SÉMINAIRE SCHWARTZ

JACQUES L. LIONS

Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications, III

Séminaire Schwartz, tome 5 (1960-1961), exp. nº 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1960-1961__5__A3_0>

QUELQUES PROCÉDÉS D'INTERPOLATION D'OPÉRATEURS LINÉAIRES ET QUELQUES APPLICATIONS, III

Conférence faite par Jacques L. LIONS,

rédigée par Martin ZERNER

Méthode des poids.

Soient A_0 , A_1 deux espaces de Banach dans la situation habituelle, p_0 , p_1 des réels supérieurs à 1 , M une fonction continue strictement positive. Nous poserons :

$$W(p_0 , A_0 , p_1 , A_1 , M)$$
$$= \{u | u \in L^{p_0}(-\infty , +\infty , A_0) , \ Mu \in L^{p_1}(-\infty , +\infty , A_1)\} .$$

Soit encore ν une mesure positive sur la droite, telle que toute fonction $u \in W$ soit ν-sommable dans $A_0 + A_1$. Nous noterons

$$S(p_0 , A_0 , p_1 , A_1 , M ; \nu)$$

l'image de W par l'application :

$$u \to \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \, d\nu(t) .$$

Les normes seront dans W :

$$\|a\|_W = \max\{\|u\|_{L^{p_0}(A_0)} , \|Mu\|_{L^{p_1}(A_1)}\}$$

et dans S :

$$\|a\|_S = \inf \|u\|_W$$

(u parcourant l'image réciproque de a).

THÉORÈME d'interpolation. - Si $\pi \in \mathcal{L}(A_0 , B_0) \cap \mathcal{L}(A_1 , B_1)$, alors

$$\pi \in \mathcal{L}[S(p_0 , A_0 , p_1 , A_1 , M ; \nu) , S(p_0 , B_0 , p_1 , B_1 , M ; \nu)]$$

sa norme dans le dernier espace est au plus égale à la plus grande de ses deux normes ϖ_0 , ϖ_1 dans les deux premiers.

EXEMPLE 1 (FOIAS et LIONS, [1]). - On considère, sur un espace localement compact X , une mesure positive μ , deux fonctions continues positives M_0 , M_1 , et les espaces $L^p_{M_0 d\mu}$, $L^p_{M_1 d\mu}$. D'après un théorème de Stein et Weiss, $L^p_{M_0^{1-\theta} M_1^\theta d\mu}$ est un interpolé de ces deux espaces. On se demande alors quelles sont les fonctions Φ positives et continues de deux variables positives, telles que $L^p_{\Phi(M_0, M_1)d\mu}$ soit encore un interpolé. On les appelle fonctions d'interpolation, et on a le théorème suivant

THÉORÈME. - Pour tout p tel que $1 < p < \infty$, la fonction Φ définie par :

$$\frac{1}{\Phi(\lambda_0 , \lambda_1)} = \left[\int_0^\infty \frac{d\nu(t)}{(\lambda_0 + \lambda_1 t)^\alpha} \right]^\alpha$$

où

$$\alpha = \frac{1}{p - 1}$$

est une fonction d'interpolation pourvu que la mesure positive ν vérifie

$$\int_0^\infty \frac{d\nu(t)}{(1 + t)^\alpha} < \infty \quad .$$

Pour $p = 2$, il n'y a pas d'autre fonction d'interpolation. (La démonstration utilise la méthode des poids avec $M = |t|^\gamma$).

EXEMPLE 2. - L'espace correspondant à $M(t) = e^t$ et $d\nu(t) = e^{\theta t}\, dt$, ($0 < \theta < 1$), a été introduit par CALDERÓN, par une méthode de fonctions holomorphes. Dans un cas un peu plus général, on a le théorème suivant.

