

SÉMINAIRE SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Propriétés de l'opérateur de Green et problème de Cauchy (fin)

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. n° 5, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A5_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:~::~:-

25 mai 1956

Séminaire SCHWARTZ

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Exposé n° 5

Année 1955/56

-:~::~:-

PROPRIÉTÉS DE L'OPÉRATEUR DE GREEN
ET PROBLÈME DE CAUCHY FIN

par Laurent SCHWARTZ.

-:~::~:-

Rappels

Nous avons vu, dans le précédent exposé, que si l'on se borne à vouloir que $G(t)$ prenne ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1; \mathcal{D})$, alors $t \rightarrow G(t)$ est une fonction indéfiniment dérivable de $t > 0$. $G(t)$ admet des développements limités de la forme :

$$G(t) = \sum_{r=0}^k \Delta^r \frac{t^{2r+1}}{(2r+1)!} + \mathcal{O}(t^{2k+3}) .$$

Mais dans ce cas, $u = G * A$ ($A \in \mathcal{D}'_1$), qui vérifie $\square u = A$, appartient à \mathcal{D}' , et parler des "valeurs au contour" de u n'a plus aucun sens.

Toutefois, en tant que distribution en t , $G(t)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1; \mathcal{D}_1)$, c'est-à-dire que $\langle G(t), \varphi(t) \rangle \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1; \mathcal{D}_1)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$.

Jusqu'ici, lorsque $G(t)$ prenait ses valeurs dans un espace $\mathcal{L}(E; F)$, nous maintenions $E = \mathcal{D}'_1$ et nous cherchions à obtenir des propriétés intéressantes de $G(t)$ en élargissant F .

Nous pouvons maintenant essayer la méthode inverse : maintenir $F = \mathcal{D}_1$ et restreindre E . On peut procéder par transposition : si $G(t)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1; \mathcal{D}'_{2k+1})$ ($k \geq 0$), son transposé prend les siennes dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1}; \mathcal{D}_1)$. Mais puisque l'opérateur $-\Delta + p^2$ est égal à son transposé, il en est de même pour son inverse \mathcal{C}_{p^2} donc pour $G(t)$. Ce transposé aura évidemment les mêmes propriétés de dérivabilité que $G(t)$.

Pour le voir il suffit d'ailleurs de partir de l'égalité $\mathcal{C}_{p^2} (I - \frac{\Delta}{p^2}) = I$, où I est une certaine injection canonique. Cette égalité est la transposée de

$(I - \frac{\Delta}{p^2}) \mathcal{G}_{p^2} = I$ qui nous avait servi jusqu'ici à obtenir nos développements limités de $G(t)$; elle nous donne :

$$\mathcal{G}_{p^2} = \sum_{s=0}^k \frac{\Delta^s}{p^{2s+2}} + \mathcal{G}_{p^2} \frac{\Delta^{k+1}}{p^{2k+2}} ;$$

et l'on voit bien que $\mathcal{G}_{p^2} \Delta^{k+1}$ applique \mathcal{D}_{2k+1} dans \mathcal{D}_1 . En effet, Δ^{k+1} applique \mathcal{D}_{2k+1} dans \mathcal{D}'_1 et \mathcal{G}_{p^2} applique \mathcal{D}'_1 dans \mathcal{D}_1 .

En passant à la limite suivant k , on voit que $G(t)$ (ou plus rigoureusement sa restriction à \mathcal{D}) est une fonction indéfiniment dérivable de $t \geq 0$, nulle pour $t < 0$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}; \mathcal{D}_1)$.

Remarquons encore qu'on peut introduire des espaces intermédiaires : $\Delta^h \mathcal{G}_{p^2} \Delta^{k+1-h}$ applique $\mathcal{D}_{2k+1-2h}$ dans \mathcal{D}'_{2h-1} .

En convenant que $\mathcal{D}_{-1} = \mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_{-1} = \mathcal{D}_1$, on voit que, pour chaque $0 \leq h \leq k+1$, $G(t)$ peut être considéré comme une fonction de t , nulle pour $t < 0$, $(2k-1)$ fois dérivable pour $t > 0$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1-2h}; \mathcal{D}'_{2h-1})$.

Par contre, on ne peut pas en déduire que $G(t)$ soit $(2k-1)$ fois dérivable pour $t \geq 0$ en la considérant comme à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+3}; \mathcal{D}_3)$, ou plus généralement dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1+r}; \mathcal{D}_{r+1})$ si $r \geq 1$, ou dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_{r+1}; \mathcal{D}'_{2k+1+r})$.

Application aux problèmes de Cauchy fins.

Il s'agit de résoudre $\square u = g$. En ce qui concerne les conditions initiales, on désire $u \in \mathcal{C}_t^2(\mathcal{D}')$ ⁽¹⁾ et $u_0 = u_1 = 0$. En ce qui concerne les valeurs au contour, si on est peu exigeant, on voudra que $u \in \mathcal{D}'_t(\mathcal{D}_1)$; si on l'est plus, que $u \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{D}_1)$; et si on l'est extrêmement, que $u \in \mathcal{C}_t^2(\mathcal{D}_1)$. Pour espérer satisfaire à ces exigences, il faut imposer à g certaines conditions. Encore celles-ci ne devront pas être trop ubuesques !

(1) Dans ce qui suit, pour simplifier, \mathcal{C}_t^m désignera l'espace des fonctions nulles pour $t < 0$ et m fois continûment dérivables pour $t \geq 0$.

Remarquons tout d'abord que nos premières conditions sont vérifiées dès que $g(t)$ (prenant ses valeurs dans \mathcal{D}'_1) est continue pour $t \geq 0$. En effet, $u = G * g$, $G \in \mathcal{E}_t^3(\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1; \mathcal{D}'_5))$ et $G(0) = 0$, $G'(0) = I$. Par conséquent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G' * g, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \{G''\} * g + g$$

sont des fonctions continues pour $t \geq 0$; et visiblement $u_0 = u_1 = 0$.

