

SÉMINAIRE SCHWARTZ

JACQUES L. LIONS

Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications, III

Séminaire Schwartz, tome 5 (1960-1961), exp. n° 3, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1960-1961__5__A3_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROCÉDÉS D'INTERPOLATION D'OPÉRATEURS LINÉAIRES
ET QUELQUES APPLICATIONS, III

Conférence faite par Jacques L. LIONS,
rédigée par Martin ZERNER

Méthode des poids.

Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach dans la situation habituelle, p_0, p_1 des réels supérieurs à 1, M une fonction continue strictement positive. Nous poserons :

$$W(p_0, A_0, p_1, A_1, M) \\ = \{u \mid u \in L^{p_0}(-\infty, +\infty, A_0), \quad Mu \in L^{p_1}(-\infty, +\infty, A_1)\} \quad .$$

Soit encore ν une mesure positive sur la droite, telle que toute fonction $u \in W$ soit ν -sommable dans $A_0 + A_1$. Nous noterons

$$S(p_0, A_0, p_1, A_1, M; \nu)$$

l'image de W par l'application :

$$u \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \, d\nu(t) \quad .$$

Les normes seront dans W :

$$\|a\|_W = \max \left\{ \|u\|_{L^{p_0}(A_0)}, \quad \|Mu\|_{L^{p_1}(A_1)} \right\}$$

et dans S :

$$\|a\|_S = \inf \|u\|_W$$

(u parcourant l'image réciproque de a).

THÉORÈME d'interpolation. - Si $\pi \in \mathcal{L}(A_0, B_0) \cap \mathcal{L}(A_1, B_1)$, alors

$$\pi \in \mathcal{L}[S(p_0, A_0, p_1, A_1, M; \nu), \quad S(p_0, B_0, p_1, B_1, M; \nu)]$$

sa norme dans le dernier espace est au plus égale à la plus grande de ses deux normes ϖ_0, ϖ_1 dans les deux premiers.

EXEMPLE 1 (FOLIAS et LIONS, [1]). - On considère, sur un espace localement compact X , une mesure positive μ , deux fonctions continues positives M_0, M_1 , et les espaces $L^p_{M_0 d\mu}, L^p_{M_1 d\mu}$. D'après un théorème de Stein et Weiss, $L^{p, \theta}_{M_0, M_1 d\mu}$ est un interpolé de ces deux espaces. On se demande alors quelles sont les fonctions Φ positives et continues de deux variables positives, telles que $L^p_{\Phi(M_0, M_1) d\mu}$ soit encore un interpolé. On les appelle fonctions d'interpolation, et on a le théorème suivant

THÉORÈME. - Pour tout p tel que $1 < p < \infty$, la fonction Φ définie par :

$$\frac{1}{\Phi(\lambda_0, \lambda_1)} = \left[\int_0^\infty \frac{d\nu(t)}{(\lambda_0 + \lambda_1 t)^\alpha} \right]^\alpha$$

où

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

est une fonction d'interpolation pourvu que la mesure positive ν vérifie

$$\int_0^\infty \frac{d\nu(t)}{(1+t)^\alpha} < \infty .$$

Pour $p = 2$, il n'y a pas d'autre fonction d'interpolation. (La démonstration utilise la méthode des poids avec $M = |t|^\gamma$).

EXEMPLE 2. - L'espace correspondant à $M(t) = e^t$ et $d\nu(t) = e^{\theta t} dt$, ($0 < \theta < 1$), a été introduit par CALDERÓN, par une méthode de fonctions holomorphes. Dans un cas un peu plus général, on a le théorème suivant.

