

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

PAUL MALLIAVIN

Fonctions de type exponentiel minimum ayant des zéros donnés

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 8, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A5_0

© Séminaire Lelong. Analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS DE TYPE EXPONENTIEL MINIMUM AYANT DES ZÉROS DONNÉS

par Paul MALLIAVIN

Etant donnée une fonction entière $f(z)$ de type exponentiel (c'est-à-dire telle que $\limsup |z|^{-1} \log |f(z)| < \infty$) quelle est "la plus petite croissance" que peut avoir cette fonction lorsque l'on se donne une partie de l'ensemble de ses zéros ?

Rappelons que la croissance des fonctions de type exponentiel $f(z)$ est étudiée en introduisant la fonction $h(\varphi) = \limsup r^{-1} \log |f(re^{i\varphi})|$. L'enveloppe de la droite $x \cos \varphi + y \sin \varphi - h(\varphi) = 0$ est une courbe convexe Γ , appelée indicateur diagramme de $f(z)$. Γ est l'enveloppe convexe des singularités de la transformée de Borel $F(Z) = \int_0^\infty f(z) e^{-Zz} dz$ de f . Si Γ' désigne une courbe homologue à Γ et située dans le complémentaire de Γ on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} F(Z) e^{zZ} dZ$$

Le problème que l'on étudiera est le suivant : Λ désignant une suite de nombres réels, déterminer la plus petite valeur que peut avoir la longueur de la projection de Γ sur l'axe imaginaire (bien entendu $f \neq 0$). CARLEMAN [1] a montré que

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq 2\pi \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{\log t},$$

où $\lambda(t) = \sum \lambda^{-1}$, $\lambda < t$, $\lambda \in \Lambda$.

Cette inégalité n'est pas la meilleure possible. Posons $k_a(t) = \frac{a}{\pi} \log t - \lambda(t)$

Alors W. J. H. FUCHS [2] a montré que si $\lambda - \lambda' > h > 0$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda'$ et si $\liminf k_a(t) = -\infty$, alors $h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq 2a$.

Ce résultat est le meilleur possible pour les fonctions de type exponentiel holomorphes dans le demi-plan. Pour les fonctions entières cette évaluation n'est

pas la meilleure possible. RUBEL a donné dans [7] une condition nécessaire et suffisante pour que, Λ étant une partie des entiers, toute fonction s'y annulant vérifie $h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 2\pi$. Dans [6] on donne l'évaluation exacte de l'ordre de croissance cherché. On a les énoncés :

THÉOREMES .

A. Si $f(z)$ est une fonction entière de type exponentiel telle que

$$|f(iy)| < Ae^{a|y|}, \text{ avec } f(\Lambda) = 0$$

Posons $\delta(k_a) = \limsup_{x \rightarrow \infty} [k_a(x) - \inf_{x' > x} k_a(x')]$

Alors si $\delta(k_a) = \infty$, on a $f(z) \equiv 0$.

B. Inversement si $\delta(k_a) < \infty$, on peut construire $f(z) \neq 0$ satisfaisant aux hypothèses de (A).

On peut donner de (A) la forme plus générale suivante :

A'. Soit $f(z)$ fonction entière de type exponentiel telle que $f(\Lambda) = 0$,

où q est une fonction vérifiant $xq'(x) = O(1)$. Posons :

$$k_q(t) = \int_1^t q(u) u^{-1} du - \lambda(t)$$

Alors si $\delta(k_q) = \infty$, $f(z)$ est identiquement nul.

La preuve de A' dépend des lemmes suivants :

LEMME 1. - Soit $f(z)$ une fonction entière de type exponentiel, avec $f(0) = 1$. Posons

$$M(x) = x^{-1} \log |f(x)|$$

$$M_\alpha = M * \alpha = \int M\left(\frac{x}{t}\right) \alpha(t) \frac{dt}{t}$$

où α est une fonction bornée à support compact. Alors

$$M_\alpha(x) = O(1).$$

Ce lemme s'obtient aisément en appliquant la formule de Carleman à $y > 0$, et à 2 demi-cercles $|z| = R$, $|z| = kR$ et en utilisant le fait que $M(x) < O(1)$.

