Séminaire Lelong. Analyse

Pierre Lelong

Propriétés métriques des ensembles analytiques complexes

Séminaire Lelong. Analyse, tome 6 (1965-1966), exp. n° 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1965-1966__6__A2_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
6e année, 1965/66, n° 2

28 février et 14 mars 1966

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES ENSEMBLES ANALYTIQUES COMPLEXES

par Pierre LELONG

1. Introduction.

La notion "d'aire" des ensembles analytiques complexes est maintenant clairement établie. Elle découle de l'existence de l'intégrale d'une forme différentielle sur un tel ensemble. Ceci devient la base d'une méthode d'étude des propriétés métriques des ensembles analytiques complexes. A son tour l'étude de celles-ci fait apparaître une classe particulière d'opérateurs linéaires : les courants (ou formes différentielles généralisées), qui sont à la fois positifs (au sens rappelé plus loin) et fermés. On a une application de la catégorie des ensembles analytiques complexes dans celle des courants positifs fermés, et cette application donne une méthode nouvelle d'étude des ensembles analytiques ; des théorèmes de prolongement difficiles, tels que celui de REMMERT-STEIN, et une conjecture importante de W. STOLL, ont été démontrés récemment par E. BISHOP par cette voie ; d'autre part, une famille d'ensembles analytiques de dimension pure p telle que, sur tout compact, son image dans l'espace des courants de type (p , p) est un ensemble borné, est une famille normale, résultat à comparer avec le théorème classique de P. MONTEL sur les fonctions holomorphes.

Rappelons qu'un ensemble A est dit un ensemble analytique complexe sur une variété analytique M^n , s'il est fermé, et si tout point $x \in A$ possède un voisinage U_x dans lequel A est l'ensemble des zéros communs à des fonctions holomorphes dans U_x . Un tel ensemble n'a pas, en général, une structure de variété ; on appelle ordinaire, un point $x \in A$ tel que A ait au voisinage de x une structure de variété régulièrement plongée dans C^n , et ceci revient à dire qu'il existe U_x de manière que $A \cap U_x$ s'envoie par une application analytique complexe biunivoque F définie dans U_x sur un ouvert d'une certaine variété linéaire L^p : la dimension complexe p de celle-ci est dite la dimension de A en x . Les points non ordinaires forment un sous-ensemble analytique de dimension complexe $p' < p$, si A est de dimension complexe p en tous ses points (on dit alors que A est de dimension pure p .)

Soit A un ensemble analytique complexe de dimension pure p définie dans un domaine Ω de C^n : on note $\mathcal{D}_{p,p}(\Omega)$ l'espace des formes différentielles à coefficients (C^∞) , à support compact, de type p , p , par rapport aux différentielles

d_{z_k}, $d_{\bar{z}_k}$. On définit

(1) $$t(\varphi) = \int_A \varphi$$

comme un opérateur linéaire. Si A' est l'ensemble (fermé) des points non ordinaires de A, et $\Omega' = \Omega - A'$,

$$t_0(\varphi) = \int_A \varphi$$

est défini sur le sous-espace $\mathcal{D}(\Omega')$, et la méthode qui a fourni la solution est une méthode de prolongement d'opérateur de $\mathcal{D}(\Omega')$ à $\mathcal{D}(\Omega)$ (cf. [7]).

2. Courants positifs et courants positifs fermés.

L'opérateur $t_0(\varphi)$ est [et l'opérateur $t(\varphi)$ sera] un "courant" (au sens de de RHAM [9]). Il s'écrira par une forme différentielle

$$t = \sum_{(i)(j)} t_{i_1 \ldots i_{n-p} \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_{n-p}} \, d_{z_{i_1}} \wedge \ldots \wedge d_{z_{i_{n-p}}} \wedge d_{\bar{z}_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d_{\bar{z}_{j_{n-p}}} ,$$

et si τ_n désigne la forme "élément de volume" de C^n, $\tau_n = \frac{\beta^n}{n!}$,

$$\beta = \frac{i}{2} \sum d_{z_k} \wedge d_{\bar{z}_k} = \frac{i}{2} \, d_z \, d_{\bar{z}} \, \|z\|^2 ,$$

alors l'application

$$t_{(i)(\bar{j})} \to T_{(i)(\bar{j})} = t_{(i)(\bar{j})} \, \tau_n$$

associe canoniquement aux coefficients de t des distributions $T_{(i)(j)}$.

