JACQUES L. LIONS

# Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications, I

*Séminaire Schwartz*, tome 5 (1960-1961), exp. n° 1, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1960-1961__5__A1_0>

# QUELQUES PROCÉDÉS D'INTERPOLATION D'OPÉRATEURS LINÉAIRES ET QUELQUES APPLICATIONS, I.

Conférence faite par Jacques L. LIONS
rédigée par Mlle Nimet EL ABED

INTRODUCTION. - Dans toute la suite, un triplet $(A_0 , A_1 , \mathfrak{A})$ désignera un ensemble de trois espaces vectoriels topologiques :

1° $\mathfrak{A}$ localement convexe

2° $A_0$ et $A_1$ deux espaces de Banach, $A_0$ et $A_1 \subset \mathfrak{A}$

3° $A_0 \cap A_1$ dense dans chacun des $A_i$ $(i = 1,2)$ , étant entendu que, dans tout cet exposé, $A \subset B$ signifie : inclusion algébrique et topologique.

Si $A_0$ et $A_1$ sont deux espaces de Banach, par une construction algébrique évidente on définit l'espace vectoriel $A_0 + A_1$ . On munit cet espace de la topologie définie par la norme :

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{\begin{cases} a = a_0 + a_1 \\ a_0 \in A_0 \\ a_1 \in A_1 \end{cases}} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1})$$

$A_0 + A_1$ est alors un espace de Banach.

Si $(A_0 , A_1 , \mathfrak{A})$ et $(B_0 , B_1 , \mathfrak{B})$ désignent deux triplets, nous dirons que $\pi \in \mathcal{L}(A_0 , B_0) \cap \mathcal{L}(A_1 , B_1)$ (1), si $\pi$ est une application linéaire continue de $(A_0 \cap A_1)$ dans $(B_0 \cap B_1)$ pour les topologies induites respectivement par $A_0$ et $B_0$ , $A_1$ et $B_1$ . Il se prolonge alors par continuité à $A_0$ et $A_1$ , d'où la définition.

LEMME. - Si $\pi \in \mathcal{L}(A_0 , B_0) \cap \mathcal{L}(A_1 , B_1)$ , alors il se prolomge en un opérateur de $\mathcal{L}(A_0 + A_1 , B_0 + B_1)$ .

---

(1) $\mathcal{L}(A , B)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $A_0$ dans B .

DÉFINITION. - Soient deux triplets $(A_0, A_1, \mathfrak{A})$, $(B_0, B_1, \mathfrak{B})$. Nous dirons que $A$ et $B$ forment un couple d'interpolation relativement à $(A_0, A_1)$ et $(B_0, B_1)$ si :

1° $A_0 \cap A_1 \subset A \subset A_0 + A_1$, $B_0 \cap B_1 \subset B \subset B_0 + B_1$

2° Tout élément de $\mathcal{L}(A_0, B_0) \cap \mathcal{L}(A_1, B_1)$ est dans $\mathcal{L}(A, B)$.

$A$ (resp. $B$) sera dit un espace d'interpolation pour $A_0$ et $A_1$ (resp. $B_0$ et $B_1$).

REMARQUE. - On pourrait pòser des problèmes plus généraux.

a. Si les $A_i$ sont, par exemple, des espaces de Fréchet, existe-t-il des espaces d'interpolation qui soient des espaces de Fréchet ?

b. Si les $A_i$ sont des algèbres de Banach (ou encore des algèbres normées), existe-t-il des espaces d'interpolation qui soient des algèbres de Banach ( resp. des algèbres normées) ?

On peut ainsi résoudre des problèmes des types suivants :

- Connaissant des propriétés sur des espaces $L^1$ et $L^2$, en déduire des propriétés sur des espaces $L^p$ convenables.

- Connaissant un résultat sur des dérivées d'ordre $k$ et $(k-1)$ de fonctions ou de distributions, en déduire des résultats sur des dérivées d'ordre fractionnaire $\rho$ avec $k-1 < \rho < k$.

## Méthode des traces

### 1. Définition des espaces de traces.

Soit $(A_0, A_1, \mathfrak{A})$ un triplet.