La fonction sous-harmonique $\log|f(z)|$ peut être représentée dans le demi-plan $x > 0$ par la somme d'un potentiel de Green de masses négatives portées par les zéros et d'un potentiel de double couche porté par la frontière. Balayant ces masses sur l'axe $x > 0$, on obtient que $\log|f(x)|$ est égal à un potentiel de Green d'une masse portée par $x > 0$, soit

$$(1) \quad M(x) = \frac{\log f(x)}{x} = \int_0^{\infty} \left[\log \left| \frac{1 + xt^{-1}}{1 - xt^{-1}} \right| - 2xt^{-1} \right] dm(t) + A$$

où A est une constante. L'expression explicite de m se calcule [5], on obtient

$$(2) \quad dm = d\rho - d\lambda - d\sigma$$

où $d\sigma$ est une mesure positive obtenue en balayant les masses relatives aux zéros $\notin \Lambda$ et où $d\rho$ est la mesure balayée de la double couche portée par $x = 0$. On a $td\rho = B * C$ où

$$(3) \quad 2C(y) = y^{-1} \log |f(iy) f(-iy)|, \quad B = kt^2(t^2 + 1)^{-2},$$

k étant une constante numérique > 0 . Une intégration par partie de (1) donne $M(x) = V. P. \int_0^{\infty} 1(xt^{-1}) m(t) t^{-1} dt$ où

$$1(t) = t^{-1} \left[\log \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + \frac{2t}{t^2-1} \right]$$

On a le lemme taubérien :

LEMME 2. - Soit $M = 1 * m$; si $M_X(x) = O(1)$, alors
 $m(x) = O(1)$

Pour obtenir ce lemme on calcule la transformée de Mellin L de 1 :

$$L(u) = \frac{u}{1-u} \cotg \frac{\pi}{2} u ;$$

$L(u) \neq 0$ si u est imaginaire pur. On ne peut pas appliquer toutefois le théorème taubérien de Wiener, $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 * m$ n'existant pas. On procède directement, l'identité élémentaire $L(u) L(1-u) = 1$ donne que $\tilde{1}(t) = \frac{2}{\pi} t^{-1} 1(t^{-1})$ est le noyau inverse de 1 d'où

$$m * \alpha * \alpha' = \tilde{1}_\alpha * M_\alpha = O(1)$$

ce qui avec la condition $dm < d\rho$ entraîne le lemme 2 ; l'énoncé A' résulte alors de l'évaluation suivante de

$$(4) \quad p(t) = \int_1^t q(u) u^{-1} du + O(1)$$

En effet on aurait alors en vertu de (2) $m = k_q - \sigma + O(1)$ d'où d'après le lemme 2

$$(5) \quad k_q = \sigma + O(1)$$

σ étant une fonction croissante, $\delta(k_q) < \infty$. (4) s'établit en remarquant que l'on a

$$\Delta = p(t) - \int_1^t q(u) u^{-1} du = \int_1^t \frac{dx}{x} \int_1^{\infty} [q\left(\frac{x}{a}\right) + q(ax) - 2q(x)] B(a) \frac{da}{a} + \rho \quad (1)$$

ou en faisant le changement de variable $x = e^{\xi}$

$$O(1) + \Delta = \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} [\gamma(\xi - \alpha) + \gamma(\xi + \alpha) - 2\gamma(\xi)] \beta(\alpha) d\alpha$$

D'où posant

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{\xi} \gamma(\xi) d\xi$$

$$\Delta + O(1) = \int_0^{+\infty} [\Gamma(\xi - \alpha) + \Gamma(\xi + \alpha) - 2\Gamma(\xi)] \beta(\alpha) d\alpha < \max |\Gamma'''| \int_0^{\infty} \alpha^2 \beta(\alpha) d\alpha$$

ce qui avec les hypothèses faites sur q en (A') établit (4).

