L. Schwartz

Sur certains espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 10, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A11_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

Année 1953/1954

-:-:-:-

3 février 1954

Exposé n° 10

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES À VALEURS VECTORIELLES

1. LES ESPACES $\mathcal{H}^m$.

Nous raisonnerons sur R^n, mais il serait facile d'étendre les résultats, avec des modifications convenables, à une variété m fois continuement différentiable dénombrable à l'infini, et, pour $m = 0$, à un espace localement compact dénombrable à l'infini.

Soit Γ un ensemble de fonctions numériques continues sur R^n, telle que pour tout compact K de R^n, il existe $\gamma \in \Gamma$ qui ne s'annule pas sur K.

DÉFINITION 1 - On dit que $\varphi \in \mathcal{E}^m$ (c'est-à-dire m fois continuement différentiable) satisfait jusqu'à l'ordre m (m entier, fini ou infini ; pour $m = \infty$, la restriction $|p| \leqslant m$ est à supprimer) aux conditions de croissance définies par Γ si, pour tout p tel que $|p| \leqslant m$, et toute $\gamma \in \Gamma$, la fonction $\gamma D^p \varphi$ est bornée sur R^n.

DÉFINITION 2 - $\mathcal{H}^m$ est un espace de fonctions numériques satisfaisant aux conditions suivantes :

H_1) $\mathcal{H}^m$ est l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}^m$ satisfaisant jusqu'à l'ordre m aux conditions de croissance définies par Γ.

H_2) $\mathcal{H}^m$ est localement convexe séparé complet ; les injections de $\mathcal{D}^m$ dans $\mathcal{H}^m$ et de $\mathcal{H}^m$ dans $\mathcal{E}^m$ sont continues.

H_3) Pour qu'un ensemble B de fonctions soit borné dans $\mathcal{H}^m$, il faut et il suffit que, pour toute $\gamma \in \Gamma$ et $|p| \leqslant m$, l'ensemble des nombres $\gamma D^p \varphi(x)$, $\varphi \in B$, $x \in R^n$, soit borné.

H_4) Sur toute partie bornée B de $\mathcal{H}^m$, la topologie est identique à la topologie induite par $\mathcal{E}^m$.

EXEMPLES. $\mathcal{D}^m$ ($\Gamma = \mathcal{E}^m$), $\mathcal{E}^m$($\Gamma = \mathcal{D}^m$), $\mathcal{S}$(Γ= ensemble des polynomes ou $\mathcal{O}_M$) , $\mathcal{O}_M(\Gamma = \mathcal{S})$.

$\mathcal{B}^m$ (ensemble des fonctions bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$) correspond à Γ réduit à la fonction 1, mais H_4 n'est pas vérifiée. Il existe entre $\mathcal{B}^m$ et $(\mathcal{D}'_{L^1})^m$ une dualité séparante ; si on met sur $\mathcal{B}^m$ la topologie borne supérieure de la topologie induite par $\mathcal{E}^m$ et de la topologie de la convergence uniforme sur les parties fortement compactes de $(\mathcal{D}'_{L^1})^m$, on peut montrer que H_4 est vérifiée.

<u>PROPOSITION 1</u> - $\mathcal{D}^{\infty} = \mathcal{D}$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{H}^m$.

Soit en effet $\varphi \in \mathcal{H}^m$. Si (α_ν) est une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, bornées dans $\mathcal{B}^m$ et convergeant vers 1 dans $\mathcal{E}^m$, les $\alpha_\nu \varphi$ sont dans $\mathcal{D}^m$, et convergent vers φ dans $\mathcal{E}^m$; comme elles sont en outre bornées dans $\mathcal{H}^m$ (condition H_3) elles convergent aussi vers φ dans $\mathcal{H}^m$ (H_4) . Donc $\mathcal{D}^m$ est dense dans $\mathcal{H}^m$. Comme $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}^m$ pour la topologie de $\mathcal{D}^m$ plus fine que celle de $\mathcal{H}^m$, il est dense dans $\mathcal{D}^m$ pour la topologie induite par $\mathcal{H}^m$, donc dans $\mathcal{H}^m$.