DÉFINITION 1.1. - On note $W(p, \alpha, A_0; q, \beta, A_1)$,
$1 < p \leqslant +\infty$; $1 < q \leqslant +\infty$

$$\theta = \frac{1}{p} + \alpha, \quad \theta_1 = \frac{1}{q} + \beta$$

$$\theta \text{ et } \theta_1 \in ]0, 1[$$

l'espace des fonctions $u$, telles que :

(1.1) $$t^{\alpha}\, u \in L^p(]0\,,+\infty[\,;A_0)$$

(1.2) $$t^{\beta}\, u' \in L^q(]0\,,+\infty[\,;A_1)$$

$u'$ désignant la dérivée de $u$ dans l'espace $\mathcal{D}'(]0\,,\infty[\,;A_0)$ des distributions sur $]0\,,+\infty[$ à valeurs dans $A_0$.

Remarquons que l'hypothèse (1.2) a bien un sens ; en effet, $u$ est localement sommable sur $]0\,,+\infty[$ d'après (1.1), donc $u \in \mathcal{D}'(]0\,,+\infty[\,;A_0) \subset \mathcal{D}'(]0\,,+\infty[\,;\mathcal{A})$

$W$ sera muni de la topologie définie par la norme :

$$||u||_W = \max\left\{||t^{\alpha}\, u||_{L^p(A_0)}\,,\ ||t^{\beta}\, u'||_{L^q(A_1)}\right\}$$

$W$ est alors un espace de Banach.

PROPOSITION 1.1. - Pour tout $T < +\infty$, et pour tout $u \in W$, on a :

$$u \in L^1(]0\,,T[\,;A_0)\ ,\quad u' \in L^1(]0\,,T[\,;A_1) \quad .$$

En effet :

$$\int_0^T ||u(t)||_{A_0}\, dt = \int_0^T ||t^{\alpha}\, u(t)||_{A_0}\, t^{-\alpha}\, dt$$

$$\leqslant ||t^{\alpha}\, u||_{L^p(]0,T[;A_0)}\, ||t^{-\alpha}||_{L^{p'}(]0,T[;\mathbb{R})} < +\infty$$

d'après l'inégalité de Hölder, avec $\frac{1}{\alpha p'} = 1 + \frac{1-\theta}{\alpha} > 1$.

Donc, pour tout $T < \infty$, $u$ est presque partout égale à une fonction continue sur $[0\,,T]$ à valeurs dans $A_0 + A_1$, et $u(0)$ est définie (en identifiant $u$ à cette fonction continue).

Considérons l'application $\varphi : u \to u(0)$, de $W$ dans $A_0 + A_1$. Soit $\varphi(W) = T(p\,,\alpha\,,A_0\,;q\,,\beta\,,A_1)$. Si $N(p\,,\alpha\,,A_0\,;q\,,\beta\,,A_1)$ désigne le noyau de cette application $\frac{W}{N}(p\,,\alpha\,,A_0\,;q\,,\beta\,,A_1)$ l'espace quotient muni de la topologie quotient, $\dot{\varphi}$ l'isomorphisme algébrique de $\frac{W}{N}(p\,,\alpha\,,A_0\,;q\,,\beta\,,A_1)$ sur $T(p\,,\alpha\,,A_\theta\,;q\,,\beta\,,A_1)$, alors $T(p\,,\alpha\,,A_0\,;q\,,\beta\,,A_1)$ sera muni de la topologie-image par $\dot{\varphi}$ de la topologie-quotient ; c'est alors un espace de Banach pour la norme :

$$\|a\|_T = \inf_{u(0)=a} \|u\|_W \quad ;$$

$T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ (avec les conditions imposées aux paramètres que nous omettrons par la suite) sera : "espace de trace". $\theta = \frac{1}{p} + \alpha$ désignera le "paramètre de dosage".

THÉORÈME 1.1. - Si $(A_0 , A_1 , \mathfrak{A})$ , $(B_0 , B_1 , \mathfrak{B})$ désignent deux triplets, $\pi$ un opérateur linéaire continu de $\mathcal{L}(A_0 , B_0) \cap \mathcal{L}(A_1 , B_1)$ de normes respectives $\varpi_0$ et $\varpi_1$ , alors pour tous $p , q , \alpha , \beta$ tels que : $1 < p , q \leq +\infty$ , $\theta$ et $\theta_1 \in ]0 , 1[$ ,

$$\pi \in \mathcal{L}(T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1) ; T(p , \alpha , B_0 ; q , \beta , B_1)) \quad ;$$

la norme de $\pi$ dans cet espace étant $\leq \varpi_0^{1-\gamma} \varpi_1^{\gamma}$ avec $\gamma = \frac{\theta}{1 + \theta - \theta_1}$ .