THÉORÈME. - Si $\overline{p}_0 \geqslant p_0$ et $\overline{p}_1 \geqslant p_1$,

$$S = S(p_0 , A_0 , p_1 , A_1 , e^t ; t^m e^{\theta t} dt)$$

$$\subset S(\overline{p}_0 , A_0 , \overline{p}_1 , A_1 , e^t ; t^m e^{\theta t} dt) = \overline{S} \quad .$$

De plus :

$$\|a\|_{\overline{S}} \leqslant C \|a\|_S$$

avec :

$$C = \inf[\max(\|\varphi\|_{L^{r_0}} , \|e^t \varphi\|_{L^{r_1}})]$$

où $\frac{1}{r_j} = 1 + \frac{1}{\bar{p}_j} - \frac{1}{p_j}$, l' inf étant pris sur les φ vérifiant :

$$\int \varphi(t)\, e^{\theta t}\, dt = 1 \ , \ \int t^k\, \varphi(t)\, e^{\theta t}\, dt = 0 \quad (0 < k \leqslant m)$$

DÉMONSTRATION. - Soit :

$$a = \int u(t)\, e^{\theta t}\, t^m\, dt \qquad .$$

Un savant calcul montre que la régularisée :

$$u_\varphi = u * \varphi$$

vérifie encore :

$$\int u_\varphi(t)\, e^{\theta t}\, t^m\, dt = a$$

pourvu que φ soit comme il est dit dans l'énoncé .

REMARQUE 1. - On n'a pas fait d'effort, pour le moment, pour obtenir une évaluation de C .

REMARQUE 2. - D'après une communication personnelle de CALDERÓN, ce théorème implique celui de MARCINKIEWICZ.

EXEMPLE 3. - Mu par la force de l'habitude, on retrouve Marcel RIESZ en posant $M = e^t$, $d\nu = e^{\theta t}\, dt$, mais la valeur obtenue ainsi pour la constante est mauvaise. Noter que c'est toujours θ qui joue le rôle du dosage quand on compare avec la méthode des traces.

PROBLÈME de l'itération du procédé : pas de résultat connu.

DUAL de S . - Soient A_0 , A_1 des espaces de Banach dans la situation usuelle M , N des fonctions continues strictement positives sur la droite. On considère d'abord l'espace de Banach $L^{p_0}(A_0) \times L^{p_1}(A_1)$. Si (f_0 , f_1) est dans cet espace

$$\frac{f_0 + Mf_1}{N} \in L^1_{loc}(A_0 + A_1) \qquad ,$$

l'ensemble des (f_0 , f_1), vérifiant au sens des distributions

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f_0 + Mf_1}{N}\right) = 0 \qquad ,$$

en est un sous-espace fermé. A chaque élément de ce sous-espace correspond une valeur de $\frac{f_0 + Mf_1}{N}$ indépendante de t.

Nous appellerons :

$$\sigma(p_0 , A_0 , p_1 , A_1 , M ; N)$$

l'ensemble de ces valeurs muni de la norme naturelle (quotient d'un sous-espace fermé de $L^{p_0}(A_0) \times L^{p_1}(A_1)$!).

THÉORÈME. - Si A_0 et A_1 sont réflexifs, $1 < p_j < \infty$, $(j = 0,1)$, $\frac{1}{p'_j} + \frac{1}{p_j} = 1$, alors $\sigma(p'_0 , A'_0 , p'_1 , A'_1 , M ; N)$ est le dual de

$$S(p_0 , A_0 , p_1 , A_1 , M ; N\, dt) \qquad .$$

Autres exemples : LIONS [4].

Divers autres procédés.

A. - Considérons une famille de normes $a \to N(a ; \xi)$, $(\xi \in [0 , 1])$, sur $A_0 \cap A_1$ avec les propriétés suivantes :

1° Pour a fixé, $N(a ; \xi)$ est une fonction continue de ξ.

2° Si π est un endomorphisme de A_0 et de A_1, avec les normes ϖ_0, ϖ_1 alors :

$$N(\pi a ; \xi) \leqslant \sup(\varpi_0 , \varpi_1)\, N(a ; \xi) \qquad .$$

Soit $f \to \|f\|_{\mathfrak{M}}$ une norme croissante sur l'espace des fonctions continues sur $[0 , 1]$.

a étant donné, on considère $N(a\,;\,\xi)$ comme fonction de ξ, et on pose :

$$|||a||| = \|N(a\,;\,\xi)\|_{\mathfrak{M}} \quad .$$

On obtient ainsi une nouvelle norme d'interpolation.