<u>PROPOSITION 2</u> - $\mathcal{H}'^m$ <u>est un espace de distributions</u>.

Si en effet $T_0 \in \mathcal{H}'^m$, c'est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}^m$ donc sur $\mathcal{D}^m$, elle définit donc une distribution T , d'où une application linéaire $T_0 \to T$ de $\mathcal{H}'^m$ dans $\mathcal{D}'^m$. Comme $\mathcal{D}^m$ est dense dans $\mathcal{H}^m$, la connaissance de T détermine T_0 sur $\mathcal{D}^m$ donc sur $\mathcal{H}^m$, l'application est biunivoque, et $\mathcal{H}'^m \subset \mathcal{D}'^m$. Les injections continues $\mathcal{D}^m \to \mathcal{H}^m \to \mathcal{E}^m$ entrainent alors des injections continues $\mathcal{E}'^m \to \mathcal{H}'^m \to \mathcal{D}'^m$ pour les topologies faibles, fortes, etc...

2. <u>LES ESPACES</u> $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

Soit E un EVT localement convexe séparé complet.

<u>DÉFINITION 3</u> - <u>On appelle</u> $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ <u>l'espace des fonctions</u> $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$ (<u>c'est-à-dire</u> m <u>fois continuement différentiables à valeurs dans</u> E) <u>scalairement dans</u> $\mathcal{H}^m$ ($\langle \vec{\varphi} , \overleftarrow{e'} \rangle \in \mathcal{H}^m$ <u>pour tout</u> $\overleftarrow{e'} \in E'$) .

<u>EXEMPLE</u>.
$$\tilde{\mathcal{E}}^m(E) = \mathcal{E}^m(E)$$
$$\tilde{\mathcal{S}}(E) = \mathcal{S}(E)$$
$$\tilde{\mathcal{B}}^m(E) = \mathcal{B}(E)$$
$$\tilde{\mathcal{O}}_M(E) = \mathcal{O}_M(E)$$

les espaces écrits au 2e membre ayant des définitions évidentes (par exemple

$\mathcal{S}(E)$ est l'espace des fonctions $\vec{\varphi}$, indéfiniment dérivables à valeurs dans E , telles que pour tout p , et tout polynome Q , la fonction $Q\, D^p \varphi$ soit bornée sur R^n) .

Par contre en général $\tilde{\mathcal{D}}^m(E) \neq \mathcal{D}^m(E)$, ce dernier étant l'espace des fonctions $\vec{\varphi}$ m fois continuement différentiables à valeurs dans E et à support compact. $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{D}}^m(E)$ signifie seulement en effet que $\vec{\varphi}$ est <u>scalairement</u> à support compact.

Considérons par exemple la fonction $\vec{\delta} : y \to \delta_x(y)$ qui à chaque $y \in R^n$ fait correspondre la distribution en x représentée par la masse +1 au point y . Elle n'est pas à support compact, puisque $\delta_x(y) \neq 0$ quel que soit $y \in R^n$. Mais elle est scalairement à support compact, <u>si on la considère comme prenant ses valeurs dans</u> $\mathcal{D}'$, car pour $\overleftarrow{e'} = \psi \in \mathcal{D}$, on a $\langle \vec{\delta} , \overleftarrow{\psi} \rangle = \psi$, à support compact (Par contre si on la considère comme prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}'$, elle n'est plus scalairement à support compact). Nous verrons plus loin que si E est un Banach, $\tilde{\mathcal{D}}^m(E) = \mathcal{D}^m(E)$.

<u>PROPOSITION 3</u> - Si $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$, <u>lorsque</u> $\overleftarrow{e'}$ <u>parcourt une partie équicontinue</u> H' <u>de</u> E' , $\langle \vec{\varphi} , \overleftarrow{e'} \rangle$ <u>parcourt une partie bornée de</u> $\mathcal{H}^m$.

