta$. D'après (4.1), la matrice de transformation spinorielle pour une rotation dans le plan $x^\alpha x^\beta$ ne dépend des matrices de Dirac que par l'intermédiaire des produits $\gamma^\alpha\gamma^\beta$. En représentation fondamentale,

$$(9.1)\qquad \gamma^\alpha\gamma^\beta = \hat{1} \times \sigma^\alpha\sigma^\beta$$

et les produits $\gamma^\alpha\gamma^\beta$ sont indépendants de la valeur des indices μ et ν. les six représentations fondamentales du sous-groupe des rotations spatiales sont donc identiques.

Les représentations fondamentales sont des représentations normales particulières. Comme telles, elles sont réduites pour le sous-groupe des rotations spatiales : pour les transformations de ce sous-groupe les semi-spineurs φ et ψ se transforment séparément, fournissant ainsi deux représentations d'ordre deux du sous-groupe des rotations spatiales. Montrons que ces deux représentations sont identiques.

En représentation fondamentale, pour la rotation de l'angle θ de x^α vers x^β, la matrice de transformation spinorielle s'écrit, d'après (4.1) et (9.1),

$$(9.2)\qquad \underset{\alpha\beta}{S}(\theta) = \hat{1} \times (\cos\frac{\theta}{2}\,\hat{1} - \sin\frac{\theta}{2}\,\sigma^\alpha\sigma^\beta)\ .$$

Ou α, β, γ formant une permutation paire,

(9.3) $$\underset{\alpha\beta}{S}(\Theta) = \hat{1} \times (\cos\frac{\Theta}{2}\hat{1} + i\sin\frac{\Theta}{2}\sigma^{\gamma}) .$$

Or, s' et s" désignant des matrices d'ordre deux quelconques,

$$(\hat{1} \times s')(\hat{1} \times s'') = \hat{1} \times s' s'' .$$

En représentation fondamentale, la matrice de transformation spinorielle est donc bien de la forme

(9.4) $$\underset{(3)}{S} = \hat{1} \times s = \begin{pmatrix} s & \\ & s \end{pmatrix}$$

pour toute rotation spatiale.

Les trois matrices $\cos\frac{\Theta}{2}\hat{1} + i\sin\frac{\Theta}{2}\sigma^{\gamma}$ sont unitaires. La représentation semi-spinorielle (s) du groupe des rotations spatiales est donc unitaire et les formes hermitiennes $\overset{+}{\varphi}\varphi$, $\overset{+}{\psi}\psi$ et $\overset{+}{\varphi}\psi$ sont des invariants du groupe des rotations spatiales. Pour le retournement caractéristique, $\overset{+}{\varphi}\varphi$ et $\overset{+}{\psi}\psi$ se transforment en eux-mêmes, $\overset{+}{\varphi}\psi$ change de signe.

10. U-représentations fondamentales du sous-groupe des rotations quadri-dimensionnelles.

Une rotation quadri-dimensionnelle quelconque peut être réalisée elle aussi par une suite de rotations dans des plans orthogonaux. Comme précédemment, on peut considérer ces plans comme plans de coordonnées. Nous connaissons déjà l'expression de la matrice de transformation spinorielle en représentation fondamentale quelconque, pour une rotation dans un plan de coordonnées perpendiculaire à l'axe du temps. Il ne reste à calculer que la matrice, de transformation spinorielle pour une rotation dans un plan de coordonnées passant par l'axe du temps.

En représentation fondamentale (μ, ν), pour la rotation de l'angle Θ (imaginaire) de x^{γ} vers x^4, la matrice de transformation spinorielle s'écrit d'après (4.1),

(10.1) $$\underset{\gamma 4}{S}(\Theta) = \cos\frac{\Theta}{2} I - \sin\frac{\Theta}{2}\sigma^{\mu}\sigma^{\nu} \times \sigma^{\gamma}$$

ou

(10.2) $$\underset{\gamma 4}{S}(\Theta) = \cos\frac{\Theta}{2} I + i\varepsilon_{\mu\nu}\sin\frac{\Theta}{2}\sigma^{\omega} \times \sigma^{\gamma} \qquad (\varepsilon_{\mu\nu} = \pm 1)$$

avec

(10.3) $$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$$

($\varepsilon_{\mu\nu} = +1$ si μ, ν, ω forment une permutation paire, c'est-à-dire si μ, ν sont égaux aux indices d'une composante principale). Ainsi $\underset{\gamma 4}{S}(\Theta)$ en représentation fondamentale $(\mu\nu)$ est égale à $\underset{\gamma 4}{S}(-\theta)$ en représentation fondamentale $(\nu\mu)$. Si l'une des deux représentations fondamentales $(\mu\nu)$ et $(\nu\mu)$ est une E-représentation, l'autre est une T-représentation ; mais si l'une est une U-représentation, l'autre est également une U-représentation.

