L. Schwartz

Les opérateurs de convolution. Le théorème des noyaux

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 11, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A12_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954
-:-:-:-

10 février 1954

Exposé n° 11

LES OPÉRATEURS DE CONVOLUTION - LE THÉORÈME DES NOYAUX.

I. (1) $\underline{\tilde{\mathcal{H}}^m(E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}'^m_c ; E)}$. Cette proposition est équivalente à l'assertion (2) $\vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(\mathcal{H}'^m_c)$.

Si nous avons la propriété (1) nous en déduisons la propriété (2). En effet, prouver (2) revient alors à montrer que ${}^tL_{\vec{\delta}}$ appartient à $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}'^m_c ; \mathcal{H}'^m_c)$ or cette application est l'identité, donc appartient bien à ce dernier espace.

Réciproquement, soit $v \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}'^m_c ; E)$, alors $v \circ \vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$. $\underline{\vec{v} = v \circ \vec{\delta}}$ est l'élément associé à v cherché. Pour cela il nous faut vérifier ${}^tL_{\vec{v}} = v$, ou $v(T) = T(\vec{v})$, pour $T \in \mathcal{H}'^m_c$. Or $T(\vec{v}) = T(v \circ \vec{\delta}) = v(T(\vec{\delta})) = v(T)$. Ceci achève de prouver l'équivalence de (2) et de (1). En vertu du lemme démontré la dernière fois nous déduisons l'assertion (1).

II. Opérateurs de convolution.

Convention : Dans la suite, toute variable en indice, ou surmontée d'un chapeau, désignera une variable muette; ainsi $f(x)$ désigne la valeur de la fonction f au point x , $f(\hat{x})$ désigne la fonction f .

$$f(\hat{x},y) = (x \to f(x,y)) \quad , \quad f(\hat{x},\hat{y}) = (y \to (x \to f(x,y))).$$

$$f(\hat{x})_y = (x \to f(x)_y) \ .$$

Un indice répété 2 fois dans une formule telle que $T_x(\varphi(x)) = T(\varphi)$ est aussi muet.

Problème. Soit E un espace de distribution, ($E \subset \mathcal{D}'$, l'injection de E dans $\mathcal{D}'$ étant continue), $\mathcal{H}^m$ un espace de fonction de l'espèce considérée dans le précédent exposé. On se propose de déterminer les opérateurs de convolution appliquant continuement $\mathcal{H}'^m_c$ dans E , c'est-à-dire les opérateurs linéaires continus de $\mathcal{H}'^m_c$ dans E qui sur $\mathcal{E}'^m \subset \mathcal{H}'^m$ sont des convolutions. L'espace de ces opérateurs, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $\mathcal{H}'^m_c$ sera noté

$\mathcal{O}'_C(\mathcal{H}'^m_c\,;\,E)$.

Exemples : $\mathcal{O}'_C(\mathcal{D}'\,;\mathcal{D}') = \mathcal{E}'$, $\mathcal{O}'_C(\mathcal{E}'\,;\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$

$$\mathcal{O}'_C(\mathcal{S}'\,;\mathcal{S}') = \mathcal{O}'_C$$

Théorème 1 - Pour que $A \in \mathcal{O}'_C(\mathcal{H}'^m_c\,;\,\underset{\sim}{E})$ il faut et il suffit que la fonction $\vec{A} : (y \to \tau(y)A)$ appartienne à $\mathcal{H}^m(E)$, ($\tau(y)A_x$ est la distribution A_x translatée de y .).

Démonstration : La condition est suffisante ; en effet, si $\vec{A} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ $T(\vec{A})$ a un sens, appartient à E , et $\vec{A} \to T(\vec{A})$ est continue de $\mathcal{H}'^m_c$ dans E ; de plus, pour $e' = \psi \in \mathcal{D} \subset E'$: $\langle T(\vec{A})\,,\,\psi\rangle = T(\langle\vec{A}\,,\,\psi\rangle) =$ $= T_y\,(\tau_y\,A(\psi)\,) = T(\check{A} * \psi) = (T * A)(\psi)$ si $T \in \mathcal{E}'$, C.Q.F.D.