En effet la condition $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ est équivalente à : $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$, et pour toute $\chi \in \Gamma$ et $|p| \leq m$, l'ensemble des points de E : $\chi(x)\, D^p_{\vec{\varphi}}(x)$, $x \in R^n$, est borné ; en effet il est faiblement borné d'après H_1 . Cela entraîne bien que l'ensemble des points $\langle \chi(x)\, D^p_{\vec{\varphi}}(x) , \overleftarrow{e'} \rangle$, $x \in R^n$, $\overleftarrow{e'} \in H'$, est borné, donc que l'ensemble des $\langle \vec{\varphi} , \overleftarrow{e'} \rangle$, $\overleftarrow{e'} \in H'$, est borné dans $\mathcal{H}^m(H_3)$. Nous verrons plus loin que cet ensemble est même relativement compact.

<u>COROLLAIRE</u> - <u>Si</u> E <u>est un Banach</u> , $\tilde{\mathcal{D}}^m(E) = \mathcal{D}^m(E)$.

Car si $\overleftarrow{e'}$ parcourt la boule unité de E' , $\langle \vec{\varphi} , \overleftarrow{e'} \rangle$ reste bornée dans $\mathcal{D}^m$, donc a son support dans un compact fixe de R^n ; il en est de même par homothétie pour tout $\overleftarrow{e'} \in E'$.

<u>TOPOLOGIE DE</u> $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

<u>DÉFINITION 4</u> - <u>On dira que</u> $\vec{\varphi}$ <u>converge vers</u> 0 <u>dans</u> $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ si $\langle \vec{\varphi} , \overleftarrow{e'} \rangle$ <u>converge vers</u> 0 <u>dans</u> $\mathcal{H}^m$, <u>uniformément lorsque</u> $\overleftarrow{e'}$ <u>parcourt une partie équicontinue quelconque</u> E' .

Ou encore identifions $\vec{\varphi}$ à l'application linéaire $L_{\vec{\varphi}} : \overleftarrow{e'} \to \langle \vec{\varphi} , \overleftarrow{e'} \rangle$; on met sur $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ la topologie ε de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E' .

C'est bien une topologie d'espace vectoriel à cause de la proposition 3.

PROPOSITION 4 - Si E est complet, on a :

H'_1) $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}^m(E)$ est équivalent à :

1°) $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$

2°) Pour toute $\gamma \in \Gamma$ et $|p| \leq m$, l'ensemble des points de E : $\gamma(x) D^p \vec{\varphi}(x)$, $x \in R^n$, est borné.

H'_2) $\widetilde{\mathcal{D}}^m(E) \subset \widetilde{\mathcal{H}}^m(E) \subset \widetilde{\mathcal{E}}^m(E) = \mathcal{E}^m(E)$; ces espaces sont complets et les injections sont continues.

H'_3) Pour qu'une partie B de $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$ soit bornée, il faut et il suffit que, pour toute $\gamma \in \Gamma$ et $|p| \leq m$, l'ensemble de points de E : $\gamma(x) D^p \vec{\gamma}(x)$, $\vec{\varphi} \in B$, $x \in R^n$, soit borné.

H'_4) Sur les parties bornées de $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$, la topologie est identique à la topologie induite par $\mathcal{E}^m(E)$. Conséquence : $\mathcal{D}^m(E)$ est dense dans $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

Nous avons déjà montré H'_1 (proposition 3) ; H'_3 se démontre de la même manière. H'_4 est évident. Reste à voir H'_2.

Il est classique que $\widetilde{\mathcal{E}}^m(E) = \mathcal{E}^m(E)$ est complet. Soit Φ un filtre de Cauchy sur $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$ et $\overleftarrow{e'} \in E'$; l'image $\Phi_{\overleftarrow{e'}}$ de Φ par $\vec{\varphi} \to \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle$ est une base de filtre de Cauchy sur $\mathcal{H}^m$.

Soit $\vec{\varphi}_0$ la limite de Φ dans $\widetilde{\mathcal{E}}^m(E)$.

$\lim \Phi_{\overleftarrow{e'}} = \langle \vec{\varphi}_0, \overleftarrow{e'} \rangle \in \mathcal{H}^m$ puisque cet espace est complet Φ converge donc simplement dans $\mathcal{H}^m(E)$, et on voit qu'il converge aussi uniformément.