THÉORÈME. - Si $\bar{p}_0 \geq p_0$ et $\bar{p}_1 \geq p_1$,

$$S = S(p_0, A_0, p_1, A_1, e^t; t^m e^{\theta t} dt)$$

$$\subset S(\bar{p}_0, A_0, \bar{p}_1, A_1, e^t; t^m e^{\theta t} dt) = \bar{S} .$$

De plus :

$$\|a\|_{\overline{S}} \leq C \|a\|_S$$

avec :

$$C = \inf [\max(\|\varphi\|_{L^{r_0}}, \|e^{t\varphi}\|_{L^{r_1}})]$$

où $\frac{1}{r_j} = 1 + \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_j}$, l'inf étant pris sur les φ vérifiant :

$$\int \varphi(t) e^{\theta t} dt = 1, \int t^k \varphi(t) e^{\theta t} dt = 0 \quad (0 < k \leq m)$$

DÉMONSTRATION. - Soit :

$$a = \int u(t) e^{\theta t} t^m dt$$

Un savant calcul montre que la régularisée :

$$u_\varphi = u * \varphi$$

vérifie encore :

$$\int u_\varphi(t) e^{\theta t} t^m dt = a$$

pourvu que φ soit comme il est dit dans l'énoncé .

REMARQUE 1. - On n'a pas fait d'effort, pour le moment, pour obtenir une évaluation de C .

REMARQUE 2. - D'après une communication personnelle de CALDERÓN, ce théorème implique celui de MARCINKIEWICZ.

EXEMPLE 3. - Mu par la force de l'habitude, on retrouve Marcel RIESZ en posant $M = e^t$, $d\nu = e^{\theta t} dt$, mais la valeur obtenue ainsi pour la constante est mauvaise. Noter que c'est toujours θ qui joue le rôle du dosage quand on compare avec la méthode des traces.

PROBLÈME de l'itération du procédé : pas de résultat connu.

DUAL de S . - Soient A_0, A_1 des espaces de Banach dans la situation usuelle M, N des fonctions continues strictement positives sur la droite. On considère

d'abord l'espace de Banach $L^{p_0}(A_0) \times L^{p_1}(A_1)$. Si (f_0, f_1) est dans cet espace

$$\frac{f_0 + Mf_1}{N} \in L^1_{\text{loc}}(A_0 + A_1) \quad ,$$

l'ensemble des (f_0, f_1) , vérifiant au sens des distributions

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f_0 + Mf_1}{N} \right) = 0 \quad ,$$

en est un sous-espace fermé. A chaque élément de ce sous-espace correspond une valeur de $\frac{f_0 + Mf_1}{N}$ indépendante de t .

Nous appellerons :

$$\sigma(p_0, A_0, p_1, A_1, M; N)$$

l'ensemble de ces valeurs muni de la norme naturelle (quotient d'un sous-espace fermé de $L^{p_0}(A_0) \times L^{p_1}(A_1)$!).

THÉOREME. - Si A_0 et A_1 sont réflexifs, $1 < p_j < \infty$, ($j = 0, 1$), $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} = 1$, alors $\sigma(p'_0, A'_0, p'_1, A'_1, M; N)$ est le dual de

$$S(p_0, A_0, p_1, A_1, M; N \, dt) \quad .$$

Autres exemples : LIONS [4].

Divers autres procédés.

A. - Considérons une famille de normes $a \rightarrow N(a; \xi)$, ($\xi \in [0, 1]$), sur $A_0 \cap A_1$ avec les propriétés suivantes :

1° Pour a fixé, $N(a; \xi)$ est une fonction continue de ξ .

2° Si π est un endomorphisme de A_0 et de A_1 , avec les normes ω_0, ω_1 alors :

$$N(\pi a; \xi) \leq \sup(\omega_0, \omega_1) N(a; \xi) \quad .$$

Soit $f \rightarrow \|f\|_{\mathcal{C}^0}$ une norme croissante sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

a étant donné, on considère $N(a ; \xi)$ comme fonction de ξ , et on pose :

$$\|a\| = \|N(a ; \xi)\|_{\mathfrak{M}} \quad .$$

On obtient ainsi une nouvelle norme d'interpolation.

EXEMPLE.

$$A_j = L_{M_j}^p d\mu$$

$$N(a ; \xi) = \left[\int |a(x)|^p M_0^{1-\xi} M_1^\xi d\mu(x) \right]^{1/p}$$

$$\|f\|_{\mathfrak{M}} = \left[\int |f|^p dv \right]^{1/p}$$

d'où :

$$\|a\| = \left[\int_X |a(x)|^p \int_0^1 M_0^{1-\xi} M_1^\xi dv(\xi) d\mu(x) \right]^{1/p}$$

qu'on compare au résultat de FOIAS et LIONS (premier exemple de la méthode des poids).