La condition est nécessaire. Si en effet $A \in \mathcal{O}'_C(\mathcal{H}'^m_c\,;\,\underset{\sim}{E})$, comme $\vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(\mathcal{H}'^m_c)$, $A \circ \vec{\delta}$ doit appartenir à $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$; mais $A \circ \vec{\delta}$ est la fonction $y \to A(\delta_x(y)) = A * \delta_x(y) = \tau(y)A$ donc la fonction $\vec{A}$.

III. Transformée de Fourier.

Montrons d'abord que $\exp(-2i\pi\langle \hat{x},\hat{y}\rangle) \in \tilde{\mathcal{S}}_y(\mathcal{S}'_x)$. Tout d'abord cette fonction de y prend ses valeurs dans $\mathcal{S}'_x$, et même dans $\mathcal{B}_x$. Ensuite elle est indéfiniment dérivable en tant que fonction à valeurs dans $\mathcal{E}_x$, donc a fortiori à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$; comme toutes ses dérivées (en tant que fonction à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$) sont des fonctions continues de y à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$, elle est indéfiniment dérivable en tant que fonction à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$. Reste à voir qu'elle est scalairement dans $\mathcal{S}_y$; c'est équivalent au fait que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ applique $\mathcal{S}_x$ dans $\mathcal{S}_y$. On en déduit :

Proposition 1 . $\mathcal{F}\,T_y = T_y\,(\exp(-2i\pi\langle \hat{x},y\rangle))$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{S}'_y$ dans $\mathcal{S}'_x$.

IV. Structure de certains espaces d'applications linéaires. Le théorème des noyaux.

Définition 1 . X étant l'espace de la variable x , Y celui de la variable y , un noyau sur $X \times Y$ est un élément de $\mathcal{D}'_{x,y}$.

On note par $N(\varphi) = \iint_{x\,y} N_{x,y}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy$ la forme linéaire qu'il définit sur $\mathcal{D}_{x,y}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$ ($\varphi(x,y) = u(x),v(y)$) . N définit alors sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$

une forme bilinéaire séparément continue. $N(\hat{u} \otimes v)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}_x$ dans C. C'est donc un élément de $\mathcal{D}'_x$. De plus $v \to N(\hat{u} \otimes v)$ est continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{D}'_x$ faible. N définit donc un élément $N(\hat{u} \otimes \hat{v})$ de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y ; \mathcal{D}'_x)$.

On note aussi $N \circ y = N(Q \otimes v)$ et $u \circ N = N(u \otimes \hat{v})$, $N \circ v$ définit l'intégration partielle par rapport à y. On la notera $\int N_{x,y} v(y) dy = N \circ v$ On a donc la

<u>Proposition 2.</u> <u>Tout noyau $N_{x,y}$ de $\mathcal{D}'_{x,y}$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{D}'_x$, à savoir $N(\hat{u} . \hat{v})$ qui est aussi donnée par $(v \in \mathcal{D}_y)$: $v \to \int N_{x,y} v(y) dy = N \circ v$.</u>

<u>Le théorème de Fubini est valable pour les intégrations partielles</u>, c'est-à-dire $\langle u \circ N , v \rangle = \langle u , N \circ v \rangle$.

<u>Remarque</u> : Continuité de $\mathcal{D}_y$ fort dans $\mathcal{D}'_x$ fort, de $\mathcal{D}_y$ faible dans $\mathcal{D}'_x$ faible, de $\mathcal{D}_y$ fort dans $\mathcal{D}'_x$ faible, sont équivalentes, car $\mathcal{D}_y$ et $\mathcal{D}'_x$ ont la topologie τ.

Nous nous proposons d'établir une réciproque de la première partie de cette proposition. Nous traiterons d'abord quelques cas particuliers.

A) $\mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{N}^n_y)'_c ; \mathcal{M}^m_x)$ ou $\mathcal{M}^m_x$ et $\mathcal{N}^n_y$ sont deux espaces de fonctions du type $\mathcal{H}^m$.