Si la représentation fondamentale est de type (U), $\omega = 1$ et l'équation (10.2) s'écrit

$$(10.4) \qquad \underset{\gamma 4}{S}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\hat{1} + i\varepsilon_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}\sigma^{\gamma} & \\ & \cos\frac{\theta}{2}\hat{1} - i\varepsilon_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}\sigma^{\gamma} \end{pmatrix}$$

Cette équation et l'équation (9.3) donnant l'expression des matrices $\underset{\alpha\beta}{S}$ en représentation fondamentale quelconque peuvent être réunies en une équation unique :

$$(10.5) \qquad \underset{km}{S} = \begin{pmatrix} s_{km} & \\ & s_{km}^{\eta} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \eta \equiv \frac{\overset{*}{\theta}}{\theta} = \pm 1 \; .$$

Les matrices $\underset{\alpha\beta}{s}(\theta)$ sont unitaires, θ étant réel ; les matrices $\underset{\gamma 4}{s}(\theta)$ sont hermitiennes, θ étant imaginaire. Tous les $\underset{km}{s}$ satisfont donc à la relation

$$(10.6) \qquad \underset{km}{\overset{+}{s}} = \underset{km}{s}^{-\eta}$$

et l'équation (10.5) peut s'écrire sans utiliser η :

$$(10.7) \qquad \underset{km}{S} = \begin{pmatrix} \underset{km}{s} & \\ & \underset{km}{\overset{+}{s}}{}^{-1} \end{pmatrix}$$

Or, s' et s'' désignant des matrices d'ordre deux quelconques,

$$\overset{+}{s}{}'^{-1}\,\overset{+}{s}{}''^{-1} = [(s'\,s'')^{+}]^{-1}$$

En U-représentation fondamentale, la matrice de transformation spinorielle est donc de la forme

$$(10.8) \qquad \underset{(4)}{S} = \begin{pmatrix} s & \\ & \overset{+}{s}{}^{-1} \end{pmatrix}$$

pour toute rotation quadri-dimensionnelle, et la forme hermitienne $\overset{+}{\varphi}\psi$ est un invariant du groupe de Lorentz orthochrone propre. Pour le retournement de l'Univers, $\overset{+}{\varphi}\,\psi$ change de signe.

11. Représentations fondamentales du groupe des retournements de l'espace, du temps et de l'Univers et choix de représentations fondamentales particulières.

Les lois de transformations des spineurs pour les trois retournements fondamentaux, équations (5.2), (6.1) et (6.1'), contiennent des paramètres $(\underset{\alpha}{\lambda})$. La valeur de ces paramètres (1 ou i) dépend à la fois de la nature de la représentation fondamentale (c'est-à-dire de la valeur des indices μ et ν) et de la flectovariance du spineur (c'est-à-dire de la valeur des coefficients $\underset{E}{\lambda}$ et $\underset{T}{\lambda}$).

Il résulte de la relation (6.2) que le nombre des paramètres $\underset{\alpha}{\lambda}$ égaux à 1 est impair. Quatre cas seulement peuvent donc se présenter :

$$(11.1)\quad \begin{cases} (a) & \underset{1}{\lambda} = 1 \;, \quad \underset{2}{\lambda} = 1 \;, \quad \underset{3}{\lambda} = 1 \;; \\ (b) & \underset{1}{\lambda} = 1 \;, \quad \underset{2}{\lambda} = i \;, \quad \underset{3}{\lambda} = i \;; \\ (c) & \underset{1}{\lambda} = i \;, \quad \underset{2}{\lambda} = 1 \;, \quad \underset{3}{\lambda} = i \;; \\ (d) & \underset{1}{\lambda} = i \;, \quad \underset{2}{\lambda} = i \;, \quad \underset{3}{\lambda} = 1 \;. \end{cases}$$