LEMME. - $\|a\|_T = \inf\limits_{u(0)=a} \left\{ \|t^\alpha u\|^{1-\gamma}_{L^p(]0,\infty[;A_0)} \|t^\beta u'\|^{\gamma}_{L^q(]0,\infty[;A_1)} \right\}$ .

Soit $u \in W(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ ; posons $u_\lambda(t) = u(\lambda t)$ pour $\lambda > 0$ , alors $u_\lambda(0) = u(0)$ .

Donc :

$$\|a\|_T \leq \inf_{\lambda > 0} \|u_\lambda\|_W$$

$$= \inf_{\lambda>0} \left\{ \sup \left( \lambda^{-\theta} \|t^\alpha u\|_{L^p(]0,\infty[;A_0)} \; ; \; \lambda^{1-\theta_1} \|t^\beta u'\|_{L^q(]0,\infty[;A_1)} \right) \right\} .$$

Il vient :

$$\|a\|_T \leq \left\{ \|t^\alpha u\|^{1-\gamma}_{L^p(]0,\infty[;A_0)} \|t^\beta u'\|^{\gamma}_{L^p(]0,\infty[;A_1)} \right\}$$

pour tout $u$ tel que $u(0) = a$ . On en déduit le lemme.

Soit $a \in T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ ; par définition, il existe $u \in W(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ tel que $u(0) = a$ .

Soit $\pi \in \mathcal{L}(A_0 , B_0) \cap \mathcal{L}(A_1 , B_1)$ , soit $v(t) = \pi[u(t)]$ ,

$$\|t^{\alpha} v\|_{B_0} \leqslant \varpi_0 \; \|t^{\alpha} u\|_{A_0} \; , \quad t^{\alpha} u \in L^q(]0 , \infty[ \; ; A_0)$$

donc

$$t^{\alpha} v \in L^q(]0 , \infty[ \; ; B_0)$$

$$t^{\beta} v' \in L^q(]0 , \infty[ \; ; B_1)$$

avec $v' = \pi u'$ .

Or $\pi(a) = v(0)$ , donc $\pi(a) \in T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , B_1)$ et $\pi$ définit une application linéaire de $T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ dans $T(p , \alpha , B_0 ; q, \beta , B_1)$ .

$\pi$ est continue en tant qu'application dans ces deux derniers espaces, en effet :

$$\|\pi(a)\|_T \leqslant \left\{ \|t^{\alpha} v\|^{1-\gamma}_{L^p(]0,\infty[;A_0)} \; \|t^{\beta} v'\|^{\gamma}_{L^q(]0,\infty[;A_1)} \right\}$$

$$\leqslant \varpi_0^{1-\gamma} \varpi_1^{\gamma} \; \|a\|_T \; ,$$

On en déduit le théorème.

On voit facilement que::

$$A_0 \cap A_1 \subset T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1) \subset A_0 + A_1$$

donc :

COROLLAIRE 1.1. - Si $(A_0 , A_1 , \mathfrak{a})$ , $(B_0 , B_1 , \mathfrak{B})$ sont deux triplets, alors les espaces $(T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1) ; T(p , \alpha , B_0 ; q , \beta , B_1))$ forment une famille de couples d'interpolation, dépendant de quatre paramètres, relativement aux triplets considérés.

On peut définir d'autres espaces de trace, avec extension aux dérivées d'ordre $> 1$ (cf. [7]).

On se propose de résoudre le problème suivant :

Soient $A_0 = L^{p_0}$ , $A_1 = L^{p_1}$ ; existe-t-il des paramètres réels $p , \alpha , q , \beta$ , tels que l'espace $L^{p_\theta}$ soit un espace $T(p , \alpha , A_0 ; q_1 , \beta, A_1)$ avec $\dfrac{1}{p_\theta} = \dfrac{1 - \theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ ?