D'autre part, à une variété linéaire L^p, on associera canoniquement une forme différentielle $\omega(L^p)$ définie de la manière suivante : On considère une transformation unitaire appliquant $C^p(z_1 \ldots z_p)$ sur L^p, qui est alors défini par $z'_{p+j} = 0$, $j = 1, \ldots, n-p$. On pose

$$\omega(L^p) = \frac{\beta^p}{p!}(dz') = \left(\frac{i}{2}\right)^p (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \sum \alpha^{(s)} \bar{\alpha}^{(t)} \, dz_{s_1} \wedge \ldots \wedge dz_{s_p} \wedge d\bar{z}_{t_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{t_p} ,$$

où $\alpha^{(s)} = \|\bar{a}_j^s\|$, si $L^p = [z_j \, ; \; z_j = \sum a_j^s z'_s \, ; \; 1 \leqslant j \leqslant n, \; 1 \leqslant s \leqslant p]$, la transformation (a_j^s) étant unitaire. On vérifie que

$$L^p \to \omega(L^p)$$

est une application injective des sous-espaces L^p de C^n dans l'espace des formes différentielles ; on a pour l'adjointe $^*\omega(L^p) = \omega(L^{n-p})$, L^{n-p} étant le sous-espace orthogonal complémentaire.

Définition. - Un courant t est dit positif si :

(a) Il est de type (q, q), $0 \leqslant q \leqslant n$;

(b) Pour tout L^{n-q}, $\sigma[t, L^{n-q}] = t \wedge \omega(L^{n-q})$

est une distribution positive, c'est-à-dire une mesure positive.

Propriétés. - On a les propriétés suivantes (cf. [7] et [8]) :

1° L'application $t \to \sigma[t, L^{n-q}]$ est injective. En fait, sur la grassmanienne complexe, au voisinage de tout L_0^{n-q} donné, on peut trouver un système Σ de L_s^{n-q} (en nombre $N = (C_n^q)^2$) de manière que les coefficients $t_{(i)(j)}$ de t s'expriment comme combinaisons linéaires des $\sigma_s = \sigma[t, L^{n-q}]$; un tel système Σ sera dit régulier.

2° En conséquence, un courant positif a la continuité des mesures (continuité d'ordre zéro) ; les $T_{(i)(\bar{j})}$ associées aux $t_{(i)(\bar{j})}$ sont des mesures complexes ; donc t s'étend à l'espace $C^0_{q,q}$ des formes différentielles à coefficients continus de type (q, q).

3° Soit Γ_+^p le cône des courants positifs de type (p, p) (on dira de degré p ou de dimension $n - p$). Soit Φ_+^p le cône de ceux qui sont représentés par des formes à coefficients continus. Si $t \in \Gamma_+^p$ et $\varphi \in \Phi_+^1$, alors $t_1 = t \wedge \varphi \in \Gamma_+^{p+1}$. En particulier, les formes β, β^p, $\omega(L^q)$ sont positives. De même, la forme $i d_z d_{\bar{z}} V$, si V est une fonction plurisousharmonique. De même,

$$\alpha_\zeta = \frac{i}{2} d_z d_{\bar{z}} \log\|z - \zeta\| ,$$

et ses puissances extérieures α_ζ^p, pour $z \neq \zeta$ (α_ζ est la forme associée à la métrique de l'espace projectif des L^1 issus de ζ).