On a :

$$\mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{N}^n_y)'_c ; \mathcal{M}^m_x) \approx (\mathcal{N}^n_y) \hat{\otimes}_\varepsilon (\mathcal{M}^m_x) \approx \mathcal{H}^{m\,n}_{x,y} \approx \tilde{\mathcal{N}}^n_y(\mathcal{M}^m_x) .$$

Soit $L \in \mathcal{L}((\mathcal{N}^n_y)'_c ; \mathcal{M}^m_x)$, elle définit un élément $N(\hat{x},\hat{y}) \in \mathcal{H}^{m,n}_{x,y}$ associé aussi à $\vec{N} = N(\hat{x},\hat{y}) \in \tilde{\mathcal{N}}^n_y(\mathcal{M}^m_x)$ tel que $L(T) = T(\vec{N}) = \int N(\hat{x},y)\, T_y\, dy$, $N(\hat{x},\hat{y})$ est le noyau de L.

Une aplication L de $\mathcal{E}'_y$ dans $\mathcal{E}_x$ sera dite régularisante. De $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{x,y}$ nous tirons donc la proposition :

<u>Proposition 3 -</u> <u>Toute application régularisante est définie par un noyau, fonction indéfiniment différentiable,</u> $N(\hat{x},\hat{y})$. <u>Si</u> T_y <u>est une distribution à support compact, sa régularisée par</u> N ~~est~~ <u>définie par l'intégrale</u> $\int N(\hat{x},y)\, T_y\, dy$.

On a $N(\hat{x},\hat{y}) = L \circ \vec{\delta}$ ou $\vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{E}}_y(\mathcal{E}'_y)$

donc $L(\delta_y(b)) = N(\hat{x},b)$ et $L(\delta_y(b))(a) = N(a,b)$

B) $\mathcal{L}_c(\mathcal{N}^n_y ; \mathcal{M}^m_x)$ ou $\mathcal{M}^m_x$ et $\mathcal{N}^n_y$ sont deux espaces de fonctions du type $\mathcal{H}^m$, $\mathfrak{N}^n_y$ étant en outre bornologique.

Soit E un espace vectoriel topologique complet tel que E'_c soit complet, et que les parties compactes de E'_c soient équicontinues (donc $(E'_c)'_c = E$). On a alors :

$$\mathcal{L}_c(E\,;\mathfrak{M}^m_x) \approx \mathcal{L}_\varepsilon((E'_c)'_c\,;\mathfrak{M}^m_x) \approx \mathcal{L}_\varepsilon((\mathfrak{M}^m_x)'_c\,;E'_c) \approx \mathfrak{M}^m_x \hat{\otimes}_\varepsilon E'_c \approx \mathfrak{M}^m_x(E'_c)$$

Les conditions imposées à E seront manifestement remplies si E est tel que tout ensemble H de E' équicontinu sur les parties compactes de E est équicontinue, ce qui est lorsque E est bornologique. [Soit en effet alors E' son dual, et $H \subset E'$ équicontinu sur tout compact de E. Soit V un voisinage convexe équilibré de zéro dans C (un disque), et S une suite quelconque de E qui tende vers zéro. Par hypothèse $(\bigcap_{h\in H} h^{-1}(V)) \cap (S \cup \{0\})$ est l'intersection de $S \cup \{0\}$ et d'un voisinage de zéro dans E, donc $\bigcap_{h\in H} h^{-1}(V)$, convexe, équilibré, absorbe S, donc tout borné de E, et est en conséquence un voisinage de zéro dans E].

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}^n_y\,;\mathfrak{M}^m_x)$; ${}^tL$ sa transposée et $N(\hat{x})_y = \vec{N} \in \mathfrak{M}^m_x((\mathfrak{N}^n_y)'_c)$ l'élément associé à L. $N(\hat{x})_y$ est le noyau de L. Pour toute distribution $T_x \in \mathfrak{M}'^m_x$ on a ${}^tL(T_x) = T_x(N(x)_y) = \int N(x)_y T_x dx$. Pour toute $\varphi \in \mathfrak{N}^n_y$, on a

$$\langle L(\varphi(\hat{y}))\,,\,T_x\rangle = \langle \varphi(\hat{y})\,,\,T_x(\vec{N})\rangle = T_x(\langle \varphi(\hat{y})\,,\,\vec{N}\rangle)$$

$L(\varphi(\hat{y}))$ est donnée par l'intégrale partielle

$$L(\varphi(\hat{y})) = \int N(\hat{x})_y\,\varphi(y)dy = \langle \varphi(\hat{y})\,,\,\vec{N}\rangle.$$

On a aussi :

$$L(\varphi(\hat{y}))(a) = \int (N(a))_y\,\varphi(y)dy$$

$N(x)_y$ est le noyau de L.