Preuve de B. - Remarquons d'abord que l'on a la réciproque de (5) suivante :

Si $\delta(k_a) < \infty$ on peut trouver une fonction $\sigma(x)$ croissante telle que $k_a = \sigma + O(1)$.

Pour construire une fonction entière il sera commode de remplacer le balayage du noyau de Green du demi-plan par celui du noyau de Weierstrass $\log |1 - z^2 t^{-2}|$. On obtient :

LEMME 3. - Soit $T_\theta = \log |1 + u^2 e^{2i\theta}|$ alors $D * \frac{T}{\frac{\pi}{2}} = T_0$ où $D = \frac{2}{\pi} \frac{u}{u^2 + 1}$

Cette factorisation résulte d'un simple calcul des transformées de Mellin. Le noyau D est moins commode que le noyau B introduit en (3) : il n'est pas sommable pour la mesure dt . Ceci nécessitera de raisonner d'abord sur des mesures à support compact, puis de passer à la limite.

Notons par \wedge' la suite $\left\{ \frac{n^a}{\pi} \right\}_{n=1}^{\infty}$, et par \wedge'' une suite $\subset \wedge'$ telle que

$\sigma(x) = \lambda''(x) + O(1)$. On a

$$S(x) = \lambda'(x) - \lambda(x) - \lambda''(x) = O(1)$$

Soient Λ_R l'intersection de Λ avec l'intervalle $[0, R]$ et Λ''_R la suite définie par $\lambda''_R(x) = \lambda''(x)$ pour $x \leq R$, et par $\lambda''_R(x) - \lambda''_R = \lambda'(x) - \lambda'(R)$ pour $x > R$. Alors $|S_R(x)| = |\lambda'(x) - \lambda_R(x) - \lambda''_R(x)| < K$ quel que soit R et $dS_R = 0$ si $x > R$. Posons $dn_R(t) = -td S_R(t)$ et soit $g_R = D * dn_R$. On a

$$g_R(u) = \int_0^{\infty} \frac{u}{t} \frac{t^2}{t^2 + u^2} dn_R(t) = u \int_0^{\infty} S_R(t) d \left[\frac{t^2}{t^2 + u^2} \right] - u S_R(R)$$

d'où $|g_R(u)| < 2Ku$.

Posons

$$m_R(t) = \int_0^t [2Ku - g_R(u)] u^{-1} du,$$

et soit $f_R(z)$ la fonction entière définie par le produit de Weierstrass

$$\log |f_R(z)| = \int_0^{\infty} |\log |1 + z^2 t^{-2}| d[m_R(t)] + \int_0^{\infty} \log |1 - z^2 t^{-2}| td(\lambda_R(t) + \lambda''_R(t)).$$

En utilisant le fait que g_R est la balayée sur l'axe imaginaire de $td(\lambda' - \lambda''_R - \lambda_R)$, on a :

$$\log |f_R(iy)| < \int \log |1 + y^2 t^{-2}| td \lambda'_R(t) + 2 \log |y|$$

Le premier produit n'est autre que $\log |\sin \frac{a}{\pi} y| - \log |y|$ d'où

$$\log |f_R(iy)| < \log \sin \frac{a}{\pi} y + \log |y|.$$

Faisons tendre $R \rightarrow \infty$; les $f_R(z)$ forment une famille normale dont on extrait une suite convergeant vers $f(z)$ qui vérifie $|f(iy)| < A e^{a|y|} (|y| + 1)$.

En ajoutant un point α à Λ , ce qui ne change pas le fait que $\delta(k_a) < \infty$, et considérant $f_1(z) = (z - \alpha)^{-1} f(z)$ on obtient la fonction cherchée.