4° Si t est positif, de dimension p, $(t \in \Gamma_+^{n-p})$,

$$\sigma = \frac{1}{p!} t \wedge \beta^p \qquad \text{et} \qquad \nu = \pi^{-p} t \wedge \alpha_\zeta^p$$

sont des mesures positives. On vérifie que, dans un ouvert G, $\|\sigma\|_G = \int_G \sigma$ donne une norme pour $t \in \Gamma_+^{n-p}$, équivalente à la norme classique, définie par

$$N(t, G) = \sup|t(\rho)| , \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{p,p}(G) , \quad \|\varphi\| = \sup|\varphi_{(i),(\bar{j})}| \leqslant 1 .$$

De même, $N'(t, G) = \sup\|t \wedge \omega(L^p)\|_G$, le sup étant pris sur les L^p d'un système régulier Σ donné, est une norme équivalente à $N(t, G)$.

5° Si, de plus, t est fermé, c'est-à-dire

$$bt(\varphi) = t(d\varphi) = 0 ,$$

on a la propriété suivante qui intervient d'une manière essentielle dans les démonstrations concernant les propriétés métriques des ensembles analytiques.

Soient $B_1 = B(\zeta , r_1)$ et $B_2 = B(\zeta , r_2)$, $0 < r_1 < r_2$, deux boules concentriques de centre ζ . On a

$$0 < \int_{B_2 - B_1} \nu = p!\, \pi^{-p}\left[\frac{\sigma(r_2)}{r_2^{2p}} - \frac{\sigma(r_1)}{r_1^{2p}}\right] .$$

D'où il résulte : Pour un courant positif t , de dimension p , $\sigma(r)\, r^{-2p}$ est une fonction croissante de r , et la limite

$$\nu(\zeta , 0) = \lim_{x=0} p!\, \pi^{-p}\, \sigma(r)\, r^{-2p}$$

existe, ce qui prolonge la mesure ν de $D - \zeta$ à ζ par addition d'une mesure positive ponctuelle en ζ .

3. Courant d'intégration sur un ensemble analytique complexe.

On établit le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - L'opérateur $t(\varphi) = \int_A \varphi$, défini par prolongement (simple extension) de $\mathcal{D}_{pp}(\Omega - A')$ à $\mathcal{D}_{pp}(\Omega)$, existe et est unique. Il possède les trois propriétés suivantes :

(a) C'est le seul prolongement de $t_0(\varphi)$ qui ait une norme nulle sur A' (extension simple) ;

(b) Il est fermé ;

(c) Il est positif.

La démonstration repose essentiellement sur un "théorème de Stokes dans les structures différentiables" (cf. [7]) qui dit, entre autres : Si un courant fermé a la continuité d'ordre zéro dans $D - E$ (E ensemble fermé), pour qu'il s'étende de $D - E$ à D , il faut et il suffit qu'il existe une famille de fonctions continûment dérivables $\alpha_t(x)$, vérifiant $\alpha_t(x) \geqslant 0$, $\alpha_t(x) = 1$, dans un voisinage ω_t de E , et à support dans un voisinage ω_t' de E , ω_t' tendant vers E quand $t \to 0$, et qu'on ait

$$\lim t \wedge d_{\alpha_t} = 0 \qquad \text{quand} \quad t \to 0 .$$

La condition est locale, et il suffit de construire de tels noyaux de classe (C^1) relatifs aux parties compactes de E .

En particulier, si E est une image de classe (C^1) d'une variété linéaire R^m de dimension réelle m, il suffit qu'on ait

$$\lim_{r=0} r^{-1}\|t\|_G^r = 0$$

pour tout compact G, où la norme $\|t\|_G^r$ est calculée sur les formes $\varphi \in \mathcal{D}_{pp}(G_r)$ à support dans $G_r = [x \in G \text{, distance de } x \text{ à } E < r]$.

On obtient ainsi une notion de "frontière nulle" au sens du théorème de Stokes.

La démonstration initiale donnée dans [7] consiste à voir que la condition est vérifiée par la norme du courant $t_0(\varphi)$; pour cette norme, on peut prendre σ, qui est dans ce cas l'aire de la variété $A - A'$. Tout revient alors à obtenir une limitation suffisamment précise de σ au voisinage des points de A'. L'énoncé suivant permet de simplifier cette partie de la démonstration.

PROPOSITION 1.- Soient A un ensemble analytique de dimension pure p contenant l'origine, et η l'ensemble des L^{n-p} qui coupent A de manière que l'origine ne soit pas un point isolé de l'intersection. Alors :

1° η est fermé et est un sous-ensemble analytique (c'est-à-dire algébrique) de la grassmanienne.