On démontre les résultats suivants :

PROPOSITION 1.2. - Si $p_0 \geq p$ , $p_1 \geq q$ ; $\theta = \theta_1 = \frac{1}{p} + \alpha = \frac{1}{q} + \beta$ , alors

$$T(p , \alpha , L^{p_0} ; q , \beta , L^{p_1}) \subset L^{p_\theta}$$

avec $\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = \frac{1}{p_\theta}$ ; ces deux espaces sont identiques si $p = p_0$ et $q = p_1$ .

On retrouve le théorème de M. RIESZ [12] :

Si $\pi$ est une application linéaire continue de $L^{p_0}$ dans $L^{p_1}$ , de $L^{q_0}$ dans $L^{q_1}$ , avec $p_1 \geq p_0$ , $q_1 \geq q_0$ ; alors $\pi$ est une application linéaire continue de $L^{p_\theta}$ dans $L^{q_\theta}$ , avec $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{q_0} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{q_1}$ , de norme $\leqslant \varpi_0^{1-\theta} \varpi_1^{\theta}$ .

- On peut également étudier le cas des espaces de Sobolev [11].

2. Dualité des espaces de traces.

Soit $(A_0 , A_1 , \mathfrak{A})$ un triplet, $A_0$ et $A_1$ étant des espaces réflexifs, soient $A_0'$ et $A_1'$ leurs duals forts respectifs ; alors il est clair que

$$A_0' \cap A_1' \subset A_i' \subset A_0' + A_1'$$

et que $A_0' \cap A_1'$ est dense dans $A_0' + A_1'$ . On peut alors poser le problème de comparaison des espaces de traces de $A_0'$ et $A_1'$ , et du dual fort de $T'(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ .

THÉORÈME 2.1. - Si $A_0$ et $A_1$ sont des espaces réflexifs et vérifient l'hypothèse suivante : il existe une suite d'opérateurs $P_n$ , $(n = 1 , 2 , \ldots)$ , de $A_0$ dans $A_0 \cap A_1$ , et de $A_1$ dans $A_0 \cap A_1$ , tels que $P_n a_0$ (resp. $P_n a_1$ ) converge dans $A_0$ (resp. $A_1$ ) vers $a_0$ (resp. $a_1$ ), pour tout $a_0 \in A_0$ ( resp. tout $a_1 \in A_1$) ; alors, pour $1 < p < +\infty$, $1 < p' < +\infty$ ; $0 < \theta < 1$ , $0 < \theta_1 < 1$ ,

$$T'(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1) = T(p' , -\beta , A_1' ; p' , -\alpha , A_0')$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ .

Reprenons les notations du paragraphe précédent. $\dot{\varphi}$ est alors l'isomorphisme de $\frac{W}{N}(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ sur $T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ qui applique $\dot{u}$ sur $u(0)$ .

Alors la transposée de l'application $\dot{\varphi}$ , soit ${}^t\dot{\varphi}$ , est un isomorphisme de $T'(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ sur le polaire de $N(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ dans $(W(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1))'$ .

On démontre les lemmes suivants [9] et [7] respectivement :

LEMME 2.1. - Toute forme linéaire continue $L$ sur $W(p , \alpha , A_0 ; q, \beta, A_1)$ est de la forme :

$$L(u) = \int_0^{+\infty} \langle t^\alpha u(t) , f(t) \rangle \, dt + \int_0^{+\infty} \langle t^\beta u'(t) , g(t) \rangle \, dt$$

$u \in W$ , $f \in L^{p'}(]0 , \infty[ ; A_0')$ , $g \in L^{q'}(]0 , \infty[ ; A_1')$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ , les crochets désignant les produits scalaires respectivement de $A_0$ et $A_0'$ , $A_1$ et $A_1'$ .

LEMME 2.2. - Pour tout élément $L$ du polaire de $N(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ , soit $N^0$ , il existe $G \in W(q' , -\beta' , A_1' ; p' , -\alpha , A_0')$ , tel que :

$$L(u) = \int_0^{+\infty} \langle u' , G \rangle \, dt + \int_0^{+\infty} \langle u , G' \rangle \, dt \quad , \tag{1}$$

$G(0)$ étant déterminé de façon unique.