Application : Théorème de Müntz pour les bandes. - Soit Λ une suite de nombres réels donnés, alors dans quel cas $e^{-\lambda Z}$ est complète pour la convergence uniforme sur tout compact dans l'espace des fonctions, holomorphes dans la bande $|\operatorname{Im} Z| < a$, continues sur sa fermeture. Ce problème a été envisagé par CARLEMAN [1] J. P. KAHANE [3], LEONT'EV [4].

On a la condition nécessaire et suffisante :
 $e^{-\lambda Z}$ est complète si et seulement si $\delta(k_a) = \infty$.

La preuve dépend des remarques suivantes : si $\bar{e}^{\lambda Z}$ n'est pas complète il existe une mesure à support compact μ , orthogonale aux $\bar{e}^{\lambda Z}$. Posant $f(z) = \int \bar{e}^{-z Z} d\mu(Z)$ on obtient une fonction satisfaisant aux hypothèses de (A) donc nulle si $\delta(k_a) = \infty$. μ est alors orthogonale à toutes les exponentielles donc à toutes les fonctions holomorphes. Inversement si $\delta(k_a) < \infty$ on peut construire une fonction $f(z)$ vérifiant $f(\Lambda) = 0$ et $|f(iy)| < \frac{e^a |y|}{y^2 + 1}$ (il suffit d'ajouter les points $+1$ et -1 à Λ et de diviser par $z^2 - 1$). La transformée de Borel $F(Z)$ de $f(z)$ est continue sur les droites $|\operatorname{Im} Z| = a$. Soit R un rectangle dont deux côtes sont portés par ces droites $|\operatorname{Im} Z| = a$ et qui contient l'indicateur diagramme, alors la restriction à R de $F(Z) dZ$ est une mesure orthogonale à $\bar{e}^{\lambda Z}$.

REMARQUE. - Si l'on considère l'espace de Banach des fonctions holomorphes dans $|\operatorname{Im} Z| < a$, nulles à l'infini, le problème de fermeture de $\bar{e}^{\lambda Z}$ est différent. On a l'énoncé (dû à W. J. H. FUCHS) :

$\bar{e}^{\lambda Z}$ est complète si et seulement si $\liminf k_a(x) = -\infty$

La raison de cette simplification est que l'on doit considérer des fonctions f holomorphes dans le demi-plan au lieu de fonctions entières et que pour ces fonctions le lemme 1 ne vaut plus.

Si $a = 0$, la fermeture pour la convergence compacte et pour la convergence uniforme coïncident, elles ont lieu si et seulement si $\lim \lambda(x) = +\infty$. On retrouve ainsi un résultat connu [cf L. SCHWARTZ [8]].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARLEMAN (Torsten). Über die Approximation der analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen, Arkiv för Mat., Astr. och Fys., t. 17, 1922-23, n° 9, p. 1-30.
- [2] FUCHS (W. H. J.). - A generalization of the Carlson's theorem, J. London math. Soc., t. 21, 1946, p. 106-110.
- [3] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 39-130.
- [4] LEONT'EV (A. F.). - Rjady polinomov Dirikle i ikh oboščnija (Séries de polynômes de Dirichlet et leurs applications), Trudy mat. Inst. imeni V. A. Steklova, t. 39, 1951, 214 p.
- [5] MALLIAVIN (Paul). - Sur la croissance radiale d'une fonction méromorphe, Illinois J. Math., t. 1, 1957, p. 259-296.

- [6] MALLIAVIN (Paul) and RUBEL (L. A.). - On entire function of exponential minimum type with given zeros, Illinois J. Math., 1959 (à paraître).
 - [7] RUBEL (L. A.). - Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 417-429.
 - [8] SCHWARTZ (Laurent). - Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielle imaginaires, Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse, Série 4, t. 6, 1943, p. 111-176 .
-