2° Il existe des systèmes d'axes orthogonaux d'origine x dont aucun sous-espace coordonné de dimension complexe $n - p$ n'appartient à η.

3° Il existe, relativement à un tel système d'axes, un polycercle

$$P = [z \; ; \; |z_k| < a_k \, , \; 1 \leqslant k \leqslant n \, , \; a_k > 0] \, ,$$

de manière que les projections de $A \cap P$ sur les espaces coordonnés C^p soient des applications propres.

Cet énoncé rend évident l'existence, dans une boule $\|z\| < r$, d'une majoration $\sigma(r) \leqslant kr^{2p}$ pour la norme de t_0.

4. Familles bornées d'ensembles analytiques.

Dorénavant, on va considérer l'application

$$A \to t(A) \subset \Gamma_+^p$$

qui associe à un ensemble analytique A de dimension pure p un courant positif fermé.

Remarquons que les familles de courants positifs dans un domaine D ont les propriétés des familles de mesures positives. On dira que t_n converge faiblement vers t , si $t_n(\omega)$ a une limite sur toute $\omega \in \mathcal{D}_{pp}(D)$. Alors, si $t_n \in \Gamma_+^p$, on a:

1° Si t_n converge faiblement, $t = \lim t_n \subset \Gamma_+^p$. De plus, les normes $\|t_n\|$ sont bornées sur tout compact de Ω .

2° $\mathfrak{F}$ est une famille de courants $t \in \Gamma_+^p$ telle que $\|t\|$ soit borné sur tout compact, la famille $\mathfrak{F}$ sera dite <u>bornée</u> localement. Elle est <u>normale</u>, car de toute suite t_q on peut extraire une suite qui converge faiblement (considérer les $t_q \wedge \omega(L_s^{n-p})$ pour un système régulier de L_s^{n-p}) vers $t \in \Gamma_+^p$.

Si, de plus, les t sont fermés, alors, sur tout compact $K \subset D$, les nombres $\nu(\zeta , 0)$ et $\nu(\zeta , r) = p!\, \pi^{-p}\, \sigma(\zeta , r) r^{-2p}$ sont bornés ; $\sigma(\zeta , r)$ désigne la mesure σ portée par la boule $\|z - \zeta\| < r$, supposée portée par K .

3° Si $t_n \to t$ faiblement, et $x_q \to x$, on a

$$\nu_t(x , 0) \geqslant \limsup_q \nu_{t_q}(x_q , 0) \quad . \tag{2}$$

En particulier, $\nu(x , 0)$ est une fonction semi-continue supérieurement de x .

<u>Définition</u>. - Une famille $A_{(i)}$ d'ensembles analytiques de dimension p sera dite <u>localement bornée</u> dans D , si les courants $t_{(i)} = t[A_{(i)}]$ forment une suite bornée sur tout compact de D pour la norme $\|t\|$.

<u>Propriétés du nombre</u> $\nu(x , 0)$ <u>par les ensembles analytiques</u>. - Pour un diviseur $f = 0$, il est aisé de voir que si, au voisinage de l'origine 0 , on a un développement

$$f = P_q + P_{q+1} + \dots \quad ,$$

le polynôme homogène non nul de plus bas degré étant de degré q , on a

$$\nu(0 , 0) = q \quad .$$

D'autre part, une démonstration élémentaire donne le résultat suivant : Si x est un point ordinaire sur A , $\nu(x , 0) = 1$. Il résulte alors de (2) qu'on a

$$\nu(x , 0) \geqslant 1 , \qquad \text{pour } x \in A \quad .$$

Récemment, P. THIE, élève de STOLL, a établi [11] que le <u>nombre</u> $\nu(x , 0)$ <u>est toujours un entier positif</u>. On a la proposition suivante.