B. - On a remarqué que tous les procédés introduits jusqu'à maintenant reposaient sur l'emploi d'une variable auxiliaire (réelle ou complexe). Voici un procédé plus intrinsèque.

Outre A_0 , A_1 , on donne X_0 , X_1 dans la même situation et X un espace de Banach tel que $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$. Bien entendu, les injections sont supposées continues, mais on ne suppose pas que X est un espace d'interpolation entre X_0 et X_1 .

On se donne encore une fonction positive Φ de deux variables positives vérifiant

$$\Phi(k_0 \lambda_0, k_1 \lambda_1) \leq \max(k_0, k_1) \Phi(\lambda_0, \lambda_1) \quad .$$

On pose :

$$Q = \mathcal{L}(A_0, X_0) \cap \mathcal{L}(A_1, X_1)$$

et, pour tout $a \in A_0 \cap A_1$:

$$\|a\|_{X,\Phi} = \sup_{q \in Q} \frac{\|qa\|_X}{\Phi(\|q\|_0, \|q\|_1)} \quad .$$

On obtient bien ainsi une norme d'interpolation.

Si l'on prend

$$X_0 = X_1 = \underset{\sim}{C} \quad (= X ?)$$

on retrouve des normes introduites indépendamment par N. ARONSZAJN et M. ZERNER (communications personnelles).

Si $A_0 = X_0$, $A_1 = X_1$, X un espace d'interpolation, on peut choisir Φ de façon à retomber sur X , ce qui ne présente guère d'intérêt.

C. Méthode de Gagliardo [3]. - On associe à $a \in A_0 + A_1$ la région du quart de plan :

$$M_a = \{x, y \mid \exists a_0, a_1, a_j \in A_j, a = a_0 + a_1,$$

$$\|a_0\|_{A_0} \leq x, \|a_1\|_{A_1} \leq y\} \quad .$$

M_a est convexe et avec un point, il contient les parallèles aux demi-axes positifs d'origine ce point. Le jeu consiste à définir diverses fonctionnelles sur les ensembles plans de ce type. Une telle fonctionnelle Φ étant donnée, elle pourra prendre la valeur $+\infty$; on définira A comme l'ensemble des a tels que

$$\Phi(M_a) < \infty \quad .$$

Moyennant des axiomes judicieux sur Φ , A est alors un espace de Banach quand on pose :

$$\|a\|_A = \Phi(M_a) \quad .$$

On appelle L_a la frontière de M_a .

$$\text{EXEMPLE 1. - } \|a\|_A = \|a\|_\theta = \sup_{(X_0, X_1) \in L_a} X_0^{1-\theta} X_1^\theta .$$

θ joue encore le rôle du dosage, mais on ne connaît pas par cette méthode l'interpolé de L^p et L^q .

EXEMPLE 2.

$$\|a\|_A = \left[\int_{L_a} x_0^\alpha x_1^\beta |dx_0|^\gamma |dx_1|^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+1}} .$$

Cet exemple redonne par contre le théorème de M. RIESZ pour un choix convenable de α, β, γ (GAGLIARDO, [2]).

Applications.

A. Problèmes aux limites non homogènes.

Expliquons la méthode dans le cas très particulier que voici : Ω désignant une boule ouverte dans \mathbb{R}^n de frontière Γ . On désigne par γ l'application qui, à u , définie sur Ω , fait correspondre sa "valeur au bord" (lorsqu'elle existe).

D'après les résultats classiques sur le problème de Dirichlet,

$$(1) \quad \{ -\Delta, \gamma \} \text{ est un isomorphisme de } H^1(\Omega) \text{ sur } H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) .$$

[N. B. - $H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma)$ pour la mesure de surface ; $H^1(\Gamma)$ est défini naturellement (fonctions $u \in L^2(\Gamma)$ ainsi que ses dérivées du premier ordre sur Γ) ; alors $[H^1(\Gamma), H^0(\Gamma), \delta(\theta)] = H^{1-\theta}(\Gamma)$ par définition ; dans le cas du disque ($n=2$), Γ est un cercle, et

$$f \sim \sum a_n e^{in\theta} \in H^\alpha(\Gamma) \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^\alpha (a_n)^2 < \infty ;$$

naturellement, on peut définir $H^s(\Gamma)$ chaque fois que Ω a une frontière Γ assez régulière].

