

# SÉMINAIRE LELONG.

## ANALYSE

MARTIN ZERNER

### **Fonctions holomorphes à valeurs distributions**

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 3 (1961), exp. n° 5, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SL\\_1961\\_\\_3\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A4_0)

© Séminaire Lelong. Analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS HOLOMORPHES À VALEURS DISTRIBUTIONS

par Martin ZERNER

1. Introduction.

Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbb{R}^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n)$  dont le support soit contenu dans une bande,

$$a \leq x_0 \leq b \quad .$$

On peut alors définir une transformée de Fourier partielle  $\mathfrak{F}T$  qui, à la variable  $\xi$ , fait correspondre une distribution  $\mathfrak{F}T(\xi)$  sur  $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$  définie par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \varphi, \mathfrak{F}T(\xi) \rangle = \langle \varphi e^{i\xi x_0}, T \rangle$$

de sorte que  $\langle \varphi, \mathfrak{F}T \rangle$  se prolonge en une fonction entière de la variable complexe  $\xi + i\eta$ .

$\mathfrak{F}T$  définit aussi une distribution sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et il est légitime de se demander si les singularités d'une telle distribution sont quelconques. Par exemple  $\mathfrak{F}T$  peut-elle être singulière sur un compact et régulière ailleurs ? La réponse est non en vertu de résultats généraux. Rappelons tout d'abord quelques résultats concernant les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles (GROTHENDIECK, [3]).

Soient  $E$  un espace vectoriel complexe localement convexe séparé (ELC),  $\hat{E}$  son complété,  $F$  une fonction définie sur un domaine  $\Delta$  du plan complexe et à valeurs dans  $E$ . Les 5 propriétés suivantes sont équivalentes

1° Pour tout  $z \in \Delta$ , le rapport :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h}$$

possède une limite dans  $\hat{E}$  quand  $h \rightarrow 0$  dans le plan complexe.

2°  $F$  est une fois continûment dérivable et

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad .$$

3° F est continue et pour tout contour  $\Gamma$  rectifiable et homotope à 0 dans  $\Delta$

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = 0$$

(intégrale scalaire).

4° Tout  $z_0 \in \Delta$  possède un voisinage sur lequel  $F(z)$  est somme dans  $\hat{E}$  d'une série :

$$F(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$$

où les  $a_k$  sont des éléments de  $\hat{E}$ .

5° Pour toute  $e' \in E'$  la fonction  $\langle e', F \rangle$  est holomorphe sur  $\Delta$ .

Si ces propriétés ont lieu, on a la formule de Cauchy :

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{F(w) dw}{w - z} \quad .$$

On a de plus le :

LEMME d'Abel. - Si la suite  $\{a_k r^k\}$  est bornée, la série de 4° converge uniformément pour  $|z - z_0| \leq r' < r$ . Si cette suite n'est pas bornée la série diverge pour tout  $z$  vérifiant  $|z - z_0| \geq r$ .

L'équivalence des propriétés 1°, 2°, 4° se démontre exactement comme dans le cas scalaire ainsi que la formule de Cauchy et le lemme d'Abel. L'un ou l'autre de ces deux derniers énoncés permet de montrer que 5°  $\implies$  4° à l'aide du théorème de Mackey. Enfin 3°  $\implies$  5° comme dans le cas scalaire. Les autres implications sont évidentes.

EXEMPLE 1. -  $X$  espace localement compact,  $E = \mathcal{C}(X)$ .  $F$  est continue sur  $\Delta \times X$  (et holomorphe pour  $a \in X$  fixé).

EXEMPLE 2. -  $E = \mathcal{H}(\Delta')$ , espace des fonctions holomorphes sur  $\Delta'$ ,  $F$  est une fonction holomorphe sur  $\Delta \times \Delta'$ . Si  $\tilde{E}$  est le même espace, mais muni de la convergence simple, le théorème d'Hartogs - Osgood s'énonce :

Toute fonction holomorphe à valeurs dans  $\tilde{E}$  est holomorphe à valeurs dans  $E$ .