C'est bien un noyau. C'est en effet une fonction continue de $x \in X$ à valeurs dans $\mathcal{D}'_y$. On définira $N(\varphi)$ pour $\varphi(\hat{x},\hat{y}) \in \mathcal{D}_{x,y}$ par $N(\varphi) = \int_X dx \int_Y N(x)_y\,\varphi(x,y)dy$.

Comme $\varphi(\hat{x},\hat{y})$ est continue de x à valeurs dans $\mathcal{D}_y$, et $N(\hat{x})_y$ continue de x à valeurs dans $\mathcal{D}'_y$, l'intégrale en dy définit une fonction continue de x à support compact, donc $N(\varphi)$ a un sens. Si φ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_{x,y}$ en gardant son support dans un compact fixe $H \times K$ de $X \times Y$; $\varphi(x,\hat{y})$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_y$ uniformément par rapport à x,

$N(x)_y$ reste borné dans $\mathcal{D}'_y$ lorsque x parcourt H, donc l'intégrale en y converge vers 0 uniformément par rapport à x, en gardant son support dans H, donc $N(\varphi) \to 0$. Donc N est bien une distribution $\in \mathcal{D}'_{x,y}$, c'est-à-dire un noyau.

Cas particulier. $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y, \mathcal{E}_x) \approx \tilde{\mathcal{E}}_x(\mathcal{D}'_y) = \mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_y)$. Les applications de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y ; \mathcal{E}_x)$ sont dites semi-régulières en x.

Proposition 4. *Toute application L semi-régulière en x est définie par un noyau fonction indéfiniment dérivable de x à valeurs dans $\mathcal{D}'_y$. Si $\varphi \in \mathcal{D}_y$, et $N(x)_y$ est le noyau de L on a :*

$$L(\varphi(y)) = \int N(x)_y \varphi(y)dy$$

c) $\mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{M}^m_x)'_c ; (\mathcal{N}^n_y)'_c) \approx \tilde{\mathcal{M}}^m_x((\mathcal{N}^n_y)'_c)$ lorsque $\mathcal{M}^m_x$ et $\mathcal{N}^n_y$ sont des espaces du type $\mathcal{H}^m$, $\mathcal{N}$ bornologique.

Ce cas a été traité tout à l'heure dans B), avec $L(\delta_y(b)) = N_x(b)$.

Inversons donc les rôles de x et y. Alors si $L \in \mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{M}^m_y)'_c ; (\mathcal{N}^n_x)'_c)$ il est défini par un noyau $N_x(y) \in \tilde{\mathcal{M}}^m_y((\mathcal{N}^n_x)'_c)$.

Cas particulier :

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{E}'_y ; \mathcal{D}'_x) = \mathcal{E}_y(\mathcal{D}'_x)$$

, N est alors un noyau semi-régulier en y.

Le théorème général des noyaux. Il s'énonce :

Théorème 2 - *Toute application linéaire continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{D}'_x$ est définie par un noyau, déterminé d'une manière unique. Soit L l'application, $\varphi(y) \in \mathcal{D}_y$ et $N_{x,y}$ le noyau de L, nous avons* $L(\varphi(y)) = \int N_{x,y} \varphi(y)dy$

L'unicité du noyau est évidente, car L détermine N sur $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y$, dense dans $\mathcal{D}_{x,y}$.

Démonstration. Elle se fait en quatre étapes :

1°) $L \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_x ; \mathcal{E}^0_x)$. Ce cas a été traité dans B).
$N_{x,y} = N(x)_y \in \mathcal{E}^0_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$. Pour $\varphi(y) \in \mathcal{D}_y$ on a : $N \circ \varphi = \int N(x)_y \varphi(y)dy$.

2°) $L \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_y ; (\mathcal{E}^m_x)')$. Soit $\varphi(y) \in \mathcal{D}_y$. Nous nous ramènerons au cas précédent en régularisant $L(\varphi)$. La solution élémentaire E_k de l'équation de Laplace itérée Δ^k sur R^n est r^{2k-n} à une constante près [c'est $\left((2k-n)(2k-2-n) \ldots (4-n)(2-n).2^{k-1}.(k-1)! \dfrac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}\right) r^{2k-n}$] pour n impair.

