Laurent Schwartz

Méthode des ondes stationnaires

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. n° 6, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes
Année 1955/56
-:-:-:-

1er juin 1956
Exposé n° 6

MÉTHODE DES ONDES STATIONNAIRES

par Laurent SCHWARTZ.

-:-:-:-

On va abandonner la méthode de la transformation de Laplace par rapport au temps et utiliser un développement de Fourier par rapport à l'espace.

L'onde stationnaire sera une solution de l'équation des ondes nulle au bord de Ω et produit d'une fonction de l'espace par une fonction du temps :

$$\begin{cases} u(x\ ,\ t) = U(x)V(t) \\ U(x) \text{ nulle au bord} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \end{cases}$$

L'équation devient donc : $U(x)V''(t) - \Delta U(x)\, V(t) = 0$

d'où : $$\frac{V''}{V} = \frac{\Delta U}{U}$$

Les deux membres étant respectivement fonctions de t et x seul doivent être constants :

$$\begin{cases} V'' + s^2 V = 0 \\ \Delta U + s^2 U = 0 \quad \text{et } U \text{ nulle au bord} \end{cases}$$

d'où $V = A \cos\ st + B \sin\ st$, avec les valeurs de s qui permettent de trouver une solution de $\Delta U + s^2 U = 0$ nulle au bord mais non identiquement nulle.

On cherche donc s , U tels que :

$$\Delta U + s^2 U = 0 \quad \text{avec} \quad U \in \mathcal{D}_1$$

Ce n'est pas exactement le problème de Dirichlet dont le traitement classique (à l'aide par exemple de la formule de Green ou du principe du maximum) suppose des hypothèses plus fortes sur le comportement au bord.

Formule de Green pour $\mathcal{D}_1(\Omega)$.

Pour $U\ ,\ V \in \mathcal{D}_1$ on a : $\langle \overline{\Delta U}\ ,\ V \rangle + \sum \langle \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial x_i}\ ,\ \dfrac{\partial V}{\partial x_i} \rangle = 0$

En effet pour $U \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$ on a par définition de la dérivée :

$$< \overline{\Delta U} , \varphi > + \sum < \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > = 0$$

Si $U \in \mathcal{D}_1$, $\overline{\Delta U} \in \mathcal{D}_1'$, l'application $\varphi \to < \overline{\Delta U} , \varphi >$ est donc continue pour la topologie induite par $\mathcal{D}_1$. Il en va de même de l'application $\varphi \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ pour les topologies induites par $\mathcal{D}_1$ pour φ et par L^2 pour $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Enfin comme $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} \in L^2$, l'application $\varphi \longrightarrow \sum < \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$ est continue au sens de la topologie induite par $\mathcal{D}_1$. Mais $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}_1$, les expressions $< \overline{\Delta U} , \varphi >$, $- \sum < \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$, continues sur $\mathcal{D}_1$ et égales sur $\mathcal{D}$, sont donc égales sur $\mathcal{D}_1$. C.Q.F.D.

En particulier pour $U \in \mathcal{D}_1$: $< \overline{\Delta U} , U > + \sum < \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} , \frac{\partial U}{\partial x_i} > = 0$

et si U est de plus métaharmonique : $-s^2 < \overline{U} , U > + \sum < \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} , \frac{\partial U}{\partial x_i} > = 0$ ce qui entraine immédiatement $s^2 \geqslant 0$.

$s \neq 0$ car dans le cas contraire : $\sum < \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} , \frac{\partial U}{\partial x_i} > = 0$ donc $U = cte$ sur toute composante connexe de Ω . Or ([2]) $U = Cte$ sur Ω et $U \in \mathcal{D}_1 \Longrightarrow U = 0$ (1).

<u>Les ondes stationnaires comme vecteurs propres de</u> $\tilde{G}_1$.