THÉORÈME 1 - $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E) = \mathcal{H}^m \hat{\otimes}_\varepsilon E$.

DÉMONSTRATION - $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$ est complet, et en vertu de la définition de sa topologie il contient $\mathcal{H}^m \otimes_\varepsilon E$ comme sous-espace topologique. Il nous reste à voir qu'il existe un sous-espace de $\mathcal{H}^m \otimes E$ dense dans $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

LEMME : $\mathcal{D} \otimes E$ est dense dans $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

En vertu de (H'_4), $\mathcal{D}^m(E)$ est dense dans $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$. Il suffit donc de voir que $\mathcal{D} \otimes E$ est dense dans $\mathcal{D}^m(E)$ pour la topologie induite par $\widetilde{\mathcal{D}}^m(E)$, identique lorsque le support reste dans un compact fixe à celle de $\mathcal{E}^m(E)$.

Soit ρ indéfiniment différentiable à support compact. Pour toute $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}_0(E)$, $\vec{\varphi} * \rho$ a un sens (voir l'intégration des fonctions continues à support compact, exposé n° 9). $\vec{\varphi}^* \rho \in \mathcal{D}(E)$, et si $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^0 \otimes E$, alors $\vec{\varphi}^* \rho \in \mathcal{D} \otimes E$. Mais $\vec{\varphi}$ est approchable uniformément par des $\vec{\varphi}_j \in \mathcal{D}_0 \otimes E$ ayant leurs supports dans un compact fine (esposé n° 2). Alors les $\varphi_j * \rho$ convergent vers $\varphi^* \rho$ dans $\mathcal{D}(E)$. Donc pour toute $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}_0(E)$, $\vec{\varphi}^* \rho$ est adhérent à $\mathcal{D} \otimes E$ pour la topologie de $\mathcal{D}(E)$. Si maintenant $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^m(E)$ lorsque $\rho \to \delta$ dans $\mathcal{E}'^m$ faible, les $\vec{\varphi}^* \rho$ tendent vers $\vec{\varphi}$ dans $\widetilde{\mathcal{D}}^m(E)$; le lemme est donc démontré, donc aussi le théorème 1.

3. APPLICATIONS : INTÉGRATION.

PROPOSITION 5 - $\mathcal{L}^1_x \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{M}^m_y = \mathcal{H}^{1,m}_{x,y}$, correspondant à l'ensemble Γ des fonctions $\alpha\beta$, $\alpha \in \Gamma_x$, $\beta \in \Gamma_y$.

On a en effet $\mathcal{L}^1_x \hat{\otimes} \mathcal{M}^m_y = \widetilde{\mathcal{L}}^1_x(\mathcal{M}^m_y) = \widetilde{\mathcal{M}}^m_y(\mathcal{L}^1_x)$ et on montre aisément que $\widetilde{\mathcal{L}}^1_m(\mathcal{M}^m_y) = \mathcal{H}^{1,m}_{x,y}$ (la topologie de $\mathcal{M}^{1,m}_{x,y}$ étant la topologie ε de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de $\mathcal{L}'^1_x$ et $\mathcal{M}'^m_y$) .

PROPOSITION 6 - Soient $\mathcal{L}^1_x$ et $\mathcal{M}^m_y$ deux espaces répondant à la définition 2, u une application linéaire continue de $\mathcal{L}^1_x$ dans $\mathcal{M}^m_y$, et v une application linéaire continue de E dans F où E et F sont deux espaces vectoriels topologiques séparés et complets, alors $u \otimes v$ est une application linéaire continue de $\widetilde{\mathcal{L}}^1_x(E)$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}^m_y(F)$, la seule à vérifier $u \otimes v\ (\psi \vec{e}) = u(\psi)v(\vec{e})$.

INTÉGRATION : Soit T une distribution appartenant à $\mathcal{H}'^m$ et soit $\vec{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$. Nous allons définir l'intégrale de $\vec{\varphi}$, à valeurs dans E , par rapport à T .

T est une application continue de $\mathcal{H}^m$ dans C . Soit $I_{(E)}$ l'application identique de E sur lui-même, alors $T \otimes I_{(E)}$ applique continuement $\widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$ dans E .