PROPOSITION (THIE). - <u>Soit</u> $x \in A$, A <u>ensemble analytique de dimension</u> p <u>pure</u>. <u>Alors</u>

$$\nu(x , 0) = \nu \sum_s m_s\, m'_s \quad ,$$

où l'indice s est relatif à la décomposition du cône tangent P au point x en composantes $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ irréductibles ; m'_s est le degré de γ_s, qui vaut encore le nombre $\nu(x, 0)$ pour γ_s ; m_s est le degré de l'application holomorphe de A sur γ_s au voisinage de l'origine.

Indiquons des conséquences de ce résultat :

Si $\sigma(x, r)$ est "l'aire" de A dans la boule $\|z - x\| \leqslant r$, et $\ell(x, r)$ la mesure ($2p - 1$ dimensionnelle) de $A \cap [\|z - x\| = r]$, on a, τ_{2p} et ω_{2p-1} étant les mesures de l'intérieur et de la frontière de la boule unité de dimension réelle $2p$,

$$\sigma(x, r) \geqslant \nu(x, 0)\, \tau_{2p}\, r^{2p} \geqslant \tau_{2p}\, r^{2p} ,$$

$$\ell(x, r) \geqslant \nu(x, 0)\, \omega_{2p-1}\, r^{2p-1} \geqslant \omega_{2p-1}\, r^{2p-1} .$$

En particulier, si A est de dimension 1, $\ell(x, r) \geqslant 2\pi r$.

La classe des courants positifs fermés t, qui sont des courants d'intégration $t(A)$ pour un ensemble analytique complexe A, se distingue ainsi par les propriétés suivantes :

(I) t est positif ;

(II) t est fermé ;

(III) Le nombre $\nu(x, 0)$, pour $x \in \operatorname{Supp} t$, a une borne inférieure $c > 0$, c constante universelle ;

(IV) $\nu(x, 0)$ est un entier, pour $x \in \operatorname{Supp} t$.

Existe-t-il des courants possédant les trois premières propriétés (classe Λ), et qui ne sont pas des ensembles analytiques ? Les propriétés (I), (II), (III) entraînent la proposition suivante.

PROPOSITION. - Si $t_n \in \Lambda$, et si t_n converge faiblement, alors $t = \lim t_n \in \Lambda$ et

$$\lim \operatorname{Supp} t_n = \operatorname{Supp} t .$$

Pour $t \in \Lambda$, la mesure de Hausdorff de $\operatorname{Supp} t$ en dimension $2p + 1$ est nulle. Il en résulte que l'ensemble des L^{n-p}, passant par un point, qui coupent $\operatorname{Supp} t$ de manière que l'intersection contienne un continu, est de première catégorie.

Ceci conduit (cf. [2]) à l'énoncé suivant établi par E. BISHOP :

PROPOSITION. - Si des ensembles analytiques A_q dans D de dimension pure p sont tels que les $t(A_q)$ forment une famille bornée sur tout compact, et si l'ensemble A_q converge vers un ensemble A, alors A est un ensemble analytique.

On extrait de la suite A_q une suite partielle $A_{q(i)} = A_i$ telle que les $t(A_i)$ convergent faiblement. Alors $t = \lim t(A_i)$ et $A = \mathrm{Supp}\ t$; t est un courant positif fermé. De plus, $\|t\|$ est fini, ce qui entraîne que la mesure de Lebesgue de A soit finie sur tout compact en dimension réelle $2k$. Alors l'intersection de A avec les L^{n-k} passant par 0 est un ensemble totalement discontinu, sauf pour les L^{n-k}, formant un ensemble maigre (au sens de BAIRE). Donc on peut supposer que $A \cap P$ est discontinue, si $P = [z \; ; \; z_1 = 0 , \dots , z_k = 0]$. Ayant ainsi choisi les axes, il existe un voisinage T de l'origine dans C^{n-k} tel que

$$(C^k \times \text{bord } T) \cap A \cap P = \emptyset ,$$

et $(C^k \times \overline{T} \cap P) \subset D$. On peut alors choisir un voisinage ouvert S de l'origine de C^k, tel que $(\overline{S} \times \text{bord } T) \cap A = \emptyset$, et $\overline{S} \times \overline{T} \subset D$. La condition