On va maintenant retrouver ces résultats et les améliorer en supposant connue la théorie des opérateurs complètement continus (c'est-à-dire tels que l'image d'une boule soit relativement compacte). On se rappelle que, l'espace $\mathcal{D}_1$ étant rendu hilbertien par l'introduction du produit scalaire :

$$(u , v)_1 = \int_\Omega (u\bar{v} + \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_i}) dx$$

l'isomorphisme canonique qui le transforme en son dual est défini par $-\Delta + J$ (J , injection de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}_1'$) dont l'inverse est G_1 , c'est-à-dire que :

$$(u , v)_1 = < - \Delta u + u , \bar{v} > \quad (u , v \in \mathcal{D}_1)$$

$$< u , v > = (G_1 u , \bar{v})_1 \quad (u \in \mathcal{D}_1' , v \in \mathcal{D}_1)$$

(1) Dans [2] nous avons vu que $1 \in \mathcal{D}_1(\Omega)$ entraîne que la frontière $\dot{\Omega}$ soit de capacité nulle; mais alors $1 \notin L^2(\Omega)$ (à cause de l'infini); donc finalement on n'a <u>jamais</u> $1 \in \mathcal{D}_1(\Omega)$.

Lorsque $U \in \mathcal{W}_1$, $-\Delta U - s^2 U = -\Delta U + U - (1+s^2)U = 0$

équivaut donc à : $U - G_1(1+s^2)U = 0$

ou, notant $\tilde{G}_1$ la restriction à $\mathcal{W}_1$ de G_1 ($\tilde{G}_1 = G_1 \circ J$) :

$$(\tilde{G}_1 - \frac{1}{1+s^2} I)\, U = 0$$

En d'autres termes : U est vecteur propre de $\tilde{G}_1$ pour la valeur propre $\frac{1}{1+s^2}$.

Or $\tilde{G}_1$ est hermitien donc $\frac{1}{1+s^2}$ est réel ; $0 \leq G_1 \leq I$ donc $0 \leq \frac{1}{1+s^2} \leq 1$ et $s^2 \geq 0$; enfin $\tilde{G}_1$ est biunivoque donc $s^2 < \infty$ (le fait que $s \neq 0$ nécessite une démonstration spéciale qui a été faite plus haut).

<u>Proposition 1</u>. - $\tilde{G}_1$ <u>est complètement continu si</u> Ω <u>est borné</u>.

En effet, $\tilde{G}_1 = G_1 \circ J$. Nous montrerons plus tard que J est complètement continu pour tout ouvert Ω borné (de même que l'injection de tout $\mathcal{W}_k$ dans $\mathcal{W}_{k-1}$ ainsi que de $\mathcal{W}'_\ell$ dans $\mathcal{W}'_{\ell+1}$). Il transforme donc la boule unité en une partie relativement compacte que G_1 , continu, transforme en une nouvelle partie relativement compacte. C.Q.F.D.

Le théorème de Riesz dit que les valeurs propres d'un opérateur complètement continu forment une suite qui admet 0 comme seul point d'accumulation et qu'à chacune d'elles, sauf peut-être 0 le cas échéant, correspond un sous-espace propre de dimension finie.

De plus, pour un opérateur hermitien, ces sous-espaces vectoriels sont deux à deux orthogonaux et il existe une base hilbertienne formée de vecteurs propres. Celà entraine le

<u>THÉORÈME</u>. - <u>Si</u> Ω <u>est borné, il existe une suite non bornée de nombres</u> s_ν $0 < s_1 \leq \dots \leq s_\nu \leq \dots$ <u>et une suite de fonctions</u> U_ν de $\mathcal{W}_1$ <u>tels que</u> $\Delta U_\nu + s_\nu^2 U_\nu = 0$, <u>et</u> $\{U_\nu\}$ <u>est une base hilbertienne de</u> $\mathcal{W}_1$.

<u>Proposition 2</u>. - <u>Les</u> U_ν <u>forment une suite orthogonale complète dans</u> L^2 .