DÉFINITION 5 - Soit $\vec{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{H}}^m(E)$ et $T \in \mathcal{H}'^m$; alors l'intégrale de $\vec{\varphi}$ par rapport à T est par définition $T \otimes I_{(E)}(\vec{\varphi}) \in E$ qu'on notera $T(\varphi)$.

PROPRIÉTÉ DE L'INTÉGRALE.

PROPOSITION 7 - On a : $\langle T(\vec{\varphi}), \overleftarrow{e'} \rangle = T(\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle)$ pour tout $\overleftarrow{e'} \in E$ et ceci caractérise $T(\vec{\varphi})$. Il suffit de la vérifier sur les éléments de la forme $\varphi . \vec{e'}$ où $\varphi \in \mathcal{H}^m$ et $\vec{e} \in E$

$$\langle T(\varphi . \vec{e}), \overleftarrow{e'} \rangle = \langle T(\varphi) . \vec{e}, \overleftarrow{e'} \rangle = T(\varphi) \langle \vec{e}, \overleftarrow{e'} \rangle = T(\varphi \langle \vec{e}, \overleftarrow{e'} \rangle) =$$
$$= T(\langle \varphi . \vec{e}, \overleftarrow{e'} \rangle)$$

<u>PROPOSITION 8</u> - <u>L'application</u> $(T, \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'}) \to \langle T(\vec{\varphi}), \overleftarrow{e'}\rangle$ <u>est hypocontinue pour</u> : <u>les parties équicontinues de</u> $\mathcal{H}'^m$, <u>les ensembles bornés de</u> $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$, <u>les parties équicontinues de</u> E' .

En effet, lorsque $\vec{\varphi}$ décrit un ensemble borné de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ et $\overleftarrow{e'}$ une partie équicontinue de E' , les $\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle$ parcourent une partie bornée de $\mathcal{H}^m$, la formule ci-dessus démontre la propriété dans ce cas. Les autres vérifications sont aussi immédiates, compte tenu de la proposition 7.

<u>PERMUTABILITÉ DE L'INTÉGRATION ET DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES</u>.

Soit v une application linéaire continue de E dans F . Pour $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$, $v \circ \vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(F)$, en appelant $v \circ \vec{\varphi}$ la fonction $x \to v(\vec{\varphi}(x))$ définie sur R^n à valeurs dans F . En effet il est évident que $v \circ \varphi$ est m fois continuement différentiable, et si $\overleftarrow{f'} \in F'$, $\langle v \circ \vec{\varphi}, \overleftarrow{f'}\rangle = \langle \vec{\varphi}, {}^t v(\overleftarrow{f'})\rangle \in \mathcal{H}^m$.

L'application linéaire $\vec{\varphi} \to v \circ \vec{\varphi}$ de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ dans $\tilde{\mathcal{H}}^m(F)$ est continue or sur $\mathcal{H}^m \otimes E$ elle coïncide avec l'application linéaire continue $I_{(\mathcal{H}^m)} \otimes v$, donc on a toujours $v \circ \varphi = (I_{(\mathcal{H}^m)} \otimes v)(\vec{\varphi})$.

Mais alors si $T \in \mathcal{H}'^m$, la composée $(T \otimes I_{(F)}) \circ (I_{\mathcal{H}^m} \otimes v)$ n'est autre que $T \otimes v$, application linéaire continue de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ dans F qui est aussi la composée $v \circ (T \otimes I_{(E)})$. On a donc

$$T(v \circ \vec{\varphi}) = v(T(\vec{\varphi})) .$$

<u>PROPOSITION 9</u> - <u>Si</u> v <u>est une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F , <u>et</u> $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ <u>alors</u> $v \circ \vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(F)$ <u>et pour toute distribution</u> $T \in \mathcal{H}'^m$ <u>on a</u> $T(v \circ \vec{\varphi}) = v(T(\vec{\varphi}))$.