On peut alors considérer l'application $\psi$ qui, à $L \in N^0$ , fait correspondre $G(0)$ , $G$ étant l'élément de $W(q' , -\beta' , A_1' ; p' , -\alpha , A_0')$ vérifiant (1). On a alors le lemme suivant :

LEMME 2.3. - L'application $\psi$ est un isomorphisme de $N^0$ sur $T(q' , -\beta , A_1' ; p' , -\alpha , A_0')$ .

On déduit des lemmes précédents que l'application $\Phi = \psi \, {}^t\dot{\varphi}$ définit un isomorphisme de $T'(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ sur $T'(q' , -\beta , A_1' ; p' , -\alpha , A_0')$ .

D'autre part, si $b \in T'(q' , -\beta , A_1' ; p' , -\alpha , A_0')$ , il existe $G_b \in W(q' , -\beta , A_1' ; p' , -\alpha , A_0')$ , tel que :

$$\Phi(b) = G_b(0)$$

avec

$$\langle {}^t\dot{\varphi} \, b , u \rangle = \int_0^\infty \langle u' , G_b \rangle \, dt + \int_0^\infty \langle u , G_b' \rangle \, dt$$

Si $u(t) = \varphi(t)\, a$ , ( $\varphi$ fonction continûment différentiable à support compact, à valeurs réelles, telle que $\varphi(0) = 1$ ), alors :

$$\langle {}^t\dot{\varphi}\, b , u\rangle = \langle G_b(0) , a\rangle = \langle b , \dot{\varphi} u\rangle = \langle b , a\rangle = \langle \Phi b , a\rangle$$

donc les deux espaces $(T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1))'$ et $T(p' , -\beta , A_1' ; q' , -\alpha , A_0')$ sont identifiables algébriquement et topologiquement.

3. Espaces $T(p , \alpha , D(\Lambda) ; q , \beta , A_1)$ .

Soient $A_1$ un Banach, $G(t)$ un semi-groupe borné fortement continu dans $A_1$ , $\Lambda$ le générateur infinitésimal de $G(t)$ , $A_0 = D(\Lambda)$ le domaine de ce générateur muni de la norme du graphe.

Soit $A_1(p , \alpha , \Lambda)$ l'espace des éléments $a$ de $A_1$ tels que :

$$t^{\alpha-1}[G(t)\, a - a] \in L^p(]0 , \infty[ ; A_1) \qquad ,$$

cet espace muni de la norme qui en fait un espace de Banach :

$$|||a|||_{A_1(p , \alpha , \Lambda)} = \|a\|_{A_1} + \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\, \|G(t)\, a - a\|^p_{A_1}\, dt\right)^{1/p}$$

THÉORÈME 3.1. - Pour tout couple $(p , \alpha)$ tel que : $\theta = \frac{1}{p} + \alpha \in ]0 , 1[$ , $1 < p \leq +\infty$, les deux espaces $T(p , \alpha , A_0 ; p , \alpha , A_1)$ et $A_1(p , \alpha , \Lambda)$ sont identiques algébriquement et topologiquement, sans qu'il y ait identité des normes.

$$a.\quad T(p , \alpha , A_0 ; p , \alpha , A_1) \subset A_1(p , \alpha , \Lambda) \qquad .$$

Soit $u \in W(p , \alpha , A_0 ; p , \alpha , A_1)$ , avec $u(0) = a$ ; posons :

$$(3.1) \qquad f = u' - \Lambda u$$

alors $t^\alpha f$ est dans $L^p(]0 , \infty[ ; A_1)$ . Donc $f$ appartient à $L^1(]0 , T[ ; A_1)$ pour tout $T < +\infty$ d'après le paragraphe 1, et par suite $G(t - \sigma)\, f(\sigma)$ est dans $L^1(]0 , T[ ; A_1)$ puisque $G(t)$ est fortement borné. Alors $u$ est solution du problème de Cauchy défini par l'équation (3.1) jointe à la condition $u(0) = a$ . Donc :

$$u(t) = \int_0^t u'(\sigma)\, d\sigma - \int_0^t G(t-\sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma$$

$$G(t) - a = \int_0^t u'(\sigma)\, d\sigma - \int_0^t G(t-\sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma$$