Les lois de transformation correspondantes sont :

$$
(11.2)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
(A) & \boxed{\begin{array}{ll} \varphi \to \pm \varphi , & \psi \to \mp \psi \\ \varphi \to \pm \psi , & \left\{\begin{array}{l} \psi \to \pm \varphi \\ \psi \to \mp \varphi \end{array}\right. \end{array}} \\[2em]
(B) & \left\{\begin{array}{ll} \varphi \to \pm \varphi , & \psi \to \mp \psi \\ \varphi \to \pm i \psi , & \left\{\begin{array}{l} \psi \to \pm i \varphi \\ \psi \to \mp i \varphi \end{array}\right. \end{array}\right. \\[2em]
(C)^{(7)} & \left\{\begin{array}{ll} \varphi \to \pm i \varphi , & \psi \to \mp i \psi \\ \varphi \to \pm i \psi , & \psi \to \mp i \varphi \\ \varphi \to \pm \psi , & \psi \to \pm \varphi \end{array}\right. \\[2em]
(D)^{(7)} & \left\{\begin{array}{ll} \varphi \to \pm i \varphi , & \psi \to \mp i \psi \\ \varphi \to \pm i \psi , & \psi \to \pm i \varphi \\ \varphi \to \pm \psi , & \psi \to \mp \varphi \end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

Chacun des quatre systèmes (A), (B), (C), (D) résume six ensembles de lois de transformation, puisque la nature du retournement fondamental pour lequel est valable chacune des trois lois de transformation n'est pas spécifiée.

Il nous reste à déterminer dans quels cas les lois de transformation sont de la forme (A), (B), (C) ou (D).

D'après (2.1), (2.2), (2.3) et (7.5), on a en représentation fondamentale :

$$S_E = \pm \lambda_E \sigma^{\nu} \times \hat{1} , \tag{11.3}$$

$$S_T = \pm i \lambda_T \sigma^{\mu} \times \hat{1} , \tag{11.4}$$

$$S_U = \pm \lambda_E \lambda_T \sigma^{\omega} \times \hat{1} \tag{11.5}$$

---

[7] (C) correspond à (c) et (D) à (d) si $\varepsilon = 1$. Si $\varepsilon = -1$, i est l'inverse.

Explicitons les matrices $\underset{E}{S}$, $\underset{T}{S}$, $\underset{U}{S}$ pour chaque type spinoriel :

(11.6)

	$\underset{T}{S}$	$\underset{E}{S}$	$\underset{U}{S}$
$\overset{1}{\underset{1}{\Psi}}$	$\pm i\sigma^{\mu}\times\hat{1}$	$\pm\sigma^{\nu}\times\hat{1}$	$\pm\sigma^{\omega}\times\hat{1}$
$\overset{i}{\underset{i}{\Psi}}$	$\pm\sigma^{\mu}\times\hat{1}$	$\pm i\sigma^{\nu}\times\hat{1}$	$\pm\sigma^{\omega}\times\hat{1}$
$\overset{i}{\underset{1}{\Psi}}$	$\pm\sigma^{\mu}\times\hat{1}$	$\pm\sigma^{\nu}\times\hat{1}$	$\pm i\sigma^{\omega}\times\hat{1}$
$\overset{1}{\underset{i}{\Psi}}$	$\pm i\sigma^{\mu}\times\hat{1}$	$\pm i\sigma^{\nu}\times\hat{1}$	$\pm i\sigma^{\omega}\times\hat{1}$

Deux cas sont donc à disitinguer.

I. - <u>Spineurs</u> $\overset{1}{\underset{i}{\Psi}}$ (8)

L'ensemble des trois matrices $\underset{E}{S}$, $\underset{T}{S}$, $\underset{U}{S}$ se compose des matrices

$$\pm i\sigma^{1}, \pm i\sigma^{2}, \pm i\sigma^{3} .$$

Les lois de transformation sont donc de la forme (D).

II. - <u>Spineurs</u> $\overset{1}{\underset{1}{\Psi}}$, $\overset{i}{\underset{i}{\Psi}}$, $\overset{i}{\underset{1}{\Psi}}$.

Désignons par Π l'un des trois indices μ , ν , ω avec la convention suivante :

$\Pi = \mu$ pour les spineurs $\overset{1}{\underset{1}{\Psi}}$,

$\Pi = \nu$ pour les spineurs $\overset{i}{\underset{i}{\Psi}}$,

$\Pi = \omega$ pour les spineurs $\overset{i}{\underset{1}{\Psi}}$.

1° <u>$\Pi = 1$</u> .