EXEMPLE.

$$A_j = L^p_{M_j d\mu}$$

$$N(a\,;\,\xi) = \left[\int |a(x)|^p \, M_0^{1-\xi} \, M_1^{\xi} \, d\mu(x)\right]^{1/p}$$

$$\|f\|_{\mathfrak{M}} = \left[\int |f|^p \, d\nu\right]^{1/p}$$

d'où :

$$|||a||| = \left[\int_X |a(x)|^p \int_0^1 M_0^{1-\xi} M_1^{\xi} \, d\nu(\xi) \, d\mu(x)\right]^{1/p}$$

qu'on comparera au résultat de FOIAS et LIONS (premier exemple de la méthode des poids).

B. – On a remarqué que tous les procédés introduits jusqu'à maintenant reposaient sur l'emploi d'une variable auxiliaire (réelle ou complexe). Voici un procédé plus intrinsèque.

Outre A_0, A_1, on donne X_0, X_1 dans la même situation et X un espace de Banach tel que $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$. Bien entendu, les injections sont supposées continues, mais on ne suppose pas que X est un espace d'interpolation entre X_0 et X_1.

On se donne encore une fonction positive Φ de deux variables positives vérifiant

$$\Phi(k_0 \lambda_0\,,\,k_1 \lambda_1) \leq \max(k_0\,,\,k_1)\,\Phi(\lambda_0\,,\,\lambda_1) \quad .$$

On pose :

$$Q = \mathcal{L}(A_0\,,\,X_0) \cap \mathcal{L}(A_1\,,\,X_1)$$

et, pour tout $a \in A_0 \cap A_1$:

$$\|a\|_{X,\Phi} = \sup_{q\in Q} \frac{\|qa\|_X}{\Phi(\|q\|_0 , \|q\|_1)} .$$

On obtient bien ainsi une norme d'interpolation.

Si l'on prend

$$X_0 = X_1 = \underset{\sim}{C} \quad (= X \, !)$$

on retrouve des normes introduites indépendamment par N. ARONSZAJN et M. ZERNER (communications personnelles).

Si $A_0 = X_0$, $A_1 = X_1$, X un espace d'interpolation, on peut choisir Φ de façon à retomber sur X , ce qui ne présente guère d'intérêt.

C. Méthode de Gagliardo [3]. - On associe à $a \in A_0 + A_1$ la région du quart de plan :

$$M_a = \{x , y| \ \exists \ a_0 , a_1 , a_j \in A_j , \ a = a_0 + a_1 , \ \|a_0\|_{A_0} \leqslant x , \ \|a_1\|_{A_1} \leqslant y\} .$$

M_a est convexe et avec un point, il contient les parallèles aux demi-axes positifs d'origine ce point. Le jeu consiste à définir diverses fonctionnelles sur les ensembles plans de ce type. Une telle fonctionnelle Φ étant donnée, elle pourra prendre la valeur $+\infty$; on définira A comme l'ensemble des a tels que

$$\Phi(M_a) < \infty .$$

Moyennant des axiomes judicieux sur Φ , A est alors un espace de Banach quand on pose :

$$\|a\|_A = \Phi(M_a) .$$

On appelle L_a la frontière de M_a .

EXEMPLE 1. - $\|a\|_A = \|a\|_\theta = \sup_{(X_0,X_1)\in L_a} X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$.

θ joue encore le rôle du dosage, mais on ne connaît pas par cette méthode l'interpolé de L^p et L^q .

EXEMPLE 2.

$$\|a\|_A = [\int_{L_a} x_0^{\alpha}\, x_1^{\beta}\, |dx_0|^{\gamma}\, |dx_1|^{1-\gamma}]^{\frac{1}{\alpha+\beta+1}} .$$

Cet exemple redonne par contre le théorème de M. RIESZ pour un choix convenable de α , β , γ (GAGLIARDO, [2]).

Applications.

A. Problèmes aux limites non homogènes.

Expliquons la méthode dans le cas très particulier que voici : Ω désignant une boule ouverte dans R^n de frontière Γ . On désigne par γ l'application qui, à u , définie sur Ω , fait correspondre sa "valeur au bord" (lorsqu'elle existe).