- Orthogonale. Pour les fonctions métaharmoniques, il existe une relation remarquable entre les produits scalaires dans $\mathcal{W}_1$ et dans L^2 : soient $U , V \in \mathcal{W}_1$ avec $\Delta U + s^2 U = 0$. Il vient :

$$(U , V)_1 = \langle -\Delta U + U , \bar{V} \rangle = (1+s^2) \langle U , \bar{V} \rangle = (1+s^2)(U,V)_{L^2}$$

Si U et V sont orthogonales dans $\mathcal{W}_1$ elles le sont donc aussi dans L^2 .

On a encore $(U_\nu , U_\nu)_1 = (1 + s_\nu^2)(U_\nu , U_\nu)_{L^2}$ d'où : $\| U_\nu \|_{L^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+s_\nu^2}}$.
Il pourra d'ailleurs être préférable de normaliser les U_ν dans L^2. De plus on voit de nouveau que deux fonctions propres de $\tilde{G}_1$ correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonales dans $\mathcal{D}_1$ et dans L^2 car on a :
$(U , V)_1 = (1 + s^2)(U , V)_{L^2} = (1 + t^2)(U , V)_{L^2}$

- Complète, puisque $\mathcal{D}_1$ est dense dans L^2.

<u>Proposition 3</u>. - <u>Les</u> U_ν <u>forment une suite orthogonale complète dans</u> $\mathcal{D}_1'$.
Car l'isomorphisme d'espaces de Hilbert de $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_1'$, $-\Delta + J$, transforme U_ν en $(1 + s_\nu^2) U_\nu$, ce qui entraine aussi que :

$$\| U_\nu \|_{\mathcal{D}_1'} = \frac{1}{1+s^2} .$$

<u>Attention</u>

$\{U_\nu\}$ n'est pas complète dans $\mathcal{E}_1$ bien que $\mathcal{E}_1 \subset L^2$. Cela paraît évident, mais donne lieu à des faux raisonnements : $U \in \mathcal{E}_1 \Longrightarrow U \in L^2$ donc $U = \sum c_\nu U_\nu$ convergent dans L^2 , avec $c_\nu = \sqrt{1+s_\nu^2}\,(U , \sqrt{1+s_\nu^2}\, U_\nu)_{L^2}$ donc $c_\nu = (1 + s_\nu^2)(U , U_\nu)_{L^2}$; mais on ne peut rien en conclure au sujet d'un développement convergent dans $\mathcal{E}_1$. En particulier les produits scalaires dans $\mathcal{E}_1$ et L^2 n'ont rien à voir sans quoi le développement précédent tendrait au sens de $\mathcal{E}_1$ donc de L^2 vers la projection $\mathcal{E}_1$-orthogonale de U sur $\mathcal{D}_1$, $G_1(-\Delta + J')U$ (J' injection de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{D}_1'$) , ce qui est faux puisqu'il converge vers U dans L^2 .

CRITÈRES D'APPARTENANCE A $\mathcal{D}_1$, L^2 , $\mathcal{D}_1'$.

<u>Proposition 4</u>. - <u>Soient</u> $\mathcal{H}$ <u>un espace de Hilbert,</u> $\subset \mathcal{D}'$, <u>avec une topologie plus fine que la topologie induite par</u> $\mathcal{D}'$, $\{U_\nu\}$ <u>une base hilbertienne de</u> $\mathcal{H}$. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $U \in \mathcal{D}'$ <u>soit dans</u> $\mathcal{H}$ <u>est qu'il existe une suite</u> c_ν <u>telle que</u> : $U = \sum c_\nu U_\nu$ <u>au sens de</u> $\mathcal{D}'$ <u>et</u> $\sum |c_\nu|^2 < \infty$. <u>Il existe alors une seule suite répondant à ces deux conditions</u>.