L'ensemble des trois matrices $\underset{E}{S}$, $\underset{T}{S}$, $\underset{U}{S}$ se compose des matrices

$$\pm i\sigma^{1} , \pm\sigma^{2} , \pm\sigma^{3}$$

---

(8) Sur le rôle particulier des spineurs $\overset{1}{\underset{i}{\Psi}}$, cf. (3).

Les lois de transformation sont donc de la forme (C).

2° $\underline{\Pi = 2}$.

L'ensemble des trois matrices $\underset{E}{S}$, $\underset{T}{S}$, $\underset{U}{S}$ se compose des matrices

$$\pm \sigma^1 \quad , \quad \pm i \sigma^2 \quad , \quad \pm \sigma^3 \ .$$

Les lois de transformation sont donc de la forme (B).

3° $\underline{\Pi = 3}$.

L'ensemble des trois matrices $\underset{E}{S}$, $\underset{T}{S}$, $\underset{U}{S}$ se compose des matrices

$$\pm \sigma^1 , \pm \sigma^2 , \pm i \sigma^3 \ .$$

Les lois de transformation sont donc de la forme (A).

A chaque valeur de l'un des trois indices μ , ν ou ω correspondent deux valeurs du couple $(\mu \ \nu)$, c'est-à-dire deux représentations fondamentales. A chaque valeur de Π correspondent donc six cas.

Réunissons l'ensemble des résultats précédents en indiquant explicitement le domaine de validité des lois de transformation (A), (B), (C) ou (D).

(11.7)

	T-représentations (12)	(13)	E-représentations (21)	(31)	U-représentations (23)	(32)
$\overset{1}{\underset{1}{\Psi}}$	C	C	B	A	B	A
$\overset{i}{\underset{i}{\Psi}}$	B	A	C	C	A	B
$\overset{i}{\underset{1}{\Psi}}$	A	B	A	B	C	C
$\overset{1}{\underset{i}{\Psi}}$	D	D	D	D	D	D

On a évidemment intérêt à utiliser une représentation où sont valables les lois de transformation (A). D'après ce qui précède, ceci n'est pas possible pour les spineurs $\overset{1}{\underset{i}{\Psi}}$, ainsi que pour les spineurs $\overset{1}{\underset{1}{\Psi}}$ en T-représentation, pour les spineurs $\overset{i}{\underset{i}{\Psi}}$ en E-représentation et pour les spineurs $\overset{i}{\underset{1}{\Psi}}$ en U-représentation.
Par contre, les lois de transformation sont bien de la forme (A) pour les spineurs $\overset{1}{\underset{1}{\Psi}}$ en E-représentation et en U-représentation, pour les spineurs $\overset{i}{\underset{i}{\Psi}}$ en

U-représentation et en T-représentation et pour les spineurs $\overset{1}{\underset{1}{\psi}}$ en T-représentation et en E-représentation, à condition que ces représentations soient convenablement choisies.

Les représentations de même type, conduisant aux lois de transformation (A) dans le cas de spineurs de flectovariances différentes, sont toujours distinctes. On a donc intérêt à utiliser toutes les représentations fondamentales et non seulement une de chaque type.

BIBLIOGRAPHIE

[1] de BROGLIE (Louis). - Théorie générale des particules à spin, 2e éd. - Paris, Gauthier-Villars, 1954.

[2] PAULI (W.). - Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik. - Ann Arbor, Edwards, 1950.

[3] RACAH (Giulio). - Sulla simmetria tra particelle e antiparticelle, Nuovo Cimento, t. 14, 1937, p. 322-328.

[4] WINOGRADZKI (Judith). - Spineurs du second rang à composantes invariantes et formalisme spinoriel incluant les parités, J. Phys. et Rad., t. 18, 1957, p. 385-394.

[5] WINOGRADZKI (Judith). - Sur les retournements de l'espace, du temps et de l'Univers dans la théorie des spineurs de Dirac, I : Définition et propriétés fondamentales des représentations normales, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 1896-1898.

[6] WINOGRADZKI (Judith). - Sur les retournements de l'espace, du temps et de l'Univers dans la théorie des spineurs de Dirac, II : Représentations normales particulières, les six représentations fondamentales, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 2206-2208.

[7] WINOGRADZKI (Judith). - Sur les retournements de l'espace, du temps et de l'Univers dans la théorie des spineurs de Dirac, III : Choix de représentations fondamentales en fonction de la nature du spineur, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 397-399.