Séminaire Lelong.
Analyse

Lee A. Rubel

Une méthode de séries de Fourier pour les fonctions méromorphes

Séminaire Lelong. Analyse, tome 6 (1965-1966), exp. n° 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1965-1966__6__A1_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
6e année, 1965/66, n° 1

14 et 21 février 1966

UNE MÉTHODE DE SÉRIES DE FOURIER POUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES

par Lee A. RUBEL

Dans ces conférences, nous avons résumé un travail, fait en collaboration avec B. A. TAYLOR, et qui n'a pas encore été publié.

1. Introduction.

Considérons d'abord un théorème classique de Lindelöf.

THÉORÈME 1. - *Une suite* $Z = \{z_n\}$, $z_n \neq 0$, $z_n \to \infty$, *est l'ensemble des zéros d'une fonction* f *entière, d'ordre de croissance plus petit que* ρ , *et de type fini,* (i. e. $|f(z)| \leqslant \exp A|z|^\rho$ *pour* z *assez grand*) *si et seulement si* Z *est de* r^ρ *densité finie* (*c'est-à-dire que le nombre des* z_n *contenus dans le disque de centre* 0 *et rayon* r *est plus petit que* Br^ρ) *et si, lorsque* ρ *est un nombre entier,*

$$\sum_{|z_n|\leqslant r} \left(\frac{1}{z_n}\right)^\rho$$

est une fonction de r *bornée.*

Dans la démonstration classique, l'outil principal est le produit d'Hadamard. Nous allons démontrer un théorème analogue, qui généralise le théorème de Lindelöf, pour d'autres sortes de croissance ainsi que pour les fonctions d'ordre infini.

Le nouvel outil, remplaçant le produit d'Hadamard, est l'étude de coefficients de Fourier de $\log|f(re^{i\theta})|$,

$$c_k(r , f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| \, e^{-ik\theta} \, d\theta \quad .$$

DÉFINITION 1. - *On appellera fonction de croissance, toute fonction* $\lambda(r)$ *définie pour* $0 \leqslant r < \infty$, *non négative, continue et croissante.*

Nous n'imposons à λ aucune condition de convexité.

DÉFINITION 2. - *On dira qu'une fonction méromorphe* f *est de* λ-*type fini, s'il existe des constantes* A *et* B *telles que*

$$T(r , f) \leqslant A\lambda(Br) \quad .$$

Nous écrirons alors $f \in \Lambda$.

$T(r, f)$ est ici la fonction caractéristique de Nevanlinna :

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta$$

$$\log^+ x = \sup(0, \log x)$$

$$N(r, f) = \sum_{|w_n| \leqslant r} \log \frac{r}{|w_n|} ,$$

où $W = \{w_n\}$ désigne l'ensemble des pôles de f.

Si f est entière, elle est de λ-type fini si, et seulement si,

$$|f(z)| \leqslant \exp A\lambda(B|z|) .$$

Si $\lambda(r) = r^\rho$, la fonction f est de λ-type fini si, et seulement si, f est d'ordre inférieur à ρ et de type fini.

DÉFINITION 3. - Une suite Z est de λ-densité finie si $N(r, Z) \leqslant A\lambda(Br)$, où l'on a posé

$$N(r, Z) = \sum_{|z_n| \leqslant r} \log \frac{r}{|z_n|} .$$

DÉFINITION 4. - Pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, écrivons :

$$S(r : k ; Z) = \frac{1}{k} \sum_{|z_n| \leqslant r} \left(\frac{1}{z_n}\right)^k$$

$$S(r_1, r_2 : k ; Z) = S(r_1 : k ; Z) - S(r_2 : k ; Z) .$$

DÉFINITION 5. - On dira que la suite Z est λ-équilibrée s'il existe des constantes A et B telles que, pour $k = 1, 2, 3, \ldots, r_1 \leqslant r_2$,

$$S(r_1, r_2 : k ; Z) \leqslant \frac{A\lambda(Br_1)}{(r_1)^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{(r_2)^k} .$$

THÉORÈME 2. - Une suite Z est l'ensemble des zéros d'une fonction entière de λ-type fini si, et seulement si, Z est de λ-densité finie et λ-équilibrée.

2. Répartition des suites.

DÉFINITION 6. - La suite Z est dite λ^*-équilibrée (lambda étoile équilibrée) s'il existe des constantes $[\alpha_k]$, appelées constantes d'équilibration, telles que

$$|\alpha_k + S(r : k ; Z)| \leqslant A\lambda(Br) .$$

PROPOSITION 1. - Une suite Z est λ-équilibrée si, et seulement si, elle est $\lambda^{\star}$-équilibrée.

DÉFINITION 7. - $S'(r : Z ; k) = \frac{1}{k} \sum_{|z_n| \leqslant r} (\frac{\overline{z}_n}{r})^k$.

PROPOSITION 2 (évidente). - $S'(r : Z ; k) \leqslant \frac{1}{k} N(er , Z)$.