D'après les résultats classiques sur le problème de Dirichlet,

(1) $\{-\Delta, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

[N. B. - $H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma)$ pour la mesure de surface ; $H^1(\Gamma)$ est défini naturellement (fonctions $u \in L^2(\Gamma)$ ainsi que ses dérivées du premier ordre sur Γ) ; alors $[H^1(\Gamma), H^0(\Gamma), \delta(\theta)] = H^{1-\theta}(\Gamma)$ par définition ; dans le cas du disque ($n = 2$), Γ est un cercle, et

$$f \sim \Sigma\, a_n\, e^{in\theta} \in H^{\alpha}(\Gamma) \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^{\alpha}\, (a_n)^2 < \infty \quad ;$$

naturellement, on peut définir $H^s(\Gamma)$ chaque fois que Ω a une frontière Γ assez régulière].

Ensuite, désignons par $\mathcal{H}^0(\Omega)$ l'espace des $u \in H^0(\Omega)$ tels que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (muni de sa structure hilbertienne naturelle). On montre (cf. LIONS - MAGENES [8]) que, pour $u \in \mathcal{H}^0(\Omega)$, on peut définir $\gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et, utilisant la régularité - selon NIRENBERG - puis transposant, on obtient

(2) $\{-\Delta, \gamma\}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^0(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$.

Par interpolation de (1) et (2) on déduit :

$\{-\Delta , \gamma\}$ <u>est un isomorphisme de</u>

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} T(p , \alpha , H^1(\Omega) ; q , \beta , \mathscr{H}^0(\Omega)) \\ \underline{\text{sur}} \\ H^{-1}(\Omega) \times T(p , \alpha , H^{1/2}(\Gamma) ; q , \beta , H^{-1/2}(\Gamma)) \end{array}\right.$$

(et aussi de $[H^1(\Omega) , \mathscr{H}^0(\Omega) , \nu]$ sur $H^{-1}(\Omega) \times [H^{1/2}(\Gamma) , H^{-1/2}(\Gamma) , \nu]$, etc.).

<u>Cas particuliers intéressants de</u> (3) :

1° $p = q = 2$, $\alpha = \beta$;

alors

$$\left\{\begin{array}{l} T(2 , \alpha , H^{1/2}(\Gamma) ; 2 , \alpha , H^{-1/2}(\Gamma)) \\ \qquad = H^{(1/2)(1-\theta)-(1/2)\theta}(\Gamma) = H^{(1/2)-\theta}(\Gamma) , \ \frac{1}{2} + \alpha = \theta \end{array}\right.$$

et

$$u \in T(2 , \alpha , H^1(\Omega) ; 2 , \alpha , \mathscr{H}^0(\Omega)) \implies u \in H^{1-\theta}(\Omega) , \ \Delta u \in H^{-1}(\Omega) .$$

Donc : <u>si</u> $\varphi \in H^{(1/2)-\theta}(\Gamma)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, <u>la solution dans</u> $H^0(\Omega)$ <u>de</u> $-\Delta u = f$, $\gamma u = \varphi$, <u>vérifie</u>

$$u \in H^{1-\theta}(\Omega) .$$

Ainsi, pour $\varphi \in H^0(\Omega)$, u est dans $H^{1/2}(\Omega)$.

2° $p = q = \infty$, $\alpha = \beta$.

On trouve alors un résultat de NIKOLSKY.

B. <u>Problèmes non linéaires du type "Navier - Stokes"</u>. - Renvoyons seulement à [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] FOIAS (C.) et LIONS (J.-L.). - Acta Math. Acad. scient. Hungar., t. 12, 1961 (à paraître).

[2] GAGLIARDO (Emilio). - Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni, Ricerche di Matematica, t. 9, 1960, p. 58-81.

[3] CAGLIARDO (Emilio). - Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni, - Genova, Edizioni Scientifiche, 1959.

[4] LIONS (Jacques-Louis). - Sur certains théorèmes d'interpolation, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2104-2106.

[5] LIONS (Jacques-Louis). - Sur certains problèmes différentiels non linéaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 657-659.

[6] LIONS (J.-L.) e MAGENES (E.). - Problemi ai limiti non omogenei I., Ann. Scuola norm. sup. Pisa, t. 14, 1960, p. 269-305.

[7] LIONS (J.-L.) et MAGENES (E.). - Remarques sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 2118-2120.

[8] LIONS (J.-L.) et MAGENES (E.). - Problemi ai limiti non omogenei, II., Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961 (à paraître).

[9] LIONS (J.-L.) e MAGENES (E.). - Problemi ai limiti non omogenei, III., Ann. scuola norm. sup. Pisa, t. 15, 1961. (à paraître).