Ensuite, désignons par $\mathcal{H}^0(\Omega)$ l'espace des $u \in H^0(\Omega)$ tels que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ (muni de sa structure hilbertienne naturelle). On montre (cf. LIONS - MAGENES [8]) que, pour $u \in \mathcal{H}^0(\Omega)$, on peut définir $\gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et, utilisant la régularité - selon NIRENBERG - puis transposant, on obtient

$$(2) \quad \{ -\Delta, \gamma \} \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{H}^0(\Omega) \text{ sur } H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) .$$

Par interpolation de (1) et (2) on déduit :

$\{-\Delta, \gamma\}$ est un isomorphisme de

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} T(p, \alpha, H^1(\Omega); q, \beta, \mathcal{K}^0(\Omega)) \\ \text{sur} \\ H^{-1}(\Omega) \times T(p, \alpha, H^{1/2}(\Gamma); q, \beta, H^{-1/2}(\Gamma)) \end{array} \right.$$

(et aussi de $[H^1(\Omega), \mathcal{K}^0(\Omega), \nu]$ sur $H^{-1}(\Omega) \times [H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma), \nu]$, etc.).

Cas particuliers intéressants de (3) :

1° $p = q = 2$, $\alpha = \beta$;

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} T(2, \alpha, H^{1/2}(\Gamma); 2, \alpha, H^{-1/2}(\Gamma)) \\ = H^{(1/2)(1-\theta) - (1/2)\theta}(\Gamma) = H^{(1/2) - \theta}(\Gamma), \quad \frac{1}{2} + \alpha = \theta \end{array} \right.$$

et

$$u \in T(2, \alpha, H^1(\Omega); 2, \alpha, \mathcal{K}^0(\Omega)) \Rightarrow u \in H^{1-\theta}(\Omega), \quad \Delta u \in H^{-1}(\Omega) \quad .$$

Donc : si $\varphi \in H^{(1/2) - \theta}(\Gamma)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solution dans $H^0(\Omega)$ de $-\Delta u = f$, $\gamma u = \varphi$, vérifie

$$u \in H^{1-\theta}(\Omega) \quad .$$

Ainsi, pour $\varphi \in H^0(\Omega)$, u est dans $H^{1/2}(\Omega)$.

2° $p = q = \infty$, $\alpha = \beta$.

On trouve alors un résultat de NIKOLSKY.

B. Problèmes non linéaires du type "Navier - Stokes". - Renvoyons seulement à [5].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FOIAS (C.) et LIONS (J.-L.). - Acta Math. Acad. scient. Hungar., t. 12, 1961 (à paraître).
- [2] CAGLIARDO (Emilio). - Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni, Ricerche di Matematica, t. 9, 1960, p. 58-81.

- [3] CAGLIARDO (Emilio). - Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni,
- Genova, Edizioni Scientifiche, 1959.
 - [4] LIONS (Jacques-Louis). - Sur certains théorèmes d'interpolation, C. R. Acad.
Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2104-2106.
 - [5] LIONS (Jacques-Louis). - Sur certains problèmes différentiels non linéaires,
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 657-659.
 - [6] LIONS (J.-L.) e MAGENES (E.). - Problemi ai limiti non omogenei I., Ann.
Scuola norm. sup. Pisa, t. 14, 1960, p. 269-305.
 - [7] LIONS (J.-L.) et MAGENES (E.). - Remarques sur les problèmes aux limites
pour opérateurs paraboliques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 2118-
2120.
 - [8] LIONS (J.-L.) et MAGENES (E.). - Problemi ai limiti non omogenei, II., Ann.
Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961 (à paraître).
 - [9] LIONS (J.-L.) o MAGENES (E.). - Problemi ai limiti non omogenei, III., Ann.
scuola norm. sup. Pisa, t. 15, 1961 (à paraître).
-