EXEMPLE 3. -  $E = \mathcal{O}'$ . Prenons :

$$T = Y(t) \frac{t^{z-1}}{(z)} \quad \text{pour } \Re z > 0$$

où  $Y(t) = 0$  pour  $t < 0$ ,  $Y(t) = 1$  pour  $t \geq 0$ .

Remarquons que, pour tout  $z$ , cette distribution a une singularité unique à l'origine, et que son ordre augmente "régulièrement" avec  $- \operatorname{Re} z$ . Ce sont ces faits que nous allons généraliser.

## 2. Généralisation d'un théorème de Hartogs.

NOTATIONS. -  $X$  est un espace localement compact dénombrable à l'infini,  $\rho$  une fonction strictement positive tendant vers 0 à l'infini sur  $X$ ,  $E_p$  l'espace de Banach des fonctions  $f$  continues sur  $X$  telles que :

$$|f(x) \rho^p(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$E^+ = \bigcup E_p$$

$$E^- = \bigcap E_p$$

(topologies de limites inductive et projective, respectivement).

Si  $f \in E^+$ , nous poserons :

$$p_f = \inf\{p ; f \in E_p\} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Log} |f(x)|}{-\operatorname{Log} \rho(x)} \quad .$$

Si maintenant  $Y$  est un autre espace localement compact, et  $F$  une fonction continue à valeurs dans  $E^+$  sur  $Y$ , nous associerons à  $F$  la fonction à valeurs réelles définie par :

$$p(y) = p_{F(y)} \quad .$$

Soit  $\{K_n\}$  un recouvrement de  $X$  par une suite de compacts.

$$\sup_{x \in K_n} \frac{\operatorname{Log} |[F(y)](x)|}{-\operatorname{Log} \rho(x)}$$

est une fonction semi-continue inférieurement sur  $Y$  et par suite  $p$  est une fonction mesurable.

Si enfin  $F$  est une fonction holomorphe à valeurs dans  $E^+$  sur un domaine  $\Delta$ , en plus de la fonction  $p$  ci-dessus définie, il lui sera associé une fonction  $p^*$  définie de la façon suivante :

$p^*(w)$  est la borne inférieure des nombres  $q$ , tels que  $w$  possède un voisinage où  $F$  soit holomorphe à valeurs dans  $E_q$ .

On voit que  $p^*$  est une fonction semi-continue supérieurement.

Grâce à la propriété (1, 5°) (et au fait que  $E_p^+$  est un espace de mesures) on démontre aussi que  $p^*$  est la borne inférieure des  $q$ , tels que  $w$  ait un voisinage où  $F$  soit bornée dans  $E_q$ .

**THÉORÈME 1.** - Soit  $F$  holomorphe à valeurs dans  $E^+$  sur le disque unité ouvert  $\Delta$ , et continue sur le disque fermé. Alors

$$\forall z \in \Delta, \quad p^*(z) \leq \int p(e^{i\theta}) P(z, \theta) d\theta$$

où  $P$  désigne le noyau de Poisson. De plus l'ensemble où  $p \neq p^*$  est polaire.

**DÉMONSTRATION.** - C'est essentiellement celle du théorème classique. Un passage à la limite simple montre que

$$p(z) \leq \int p(e^{i\theta}) P(z, \theta) d\theta \quad .$$

On montre ensuite, comme dans le cas classique, que  $p^*$  est la régularisée supérieure de  $p$ , c'est-à-dire que, si  $p \leq p_0$  sur un ouvert,  $p^* \leq p_0$  sur cet ouvert.

En effet  $F(\overline{\Delta})$  est un compact de  $E^+$ . Il en résulte qu'il existe  $p_1$  tel que  $F(\overline{\Delta})$  soit borné dans  $E_{p_1}$ . Les fonctions sous-harmoniques de  $w$  :

$$\frac{\text{Log } F(x)}{-\text{Log } \rho(x)}$$

sont donc bornées supérieurement uniformément en dehors d'un compact fixe de  $X$ .