4. <u>CARACTÉRISATION DE</u> $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

<u>THÉORÈME 2</u> - <u>On a</u> $\underline{\tilde{\mathcal{H}}^m(E) = \mathcal{H}^m \hat{\otimes}_\varepsilon E = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c ; \mathcal{H}^m) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}'^m_c ; E)}$

<u>DÉMONSTRATION</u> - Soit $\vec{\delta}$ l'application $y \to \delta_x(y)$.

$\vec{\delta}$ peut être considérée comme une fonction à valeurs dans $\mathcal{H}'^m_c$. Nous avons le <u>lemme</u> : $\vec{\delta}$ <u>est un élément de</u> $\tilde{\mathcal{H}}^m(\mathcal{H}'^m_c)$.

D'abord $\vec{\delta}$ est scalairement dans $\mathcal{H}^m$, en effet soit $\overleftarrow{e'} \in (\mathcal{H}'^m_c)'$ $\overleftarrow{e'} = \psi \in \mathcal{H}^m$.

$\langle \vec{\delta}, \psi\rangle = \psi$ donc $\vec{\delta}$ appartient bien scalairement à $\mathcal{H}^m$. Il reste à vérifier que $\delta \in \mathcal{E}^m(\mathcal{H}'^m_c)$, ce qui sera vrai si l'on montre que $\vec{\delta} \in \mathcal{E}^m(\mathcal{E}'^m_c)$. $\vec{\delta}$ est scalairement dérivable. En effet nous avons pour $\psi \in \mathcal{E}^m$: $\langle \vec{\delta}, \psi \rangle = \psi$ donc $D^p_y \langle \vec{\delta}, \psi \rangle = D^p\psi(y) = \langle (-1)^{|p|} D^p_x \vec{\delta}(y), \psi\rangle$

et $(-1)^{|p|} D_x^p \vec{\delta}(y) \in \mathcal{E}'^m$ pour $|p| \leq m$ donc $\vec{\delta}$ est en plus faiblement dérivable dans $\mathcal{E}'^m_c$. Les dérivées de $\vec{\delta}$ sont manifestement faiblement continues. Elles le sont aussi fortement. En effet si y parcourt un compact de R^n l'ensemble des $(-1)^p D_x^p \delta(y)$ parcourt un ensemble équicontinu de $\mathcal{E}'^m$ et sur un équicontinu de $\mathcal{E}'^m$ la topologie $\mathcal{E}'^m_e$ et la topologie faible $\mathcal{E}'^m_\sigma$ coincident (Ascoli). $\vec{\delta}$, considérées comme prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}'^m_c$, est donc m fois continuement différentiable, en vertu du

<u>LEMME</u> : <u>Si</u> E <u>est un espace vectoriel topologique localement convexe muni de deux topologies</u> $\mathcal{T}_1$ <u>et</u> $\mathcal{T}_2$, <u>si</u> $\mathcal{T}_1 \geq \mathcal{T}_2$ <u>et si quelque soit le</u> $\mathcal{T}_1$<u>-voisinage de</u> 0, V_1 <u>de</u> E, <u>il existe un</u> $\mathcal{T}_1$<u>-voisinage</u> W_1 <u>de zéro tel que l'enveloppe convexe</u> $\mathcal{T}_2$<u>-fermée de tout</u> $\mathcal{T}_1$<u>-compact de</u> W_1 <u>soit dans</u> V_1 (<u>vérifié si</u> $\mathcal{T}_1$ <u>a un système fondamental de voisinages de</u> 0 <u>convexes et</u> $\mathcal{T}_2$<u>-fermés, ou si</u> E <u>est</u> $\mathcal{T}_1$<u>-complet</u>), <u>si</u> $t \to f(t)$ <u>est une fonction de la variable réelle</u> t <u>continuement différentiable pour</u> $\mathcal{T}_2$, <u>et que</u> $f'_{\mathcal{T}_2}(t)$ <u>est continue pour</u> $\mathcal{T}_1$ <u>alors</u> $f(t)$ <u>est différentiable pour</u> $\mathcal{T}_1$ et $f'_{\mathcal{T}_2}(t) = f'_{\mathcal{T}_1}(t)$.

Le lemme s'appliquant à une topologie forte et à sa topologie affaiblie, nous concluons donc finalement que

$$\vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(\mathcal{H}'^m_c)$$