Pour n pair, nous avons une formule analogue r^{2k-n} étant remplacé par $r^{2k-n}\log r$.

De toute façon, pour k assez grand E_k est une fonction m fois continuement différentiable. Alors, dans ces conditions, $E_k * L(\varphi)$ est un élément de $\mathcal{E}^0_x$, donc $\varphi \to E_k * L(\varphi)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y ; \mathcal{E}^0_x)$ donc est défini par un noyau $N \in \mathcal{E}^0_x \hat{\otimes}_{\varepsilon} \mathcal{D}'_y$.

$E_k * L(\varphi) = N \circ \varphi$. Si nous appliquons la formule de Poisson, nous obtenons alors :

$$L(\varphi) = \Delta^k E_k * L(\varphi) = \Delta^k (E_k * L(\varphi)) = \Delta^k (N_{x,y} . \varphi) = (\Delta^k_x N_{x,y}) . \varphi ,$$

donc L est bien définie par un noyau.

3°) $L \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_y ; \mathcal{E}'_x)$. L est dite "compactifiante". La forme bilinéaire $\tilde{L}$ sur $\mathcal{E}_y \times \mathcal{E}_x$ définie par L est séparément continue ; $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ étant des espaces du type $(\mathcal{F})$, $\tilde{L}$ est continue. Donc il existe un ouvert de $\mathcal{E}_y$ appliqué par L en un borné de $\mathcal{E}'_x$. Mais une partie bornée de $\mathcal{E}'_x$ est plongée dans un certain $\mathcal{E}'^m_x$ et est bornée dans cet espace. Donc L se prolonge en une application continue de $\mathcal{E}_y$ dans un $(\mathcal{E}^m_x)'$, elle définit donc un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y ; (\mathcal{E}^m_x)')$ (et elle est parfaitement définie par cet élément puisque $\mathcal{D}_y$ est partout dense dans $\mathcal{E}_y$ pour la topologie de $\mathcal{E}_y$).

L est donc définie par un noyau, d'après 2°)

On a aussi la :

<u>Proposition 3</u>. <u>Toute forme bilinéaire (séparément) continue sur $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$ ezt définie par un noyau</u> $N_{x,y} \in \mathcal{E}_{x,y}$.

4°) $L \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_y ; \mathcal{D}'_x)$

L définit une forme bilinéaire $\tilde{L}$ sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$, séparément continue. Soit A un ouvert relativement compact dans X (resp. B dans Y). Soit $\alpha(\mathfrak{x})$ une fonction $\in \mathcal{D}_x$ telle que $\alpha(x) = 1$ pour tout $x \in A$; $\beta(\mathfrak{y})$ une fonction $\in \mathcal{D}_y$ telle que $\beta(y) = 1$ pour tout $y \in B$.

Soient maintenant $\varphi(\mathfrak{x}) \in \mathcal{D}_x$ et $\psi(\mathfrak{y}) \in \mathcal{D}_y$. Alors $\tilde{L}(\alpha(\mathfrak{x})\varphi(\mathfrak{x}), \beta(\mathfrak{y})\psi(\mathfrak{y}))$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$ séparément continue. Elle est donc définie par un noyau $N_{x,y}(A,B)$. Si alors $C \supset A$, $D \supset B$, on a $N_{x,y}(A,B) = N_{x,y}(C,D)$ donc $A \times B$, car ils coïncident sur $\mathcal{D}_x(A) \otimes \mathcal{D}_y(B)$ dense dans $\mathcal{D}_{x,y}(A \times B)$.

Par recollement des morceaux nous construisons un noyau définissant L.

Le théorème est démontré.

Remarque : La proposition 5 signifie aussi que $\mathcal{E}_x \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}_y$ et $\mathcal{E}_x \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{E}_y$ ont le même dual.

Nous verrons qu'ils sont identiques, et cela est lié au fait que $\mathcal{E}$ est nucléaire . (C'est précisément le théorème des noyaux qui est à l'origine du mot nucléaire).