Soit alors  $W$  un ouvert sur lequel on ait  $p \leq p_0$ . D'après une propriété classique d'uniformité de la limite supérieure d'une famille de fonctions sous-harmoniques (DENY - LELONG [2]) on peut trouver, pour tout compact de  $W$  et tout  $\varepsilon > 0$ , un entier  $n_0$  tel que

$$x \in K_{n_0} \implies \text{Log}[F(w)](x) + (p_0 + \varepsilon) \text{Log } \rho(x) \leq 0$$

c'est-à-dire :

$$F_{p_0}^{p_0 + \varepsilon} \leq 1$$

d'où il ressort que l'image de ce compact est bornée dans  $E_{p_0+\epsilon}$ .

L'intégrale qui figure dans l'inégalité est continue, avec  $p$  elle majore aussi sa régularisée supérieure  $p^*$ .

Enfin la dernière affirmation du théorème résulte de la majoration de  $\frac{\text{Log } F(x)}{-\text{Log } \rho(x)}$  et d'un théorème de Brelot, et de CARTAN dans [1].

REMARQUE 1. - Dans [2] et [4], on énonce la propriété que nous utilisons pour

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} f_t$$

où  $t$  est un paramètre réel, et  $f_t$  une fonction sous-médiane (et même un peu plus générale). Il est bien facile de vérifier que la démonstration vaut pour une limite supérieure selon une suite décroissante d'ensembles quelconques.

REMARQUE 2. - Le théorème s'étend trivialement au cas d'un domaine limité par une courbe de Jordan, et au cas d'un polydisque. Dans ce dernier cas l'ensemble où  $p \neq p^*$  a des propriétés de rareté beaucoup plus précises (LÉLONG [5], théorème 1).

### 3. Application aux distributions.

Pour étudier le comportement d'une fonction à valeurs distribution, on peut commencer par se ramener, à l'aide du produit par une fonction, au cas où le support reste dans un compact fixe. On peut alors faire la transformation de Fourier. On pose enfin

$$X = \mathbb{R}^n, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}$$

et on aboutit à l'étude d'une fonction à valeurs dans l'espace  $E^+$  correspondant.

Soit  $\tilde{F}$  la fonction ainsi transformée. Dire  $\tilde{F}(z) \in E^-$ , c'est dire  $F(z) \in \mathcal{O}$ . D'où en particulier la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit  $F$  holomorphe à valeurs dans  $\mathcal{O}'$  sur  $\Delta$ . Si l'image par  $F$  d'un ensemble non polaire est dans  $\mathcal{E}$ , alors  $F$  est holomorphe à valeurs dans  $\mathcal{E}$ .

On peut donner à ce phénomène le nom de "quasi-analyticité faible de la régularité". Il est alors légitime de poser les questions suivantes :

QUESTION 1. - Si  $F$  est holomorphe à valeurs dans  $\mathcal{O}'$  sur un voisinage de l'origine, et si pour tout  $k$ ,

$$F^{(k)}(0) \in \mathcal{E} \quad .$$

F prend-elle forcément ses valeurs dans  $\mathcal{E}$  ? (Quasi-analyticité forte).

Réponse négative. D'après le lemme d'Abel, les hypothèses signifient que  $\left\{ \frac{r^k F^{(k)}(0)}{k!} \right\}$  est une suite de fonctions appartenant à  $\mathcal{E}$ , bornée pour la topologie induite par  $\mathcal{O}'$  (pour un certain  $r > 0$ ). La réponse positive entraînerait que la suite  $\left\{ \frac{r'^k F^{(k)}(0)}{k!} \right\}$  soit bornée pour la topologie naturelle de  $\mathcal{E}$ , et ce quel que soit  $r' < r$ .

QUESTION 2. - Soit encore F holomorphe à valeurs dans  $\mathcal{O}'$ , et soit  $\{z_k\}$  une suite tendant vers 0. Si les  $F(z_k)$  sont dans  $\mathcal{E}$ , F est-elle à valeurs dans  $\mathcal{E}$  ?

La réponse, moins évidente, est encore négative. Pour toute suite  $\{z_k\}$  tendant vers 0, et tout  $z_0 \notin \{z_k\}$  on peut construire F entière à valeurs dans  $\mathcal{E}'$ , telle que  $\forall k > 0, F(z_k) \in \mathcal{O}$  et  $F(z_0) \notin \mathcal{O}$ . Si  $z_0 \neq 0$  la suite  $\{F(z_k)\}$  peut de plus être prise bornée dans  $\mathcal{O}$ .