DÉFINITION 8. - Soit $Z = \{z_n\}$, $z_n \neq 0$, $z_n \to \infty$, une suite de nombres complexes, et soit $\alpha = \{\alpha_k\}$ une autre suite de nombres complexes. Posons

$$C_o(r : Z ; \alpha) = C_o(r : Z) = N(r , Z)$$

$$C_k(r : Z ; \alpha) = \frac{r^k}{2}[\alpha_k + S(r : k ; Z)] - \frac{1}{2} S'(r : k ; Z) , \quad k = 1 , 2 , \ldots$$

$$C_{-k} = \overline{C}_k , \quad k = 1 , 2 , \ldots$$

Nous dirons que la suite $\{C_k(r : Z ; \alpha)\}$ est une suite de coefficients de Fourier associée à Z .

DÉFINITION 9. - Nous dirons qu'une suite de coefficients de Fourier $\{C_k(r : Z ; \alpha)\}$, associée à Z , est λ-admissible s'il existe des constantes A et B telles que

$$|C_k(r : Z ; \alpha)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k| + 1} , \quad k = 0 , 1 , 2 , \ldots$$

DÉFINITION 10. - La fonction de croissance λ est dite régulière si, pour chaque suite Z de λ-densité finie, il existe une suite $Z' \supseteq Z$ qui soit de λ-densité finie et λ-équilibrée.

THÉORÈME 3. - λ est régulière si $\lambda(2r)/\lambda(r)$ est bornée, ou si $\log(\lambda(e^x))$ est convexe.

Question : Est-ce que toute fonction λ est régulière ?

(Il suffit de considérer les fonctions λ telles que $\lambda(e^x)$ soit une fonction convexe de x .)

3. Fonctions méromorphes.

LEMME. - Soient f méromorphe dans $|z| \leqslant R$, $f(o) \neq 0 , \infty$, $Z(f) = \{z_n\}$ l'ensemble des zéros de f , $W(f) = \{w_n\}$ l'ensemble des pôles de f , $\log f(z) = \sum \alpha_k z^k$, dans un voisinage de $z = 0$, $0 < r \leqslant R$. Nous avons :

$$\log|f(re^{i\theta})| = \sum C_k(r\ ,\ f)\ e^{ik\theta}$$

(au sens de L^2) avec des coefficients de Fourier

$$C_k(r\ ,\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\log|f(re^{i\theta})|)\ e^{-ik\theta}\ d\theta$$

satisfaisant aux égalités :

$$C_o(r\ ,\ f) = \log\ |f(0)| + C_o(r : Z(f)\ ;\ \alpha) - C_o(r : W(f)\ ;\ \alpha)$$

$$C_k(r\ ,\ f) = C_k(r : Z(f) : \alpha) - C_k(r : W(f) : \alpha)\ ,\quad k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots$$

THÉORÈME 4. - Etant donnée une fonction méromorphe f , pour laquelle $Z(f)$ est de λ-densité finie, pour que f soit de λ-type fini, il est nécessaire que

(1) $$|C_k(r\ ,\ f)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k| + 1}$$

et il est suffisant que

(2) $$|C_k(r\ ,\ f)| \leqslant A\lambda(Br)\quad .$$

Alors, (1) et (2) aussi sont nécessaires et suffisantes.

Comme application, nous avons les résultats suivants.

THÉORÈME 5. - Si F est de λ-type fini, $f(o) \neq 0\ ,\ \infty$, et si $1 \leqslant q < \infty$, **alors**

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||^q\ d\theta\right\}^{1/q} \leqslant A\lambda(Br)\quad .$$

THÉORÈME 6. - Si une fonction méromorphe f est de λ-type fini, $f(o) \neq 0\ ,\ \infty$, et $\varepsilon > 0$, il existe des constantes positives α et B telles que, pour $r > 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\frac{\alpha}{(Br)}\ |\log|f(re^{i\theta})||\ d\theta \leqslant 1 + \varepsilon\quad .$$

THÉORÈME 7. - Soit $\{C_k(r)\} = \{C_k(r : Z\ ;\ \alpha)\}$ une suite λ-admissible de coefficients de Fourier associée à Z . Il existe une fonction entière f unique telle que $Z(f) = Z$, $f(o) = 1$, et

$$\{C_k(r\ ,\ f)\} = \{C_k(r)\}\quad .$$

La démonstration se fait en posant, pour $\rho > 0$,

$$\Phi(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\rho)\, e^{ik\varphi}$$

$$B_\rho(z : z_n) = \frac{\overline{z}_n}{|z_n|} \frac{\rho(z_n - z)}{\rho^2 - \overline{z}_n z}$$

$$f_\rho(z) = \left\{ \prod_{|z_n| \leqslant \rho} B_\rho(z : z_n) \right\} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{w+z}{w-z} \Phi(w) \frac{dw}{w} \right\} .$$

On définit $f(z) = f_\rho(z)$ pour $|z| < \rho$, et on montre que cette fonction est bien la fonction cherchée.

Il est maintenant facile de démontrer la généralisation donnée dans l'introduction du théorème de Lindelöf et de donner de plus le résultat suivant.

THÉORÈME 8. - Une suite Z est l'ensemble des zéros d'une fonction méromorphe de λ-type fini si, et seulement si, Z est de λ-densité finie.

THÉORÈME 9. - Toute fonction méromorphe de λ-type fini est le quotient de deux fonctions entières de λ-type fini si, et seulement si, λ est régulière.

Par exemple, chaque fonction méromorphe, d'ordre au plus ρ et de type fini, est le quotient de deux fonctions entières de même croissance. Nous croyons que c'est un résultat nouveau même dans ce cas "classique".