

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

AIMÉE BAILLETTE

Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles

Séminaire Lelong. Analyse, tome 5 (1962-1963), exp. n° 7, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A7_0

© Séminaire Lelong. Analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS APPROCHABLES PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES

par Mlle Aimée BAILLETTE

On se donne une suite $\Lambda = \{\lambda_n\}$ réelle positive croissante,

$$0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \quad ,$$

et un ouvert Ω du plan complexe. Soit $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans Ω , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et soit $\mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ le sous-espace fermé engendré par $\{\exp(-\lambda_n z)\}$.

On se propose de chercher les domaines Δ dans lesquels toute fonction $f \in \mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ a un prolongement borné, c'est-à-dire tel qu'il existe une constante A et un compact $K \subset \Omega$ de telle sorte que :

$$\sup_{z \in \Delta} |f(z)| < A \sup_{z \in K} |f(z)| \quad .$$

La forme des domaines Δ est liée à la suite Λ par son "indice de saturation" ainsi défini :

soit $n(r) = \sum_{\lambda_n < r} 1$ la fonction de distribution de la suite Λ ; l'indice de saturation de Λ est

$$L = \lim_{s \rightarrow 1-0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r) - n(rs)}{r} \quad .$$

On démontre le résultat suivant :

THÉOREME 1. - Soient Λ une suite ayant un indice de saturation fini et Ω un ouvert qui contient le diagramme conjugué de la fonction

$$C(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{(\lambda_n)^2}\right) \quad .$$

1° Toute fonction $f \in \mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ a un prolongement borné dans tout domaine Δ tel que

$$|y| \leq \exp ax \quad a < \frac{1}{L} \quad x \geq x_0 > x_0(a) \quad .$$

2° Il existe une fonction appartenant à $\mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ qui a une infinité de points singuliers dans tout domaine Δ tel que

$$|y| \leq \exp ax \quad a > \frac{1}{L} \quad x \geq x_0 \quad .$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'étude des propriétés de la fonction $1/C(w)$.

Nous appellerons "co-indicatrice" de la fonction $C(w)$, la fonction

$$H(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \left| \frac{1}{C(r \exp i\theta)} \right| \quad \theta \neq k\pi \quad .$$

THÉORÈME 2. -- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta_0(\varepsilon) > 0$ tel que

$$0 < |\theta| < \theta_0(\varepsilon) \implies (L - \varepsilon) \log \frac{1}{|\theta|} < H(\theta) < (L + \varepsilon) \log \frac{1}{|\theta|} \quad .$$

Démonstration.

1° Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta_0(\varepsilon) > 0$ et $r_0(\varepsilon) > 0$ tels que

$$0 < |\theta| < \theta_0(\varepsilon) \text{ et } r > r_0(\varepsilon) \implies \frac{1}{r} \log \left| \frac{1}{C(r \exp i\theta)} \right| < (L + \varepsilon) \log \frac{1}{|\theta|} \quad .$$

En effet, soit :

$$C(r \exp i\theta) = C_1 C_2, \quad C_1(r \exp i\theta) = \prod_{r/\gamma < \lambda_n < r\gamma} \left(1 - \frac{r^2 \exp 2i\theta}{(\lambda_n)^2} \right) \quad .$$

Pour r assez grand, $\gamma > 1$, assez voisin de 1, et $0 < |\theta| < \frac{\pi}{4}$ on a :

$$|C_1(r \exp i\theta)| > |\sin 2\theta|^{n(r\gamma) - n(r/\gamma)} > |\theta|^{r(L+\varepsilon/2)} \quad .$$

D'autre part :

$$\log |C_2(r \exp i\theta)| > \int_0^{r/\gamma} + \int_{r\gamma}^{\infty} \log \left| 1 - \frac{r^2}{\lambda^2} \right| dn(\lambda) > -ra \quad a = \text{constante} \quad .$$

2° On construit une suite $r_n \rightarrow \infty$ et une suite $s_n \rightarrow 1 - 0$ telles que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(r_n) - n(r_n s_n)}{r_n} \quad .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta_0(\varepsilon)$ tel que

$$0 < |\theta| < \theta_0(\varepsilon) \text{ et } n > n_0(\theta, \varepsilon) \implies \frac{1}{r_n} \log \left| \frac{1}{C(r_n \exp i\theta)} \right| > (L - \varepsilon) \log \frac{1}{|\theta|} \quad .$$

En effet, soit

$$C(r_n \exp i\theta) = C_1 C_2, \quad C_1(r_n \exp i\theta) = \prod_{r_n s_n < \lambda_p < r_n} \left(1 - \frac{r_n^2 \exp 2i\theta}{(\lambda_p)^2} \right) \quad .$$