D'après une inégalité de HARDY - LITTLEWOOD - POLYA [2] pour $\theta = \frac{1}{p} + \alpha < 1$, l'application :

$$g \to t^{\alpha-1} \int_0^t \sigma^{-\alpha} g(\sigma)\, d\sigma$$

définit un opérateur de $L^p(]0, \infty[\,; A_1)$ dans lui-même, de norme au plus égale à $\frac{1}{1-\theta}$. Or $t^\alpha u$ et $t^\alpha f$ sont dans $L^p(]0, \infty[\,; A_1)$ ; donc, si $M$ désigne la borne supérieure des normes des opérateurs $G(t)$, on a :

$$\|t^{(\alpha-1)}(G(t)\, a - a)\|_{L^p(]0,\infty[;A_1)} \leqslant \frac{1 + M(1 + \|\Lambda\|)}{1-\theta}\, \|u\|_W$$

pour tout $u \in W$ tel que $u(0) = a$, ce qui démontre la première assertion.

b. $T(p, \alpha, A_0 ; p, \alpha, A_1) = A_1(p, \alpha, \Lambda)$ .

Il suffit de démontrer l'égalité algébrique. Soit $a \in A_1(p, \alpha, \Lambda)$, nous voulons construire une fonction $u_1$ de $W$ telle que $u_1(0) = a$. Considérons la fonction continue pour $t \geqslant 0$ :

$$u(t) = \frac{1}{t} \int_0^t G(\sigma)\, a\, d\sigma$$

alors $u(0) = a$, et $u(t)$ est dans $D(\Lambda)$ pour tout $t > 0$. Si $f$ désigne une fonction continûment différentiable, à support compact, égale à $1$ à l'origine, on voit que :

$$t^\alpha uf \in L^p(]0, \infty[\,; A_0) \quad .$$

Il suffit donc de démontrer que, en remarquant que si on pose $u_1 = fu$, $u_1(0) = a$, $t^\alpha u'$ est dans $L^p(]0, \infty[\,; A_1)$. Or

$$u' = \frac{1}{t}(G(t)\, a - a) - \frac{1}{t^2} \int_0^t (G(\sigma)\, a - a)\, d\sigma \quad ,$$

pour tout $a \in D(\Lambda)$ on a :

$$\int_0^t \frac{d}{d\sigma} (G(\sigma)\ a)\ d\sigma = \Lambda \int_0^t G(\sigma)\ a\ d\sigma = \int_0^t \Lambda G(\sigma)\ a\ d\sigma = G(t)\ a - a \quad ,$$

l'opérateur $\Lambda$ étant formé, on en déduit que, pour tout $a \in A_1$ :

$$\frac{G(t)\ a - a}{t} = \frac{1}{t} (\Lambda u) \quad .$$

Or $a \in A_1(p\ ,\ \alpha\ ,\ \Lambda)$ , donc $t^{\alpha}(t^{-1}\ \Lambda u)$ est dans $L^p(]0\ ,\infty[\ ;\ A_1)$ . D'autre part :

$$t^{\alpha-2} \int_0^t \|G(\sigma)\ a - a\|_{A_1}\ d\sigma \leqslant t^{\alpha-1} \int_0^t \sigma^{-\alpha}(\sigma^{\alpha-1}\|G(\sigma)\ a - a\|_{A_1})\ d\sigma$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\theta}\ \|t^{\alpha-1}(G(\sigma)\ a - a)\|_{L^p(]0\ ,\infty[\ ;\ A_1)}$$

d'après le théorème de Hardy, donc la fonction $u_1 = u_f$ est dans $W(p\ ,\ \alpha\ ,\ A_0\ ;\ p\ ,\ \alpha\ ,\ A_1)$ ; ce qui achève la démonstration du théorème.

4. Applications.

Nous noterons dans ce paragraphe par $C^k$ , $k$ entier $\geqslant 0$ , les fonctions numériques sur $\underset{\sim}{R}$ , $k$ fois continûment différentiables, périodiques, de période 1 .