Comportement au bord. On a immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soient  $\Delta$  un domaine de  $\mathbb{C}$ ,  $\gamma$  un arc de Jordan libre dans la frontière de  $\Delta$ , F une fonction holomorphe à valeurs dans  $\mathcal{O}'$  sur  $\Delta$ , continue sur  $\Delta \cup \gamma$ , et telle que  $F(\gamma) \subset \mathcal{E}$ . Alors F est holomorphe à valeurs dans  $\mathcal{E}$  sur  $\Delta$ .

Dans le cas d'un morceau de frontière rectiligne il suffit d'un peu de technique des distributions pour arriver à la proposition 3 (ZERNER [8]).

Autres espaces. - On pourra appliquer le théorème 1 si on sait transformer un espace fonctionnel en un sous-espace fermé de  $E^+$  pour un espace X et une fonction  $\rho$  convenables. Nous allons définir deux telles applications.

1° Remplaçons  $\mathcal{O}'$  par  $\mathcal{S}'$ , et  $\mathcal{E}$  par  $\mathcal{S}$  (notations de [7], tome II). Alors  $\mathcal{S}'$  devient un espace suites grâce au développement en fonctions de Hermite (SCHWARTZ [7], tome II, ch. 7, § 7, exemple 7).

On vérifie ainsi que tous les résultats ci-dessus restent vrais si on remplace  $\mathcal{O}'$  par  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{E}$  par  $\mathcal{S}$ .

2° Enfin à une fonction indéfiniment dérivable sur la droite correspond naturellement une fonction continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  = ensemble des entiers positifs).

On étudie de cette façon les fonctions analytiques à valeurs dans des espaces de fonctions satisfaisant à une majoration du type considéré par GEVREY et HOLMGREN

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq Ck^{pk} \quad .$$

On aboutit alors au résultat assez compliqué à formuler que voici :

PROPOSITION 3. - Soit  $F$  une fonction holomorphe à valeurs dans  $\mathcal{O}'(\mathbb{R})$  sur le demi-plan supérieur ouvert  $\mathbb{C}^+$  et continue sur  $\mathbb{C}^+$ . On peut donc parler des valeurs prises par  $F$  sur l'axe réel. Supposons qu'elles soient toutes des traces sur  $\mathbb{R}$  de fonctions entières de type de croissance exponentielle borné  $\rho$  (indépendamment de la valeur réelle de  $w$ ). Appelons  $\tilde{F}$  la distribution sur  $\mathbb{R}^2$  que définit la restriction de  $F$  aux réels. A priori,  $\tilde{F}$  possède une extension à  $\mathbb{R}^2 + i\mathbb{R}^+ \sigma$  et une à  $\mathbb{R}^2 + i\mathbb{R} \tau$  ( $\sigma$  vecteur unitaire des  $u$ , et  $\tau$  vecteur unitaire des  $t$ ). La proposition affirme que  $\tilde{F}$  est valeur au bord d'une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^+$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Henri). - Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels, Bull. Soc. math. France, t. 73, 1945, p. 74-106.
- [2] DEMY (J.) et LELONG (P.). - Etude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône, Bull. Soc. math. France, t. 75, 1947, p. 89-112.
- [3] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur certains espaces de fonctions holomorphes, J. für reine und angew. Math., t. 192, 1953, p. 35-64 et 77-95.
- [4] LELONG (Pierre). - Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 58, 1941, p. 83-177 (Thèse Sc. math. Paris. 1941).
- [5] LELONG (Pierre). - Fonctions plurisousharmoniques au voisinage du sous-espace réel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 251, 1960, p. 2860-2862.
- [6] LELONG (Pierre). - Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variable réelle, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961 (à paraître).
- [7] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tomes 1 et 2. - Paris, Hermann, 1950-1951 (Act. scient. et ind., 1091 et 1122 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).
- [8] ZERNER (Martin). - Une application de la théorie de Hartogs généralisée, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 377-378.