Remarquons que $u_2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{t=0} = g(0)$; c'est normal puisque

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{t=0} = g(0) + (\Delta u)_{t=0} \quad \text{et que} \quad (\Delta u)_{t=0} = \Delta(u_0) = 0.$$

Si on désire seulement que $u \in \mathcal{D}'_t(\mathcal{D}_1)$, on sera automatiquement satisfait car $G \in \mathcal{D}'_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1; \mathcal{D}_1))$.

Si on veut que $u \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_1)$, pour que ça marche, on pourra supposer que

- 1°) a) $g \in \mathcal{E}_t^3(\mathcal{D}'_1)$;
 b) $g(0) = g'(0) = 0$.

En effet, nous avons vu que $G(t)$ est dérivée troisième (au sens des distributions) d'une fonction $H(t) \in \mathcal{E}_t^3(\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1; \mathcal{D}_1))$. Alors $u = G * g = H''' * g = H * g''' = H * \{g'''\} + H g''(0)$ est bien une fonction continue de $t \geq 0$ à valeurs dans \mathcal{D}_1 . Mais il est clair que les conditions b) peuvent être gênantes.

On peut aussi imposer :

- 2°) $g \in \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_1)$, sans conditions pour $t = 0$. Mais alors g doit être nulle au contour. Comme $G(t)$ est dérivée première de $H \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{L}(\mathcal{D}_1; \mathcal{D}_1))$, $u = G * g = H' * g = H * \{g'\} + H g(0) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_1)$.

Si on impose

- 3°) $g \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_3)$, ce qui signifie que g est nulle au contour ainsi que ses dérivées d'ordre ≤ 2 (dérivées par rapport à x_1, \dots, x_n), alors $u = G * g \in \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_1)$ car $G \in \mathcal{E}_t^1(\mathcal{L}(\mathcal{D}_3; \mathcal{D}_1))$. On obtient plus qu'on ne voulait; cela tient à ce que les conditions affirmant que $G(t)$ appartient à $\mathcal{E}_t^{2k-2}(\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1}; \mathcal{D}_1))$ entraînent que $G(t)$ appartienne aussi à $\mathcal{E}_t^{2k-1}(\mathcal{L}(\mathcal{D}_{2k+1}; \mathcal{D}_1))$.

Passons maintenant à un problème de Cauchy plus général, dans lequel les valeurs initiales et celles au contour ne sont plus nécessairement nulles. Ces dernières seront précisées par la donnée d'un élément $\gamma \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{C}_1)$. On cherche $u \in \mathcal{C}_t^2(\mathcal{D}'_1)$ tel que $\square u = g$ et que $\gamma - u \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{D}_1)$ (on pourrait d'ailleurs remplacer \mathcal{C}_t^0 par d'autres espaces, par exemple \mathcal{D}'_t). Posons $U(t) = \gamma(t) (u(t) - \gamma(t))$; alors :

$$\square U(t) = g - \square \gamma + (u_1 - \gamma_1) \otimes \delta(t) + (u_0 - \gamma_0) \otimes \delta'(t)$$

d'où :

$$u = \gamma + G * \square U = \gamma + G * [g - \square \gamma + (u_1 - \gamma_1) \otimes \delta(t) + (u_0 - \gamma_0) \otimes \delta'(t)].$$

Appliquons les résultats obtenus précédemment. Nous voulons que $U \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{D}'_1)$. Quelles conditions suffira-t-il d'imposer aux divers termes du second membre ?

1) Conditions sur g : si $g(t) \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{D}'_1)$, alors $G * g \in \mathcal{C}_t^2(\mathcal{D}')$.
D'autre part, si $g \in \mathcal{C}_t^1(\mathcal{D}_1)$ par exemple (condition 2°), p. 3),
 $G * g \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{D}_1)$.

2) Conditions sur $u_0 - \gamma_0$, $u_1 - \gamma_1$:

Si $u_0 - \gamma_0 \in \mathcal{D}_3$, et $u_1 - \gamma_1 \in \mathcal{D}_3$, on aura évidemment
 $G'(t) (u_0 - \gamma_0) \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{D}_1)$ puisque $G \in \mathcal{C}_t^1(\mathcal{L}(\mathcal{D}_3; \mathcal{D}_1))$, et a fortiori
 $G(t) (u_1 - \gamma_1) \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{D}_1)$.

On voit que, pour $t = 0$, les conditions au contour doivent être assez strictes.

3) Conditions sur γ et $\square \gamma$

Il serait absurde d'imposer des conditions au contour à γ , qui précisément sert à définir les valeurs au contour de u . Celles-ci doivent être a priori quelconques !

Reportons-nous au problème de Cauchy avec conditions aux limites nulles. Dans ce cas-là, il fallait que le second membre possédât certaines propriétés, afin que $u \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{D}_1)$: parmi celles-ci, 2°) et 3°) faisaient intervenir les valeurs au contour, mais non 1°). Ces dernières donnent, dans notre cas :

a) $\square \gamma \in \mathcal{C}_t^3(\mathcal{D}'_1)$;

b) $\gamma_2 - \Delta \gamma_0 = \gamma_3 - \Delta \gamma_1 = 0$, où $\gamma_r = \left(\frac{\partial^r \gamma}{\partial t^r} \right)_{t=0}$. Et l'on voit que

$\gamma \in \mathcal{C}_t^5(\mathcal{C}_1)$ implique $\square \gamma \in \mathcal{C}_t^3(\mathcal{D}'_1)$.