Soient $A_0 = C^1$ , $A_1 = C^0$ ; $G(t)$ le semi-groupe des translations défini par $G(t)\ f(x) = f(x + t)$ ; alors il est clair que le générateur de ce semi-groupe n'est autre que l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$ . Le théorème (3.1) nous montre alors que $T(p\ ,\ \alpha\ ,\ C^0\ ,\ p\ ,\ \alpha\ ,\ C^1)$ est l'ensemble des fonctions $f$ continues périodiques de période 1 à valeurs dans $A_0$ telles que les applications

$$\{t \to t^{\alpha-1}(f_t - f)\}$$

soient dans $L^p(]0\ ,\infty[\ ;\ C^0)$ pour $\theta \in ]0\ ,\ 1[$ , $0 < p \leqslant +\infty$ , en désignant par $f_t$ la fonction : $x \to f(x + t)$ .

En particulier si $p = \infty$ , $\theta = 1 - \alpha$ , $f$ est dans $T(\infty\ ,\ p\ ,\ C^0\ ;\ \infty\ ,\ p\ ,\ C^1)$ si et seulement s'il existe $M < \infty$ tel que :

$$\|f(x + t) - f(x)\|_{C^0} \leqslant M t^{1-\alpha} \quad .$$

On voit donc que $T(\infty, \alpha, C^0 ; \infty, \alpha, C^1) = Lip_\theta$ , où $Lip_\theta$ désigne les fonctions de $C^0$ vérifiant une condition de Lipschitz d'ordre $\theta$ . On retrouve le théorème :

THÉORÈME. - Si $\pi \in \mathcal{L}(C^0, C^1) \cap \mathcal{L}(C^1, C^1)$ , alors $\pi \in \mathcal{L}(Lip_\theta, Lip_\theta)$ .

On peut alors poser le problème : l'espace $C^1$ peut-il être défini comme espace d'interpolation du couple $(C^0, C^2)$ ? de façon générale, si $\Lambda$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe, dans un espace de Banach $A_1$ , $D(\Lambda)$ est-il un espace d'interpolation pour le couple $(D(\Lambda^2), A_1)$ ?

Notons ceci (GAGLIARDO, Communication personnelle ; on peut obtenir aussi ce résultat par les méthodes présentes) :

PROPOSITION. - Si $\pi \in \mathcal{L}(C^0, C^0) \cap \mathcal{L}(C^2, C^2)$ , alors $\pi$ est dans $\mathcal{L}(C^{1+\varepsilon}, C^1)$ et dans $\mathcal{L}(C^1, C^{1-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon \in ]0, 1[$ . ( $C^{p+\alpha}$ désignant ici l'espace des fonctions $f$ de $C^p$ , $p$ entier $\geqslant 0$ , $0 < \alpha < 1$ , dont les dérivées d'ordre $p$ vérifient une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha$ ).

## 5. Généralisation.

Soient $G_1(t) \dots G_\nu(t)$ , une famille finie de semi-groupes bornés fortement continus, deux à deux commutatifs, sur un espace de Banach $A_1$ ; soient $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu$ , leurs générateurs infinitésimaux respectifs

$$A_0 = \bigcap_{i=1}^{\nu} D(\Lambda_i) \quad .$$

Nous désignerons par $A_1(p, \alpha, \Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu)$ l'ensemble des éléments $a$ de $A_1$ tels que :

$$t^{\alpha-1}(G_i(t)\, a - a) \in L^p(]0, \infty[ ; A_1) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, \nu \quad .$$

Muni de la norme :

$$|||a|||_{A_1(p,\alpha,\Lambda_1,\dots,\Lambda_\nu)} = \|a\|_{A_1} + \sum_{i=1}^{i=\nu} \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \|G_i(t)\, a - a\|^p\, dt\right)^{1/p} \quad ,$$

$A_1(p, \alpha, \Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu)$ est un espace de Banach.

THÉORÈME. - $A_1(p\ ,\alpha\ ,\Lambda_1\ ,\ \ldots\ ,\Lambda_\nu) = T(p\ ,\alpha\ ,A_0\ ;\ p\ ,\alpha\ ,A_1)$ , les deux espaces étant identifiables algébriquement et topologiquement pour $\theta = \frac{1}{p} + \alpha \in ]0\ ,1[$, $1 < p \leq +\infty$, sans qu'il y ait identité des normes.