Pour n assez grand et $|b\theta| < 1$ (b constante > 2), on a :

$$|C_1(r_n \exp i\theta)| < \left| \frac{2r_n^2 \theta}{r_n^2 s_n^2} \right|^{n(r_n) - n(r_n s_n)} < |b\theta|^{r_n(L-\varepsilon/2)} \quad .$$

D'autre part

$$|C_2(r_n \exp i\theta)| < \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r_n^2}{(\lambda_p)^2}\right) < \exp r_n c \quad c = \text{constante}$$

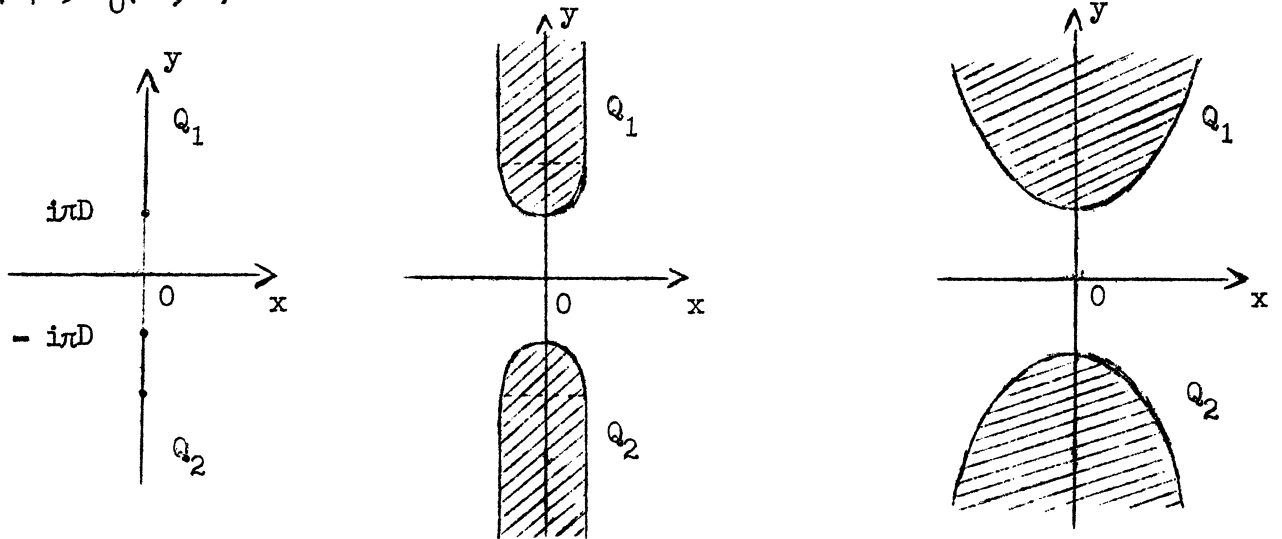
ce qui achève de démontrer le théorème 2.

Nous appellerons "co-diagramme conjugué" Q , de la fonction $C(w)$, la réunion suivante des ensembles :

Q_1 : ensemble des points $z = x + iy$ tels que $x \cos \theta - y \sin \theta \leq H(\theta)$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$.

Q_2 : ensemble des points $z = x + iy$ tels que $x \cos \theta + y \sin \theta \leq H(\theta)$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$.

Si $0 < L < \infty$ et si $0 < a < \frac{1}{L} < b$, tout point $z = x + iy$ de la frontière de θ satisfait les inégalités : $\exp a|x| < |y| < \exp b|x|$ pourvu que $|x| \geq x_0(a, b)$.



Λ mesurable de densité D

Λ a une densité maximum finie

$\theta < L < \infty$

Démonstration du théorème 1.

1° A chaque $Z \in \Delta$ on associe une mesure $d\mu_Z$ à support compact $K \subset \Omega$ indépendant de Z , telle que :

$$\int \exp(-\lambda_n z) d\mu_Z(z) = \exp(-\lambda_n z) \quad \int |d\mu_Z(z)| < A \quad .$$