- La condition est nécessaire : $U \in \mathcal{H} \Longrightarrow$ il existe un développement $U = \sum c_\nu U_\nu$ au sens de $\mathcal{H}$ avec $\sum |c_\nu|^2 < \infty$. Mais la topologie de $\mathcal{H}$ étant plus fine que celle induite par $\mathcal{D}'$ on a aussi :

$$U = \sum c_\nu U_\nu \quad \text{au sens de } \mathcal{D}' .$$

- Elle est suffisante : $U = \sum c_\nu U_\nu$ au sens de $\mathcal{D}'$ avec $\sum |c_\nu|^2 < \infty$. Donc il existe $U' \in \mathcal{H}$ telle que $U' = \sum c_\nu U_\nu$ au sens de $\mathcal{H}$. Mais alors, toujours à cause de la relation d'inclusion entre les topologies de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{D}'$, $U' = \sum c_\nu U_\nu$ (au sens de $\mathcal{D}'$) $= U$.

- Unicité. Soit $\sum c_\nu U_\nu = 0$ au sens de $\mathcal{D}'$ avec $\sum |c_\nu|^2 < \infty$. Alors il existe $U \in \mathcal{H}$ avec $U = \sum c_\nu U_\nu$ au sens de $\mathcal{H}$ donc au sens de $\mathcal{D}'$. Et comme $\sum c_\nu U_\nu = 0$ au sens de $\mathcal{D}'$, $U = 0$ et $c_\nu = 0$ à cause de l'unicité du développement dans $\mathcal{H}$.

L'unicité n'est donc démontrée que pour une suite de coefficients de carré sommable et n'est plus assurée en dehors de cette condition. En voici un exemple, précisément dans le cas que nous traitons ici.

Ω étant borné, on a $1 \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une suite c_ν telle que $1 = \sum c_\nu U_\nu$ au sens de L^2. Mais : $\Delta U_\nu = - s_\nu^2 U_\nu$, donc $0 = -\Delta 1 = \sum c_\nu s_\nu^2 U_\nu$ au sens de $\mathcal{D}'_2$, les c_ν n'étant pas tous nuls.

Autre exemple : sur le cercle de circonférence $2L$ la dérivée $\tilde{\delta}'$ de la mesure de Dirac est dans $\mathcal{D}'_2$ et a pour développement de Fourier :

$$\tilde{\delta}' = \sum - \frac{\nu\pi}{L^2} \sin \frac{\nu\pi x}{L}$$ au sens de $\mathcal{D}'_2$ du cercle, de sorte qu'en prenant pour Ω l'intervalle ouvert $(0, L)$ on a :

$$\sum \frac{\nu\pi}{L} \sin \frac{\nu\pi x}{L} = 0 \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'_2(\Omega) .$$

On voit que sous diverses formes, en particulier à cause du caractère non dense de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{E}_1$, c'est le comportement au bord qui est cause de surprises.

Critères obtenus.

On peut appliquer la proposition 4 à $\mathcal{D}_1$, L^2, $\mathcal{D}'_1$.

$U \in \mathcal{D}_1 \iff \exists u_\nu$ avec $\sum |u_\nu|^2 < \infty$, $U = \sum u_\nu U_\nu$ au sens de $\mathcal{D}'$

$U \in L^2 \iff$ - - - - - $\sum \frac{|u_\nu|^2}{s_\nu^2} < \infty$ - - - - - - - - - - - - - - -

$U \in \mathcal{D}'_1 \iff$ - - - - - $\sum \frac{|u_\nu|^2}{s_\nu^4} < \infty$ - - - - - - - - - - - - - - -

$$U = \sum c_\nu U_\nu \quad \text{au sens de } \mathcal{D}' \text{ avec } \sum |c_\nu|^2 = \infty$$

n'entraîne pas que $U \notin \mathcal{D}_1$. Par contre si on a trouvé un développement $\{c_\nu\}$ tel que $\sum \frac{|c_\nu|^2}{s_\nu^4} < \infty$ c'est certainement là le développement hilbertien selon les U_ν et la distribution n'est pas dans $\mathcal{D}_1$ si $\sum |c_\nu|^2 = \infty$ ni dans L^2 si $\sum \frac{|c_\nu|^2}{s_\nu^2} = \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SCHWARTZ, L. Cours de Méthodes Mathématiques de la Physique. - Paris, CDU, 1956, fascicule VII.

[2] SCHWARTZ, L. Séminaire, 2. - Paris, 1954/55 (multigraphié) exposé n° 15.