REMARQUE. - On pourrait généraliser ces résultats, en remarquant que la démonstration repose essentiellement sur l'inégalité de Hardy - Littlewood - Polya, laquelle est valable dans des espaces de Lorentz, cf. [8].

## 6. Applications.

1° Une généralisation du théorème de Sobolev. - Soient

$$A_0 = H^{1,p} = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\ ,\quad A_1 = H^{0,p} = L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$$

les $H^{k,p}$ désignant des espaces de Sobolev. Soient $x = (x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ , $G_i(t)$ les semi-groupes définis par :

$$G_i(t)\ f(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) = f(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_i + t\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) \quad \text{pour} \quad i = 1\ ,2\ ,\ \ldots\ ,n$$

alors il est clair que les générateurs $\Lambda_i$ ne sont autres que les opérateurs de dérivation partielle :

$$\Lambda_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et que

$$A_0 = \bigcap_{i=1}^{i=n} D(\Lambda_i) \quad .$$

Le théorème (5.1) permet de caractériser les éléments de $T(p\ ,\alpha\ ,A_0\ ;\ p\ ,\alpha\ ,A_1)$ comme les fonctions $f$ de $L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \{f(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_i + t\ ,\ \ldots\ x_n) - f(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n)\}\ dx\right|^p dt\right)^{1/p} < +\infty \quad .$$

On pose $T(p\ ,\alpha\ ,A_0\ ;\ p\ ,\alpha\ ,A_1) = W^{1-\theta,p}$ , $\theta = \frac{1}{p} + \alpha$ . D'après le théorème de Sobolev, pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0$ , il existe une injection continue de $H^{1,p}$ dans $L^q$ . Considérons l'application identique de $L^p$ dans lui-même ; par interpolation, on en déduit donc une injection continue de $W^{1-\theta,p}$ dans $T(p\ ,\alpha\ ,L^q\ ;p\ ,\alpha\ ,L^p)$ .

Or d'après le paragraphe 2, on sait que :

$$T(p , \alpha , L^q ; p , \alpha , L^p) \subset L^r ,$$

avec

$$r = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1-\theta}{n} ;$$

d'où le :

THÉORÈME. - Si $\theta = \frac{1}{p} + \alpha \in ]0 , 1[$ , alors $W^{1-\theta,p}(\underset{\sim}{R}^n) \subset L^r(\underset{\sim}{R}^n)$ avec $r = \frac{1}{p} - \frac{1-\theta}{n}$ , $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0$ .

REMARQUE. - Ce théorème constitue une généralisation du théorème de Sobolev au cas des dérivées d'ordre fractionnaire. Ce résultat n'est pas nouveau, seule la méthode semble nouvelle.

Pour l'étude de l'interpolation dans les espaces de Scbolev on pourra consulter GAGLIARDO [1], J.-L. LIONS [5] et SLOBODECKIJ [10]. Une extension aux groupes est donnée dans J.-L. LIONS [6], aux dérivées d'ordre supérieur dans J. LIONS [4].

2° Cas des espaces de Hilbert. - Soient $A_0$ et $A_1$ , deux espaces de Hilbert, $A_0 \subset A_1$ , $A_0$ étant dense dans $A_1$ . Alors $A_0$ peut être considéré comme le domaine d'un opérateur $\Lambda$ autoadjoint tel que $A_0 = D(\Lambda)$ , où $D(\Lambda)$ est muni de la norme du graphe.

On montre alors que pour $p = 2$ :

$$T(2 , \alpha , A_0 ; 2 , \alpha , A_1) = D(\Lambda^{1-\theta}) ,$$

où $\theta = \alpha + \frac{1}{2}$ .

## 7. Variation des espaces de traces en fonction des paramètres de définition.

Les $T(p , \alpha , A_0 ; q , \beta , A_1)$ définissent une famille d'espaces d'interpolation à quatre paramètres. On montre les deux résultats suivants dûs respectivement à J.-L. LIONS et à PEETRE (résultats non publiés).

THÉORÈME 7.1. - Soient $p , p_1 , q , q_1 , \alpha , \alpha_1 , \beta , \beta_1$ tels que

$$p_1 \geqslant p , \quad q_1 \geqslant q ,$$
$$\frac{1}{p} + \alpha = \frac{1}{p_1} + \alpha_1 = \theta \in ]0 , 1[$$