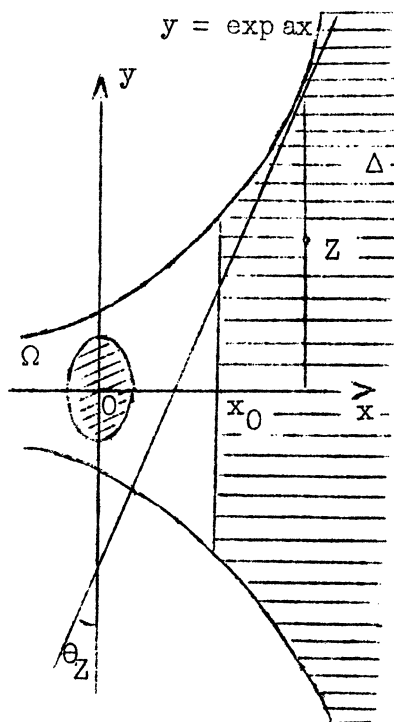
On pose pour toute $f \in \mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$:

$$\int f(z) d\mu_Z(z) = f(Z) \quad .$$

On définit $d\mu_Z$ en posant :

$$\int \exp wz \, d\mu_Z(z) = M_Z(w) = C(w) A_Z(w)$$

$$A_Z(w) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j(\theta_Z)} \frac{e^{w^j Z}}{C(w^j)(w - w^j)} dw^j + g(w)$$



$$g(w) = 0 \quad \text{si } |\arg w| < \pi - \theta_Z$$

$$g(w) = \frac{\exp wz}{C(w)} \quad \text{si } |\arg w - \pi| < \theta_Z$$

$$r_j \rightarrow \infty \quad \text{tel que } |C(w^j)| > \exp(-\epsilon r_j) \quad \text{pour } |w^j| = r_j.$$

φ_Z étant la transformée de Laplace de $M_Z(w)$,
on prend la mesure

$$d\mu_Z(z) = \frac{1}{2\pi i} \varphi_Z(z) dz$$

sur un contour fermé $K \subset \Omega$ et qui entoure le
diagramme conjugué de $C(w)$.

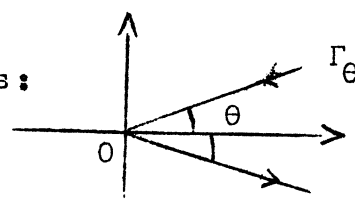
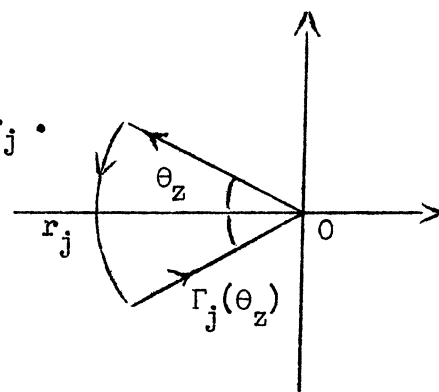
2° La fonction

$$F_\theta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} \frac{\exp(-wz)}{C(w)} dw \quad (0 < \theta < \pi)$$

est holomorphe dans l'angle A_θ intersection des demi-plans :

$$x \cos \theta - y \sin \theta > H(\theta)$$

$$x \cos \theta + y \sin \theta > H(\theta)$$



θ variant dans $]0, \pi[$ on définit ainsi une fonction $F(z)$ holomorphe à l'extérieur du co-diagramme conjugué Q de $C(w)$ ayant une infinité de points singuliers sur la frontière de Q ; F est limite uniforme d'une suite de polynômes de Dirichlet dans une partie de son domaine d'existence et possède une infinité de points singuliers dans tout domaine Δ tel que

$$|y| \leq \exp ax \quad a > \frac{1}{L} \quad x \geq x_0 \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNSTEIN (Vladimir). - Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. - Paris, Gauthier-Villars, 1933 (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions).
- [2] KAHANE (Jean-Pierre). - Lectures on mean periodic functions. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1959 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on mathematics, 15).
- [3] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 5, 1953-1954, p. 39-130 (Thèse Sc. math. Paris, 1954).
- [4] LEONT'EV (A. F.). - Sur la convergence des suites de polynômes de Dirichlet, [en russe], *Dokl. Akad. Nauk, SSSR.*, t. 108, 1956, p. 23-26.
- [5] LEONT'EV (A. F.). - Séries de polynômes de Dirichlet et leurs généralisations [en russe], *Trudy mat. Inst. Steklova*, t. 39, 1951, 214 p.
- [6] LEVIN (B. J.). - Raspredelenie kornej celykh funkciij [Distribution des zéros des fonctions entières]. - Moscou, 1956.
- [7] SCHWARTZ (Laurent). - Etude des sommes d'exponentielles. 2e éd. - Paris, Hermann, 1959 (*Act. scient. et ind.*, 959; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 5).
- [8] VALIRON (Georges). - Théorie des fonctions, 2e éd. - Paris, Masson, 1955 (Cours d'Analyse mathématique).