$$(S \times \text{bord } T) \cap A = \emptyset$$

exprime que $S \times T$ est un "manchon" pour $A \cap (S \times T)$. Il en est de même pour les A_i pour $i \geqslant i_0$, et les sections des A_i, $i \geqslant i_0$, par $[S \times y , \ y \in T]$, sont de dimension 0. Les projections des $A_i \cap (S \times T)$ sur T sont propres pour $i > i_0$. Elles ont un degré λ_i, évidemment borné. Alors, si $z^0 \in (S \times T) - A$, on définit

$$f_i(z) = \prod [g(z) - g(z_{j,i})] ,$$

où $\{z_{j,i}\}$ sont les points de A_i composant la fibre

$$\{z_{j,i}\} = \pi^{-1}[\pi(z)] \cap A_i ,$$

et où $g(z)$ est une fonction holomorphe sur $S \times T$ avec $g(z^0) \neq 0$. Les f_i sont holomorphes sur $S \times T$, et convergent vers $f(z)$ uniformément. On a ainsi $A \subset [z \; ; \; f(z) = 0]$ et $f(z^0) \neq 0$. Comme z^0 est un point quelconque de $S \times T - A$, A est bien un ensemble analytique.

THÉORÈME 2. - Les familles $\mathfrak{F}$ localement bornées d'ensembles analytiques complexes sont normales.

En effet, de toute suite $A_q \in \mathfrak{F}$ on peut extraire une suite telle que $t_q = t(A_q)$ converge. Soit $t = \lim t_q$; alors $A_q = \mathrm{Supp}\ t(A_q) \rightarrow \mathrm{Supp}\ t = A$, et A est un ensemble analytique d'après l'énoncé précédent.

Dans [2], BISHOP déduit de cette méthode la démonstration de deux théorèmes importants :

THÉORÈME 3 (REMMERT-STEIN). - <u>Si</u> B <u>est un ensemble analytique dans</u> D , <u>avec</u> dim B $\leqslant$ p - 1 , <u>si</u> A <u>est un ensemble analytique de dimension pure</u> p , <u>dans</u> D - B , <u>alors</u> $\bar{A}$ <u>prolonge</u> A <u>dans tout</u> D .

THÉORÈME 4 (Conjecturé par STOLL et établi par lui dans des cas particuliers). - <u>Si</u> A <u>est de dimension pure</u> p <u>dans</u> D - B , <u>si</u> B <u>est un ensemble analytique dans</u> D , <u>et si</u> $\|t(A)\|_{D-B} \leqslant \infty$, <u>alors</u> $\bar{A}$ <u>prolonge</u> A <u>en un ensemble analytique défini dans</u> D .

Ce dernier énoncé ne semble pas épuiser la recherche des hypothèses minima à faire sur E (fermé) pour que l'application de restriction de $A_b(D)$ dans $A_b(D - E)$ soit bijective, $A_b(\Omega)$ désignant la famille des ensembles analytiques d'aire bornée (pour toutes les dimensions complexes) dans un ouvert Ω .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) et NORGUET (F.). - Quelques propriétés de courants définis à l'aide de fonctions holomorphes, Anais Acad. Bras. Ciencias (à paraître).

[2] BISHOP (E.). - Conditions for the analyticity of certain sets, Michigan math. J., t. 11, 1964, p. 289-304.

[3] GUNNING (R. C.) et ROSSI (H.). - Analytic functions of several complex variables. - Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965 (Prentice-Hall Series in Modern Analysis).

[4] HERRERA (M.). - Integration on a semi-analytic set, Bull. Soc. math. France, 1966).

[5] HERVÉ (M.). - Several complex variables. Local theory. - London, Oxford University Press, 1963 (Tata Institute of fundamental Research, Studies in Mathematics, 1).

[6] LELONG (P.). - Integration of a differential form on an analytic complex subvariety, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 246-248.

[7] LELONG (P.). - Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 239-262.

[8] LELONG (P.). - Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Funzioni e varietà complesse [1963. Varenna, Villa Monastero]. - Roma, Cremonese, 1963 (Centro Internazionale Matematico Estivo).

[9] de RHAM (G.). - Variétés différentiables, 2e éd. - Paris, Hermann, 1960 (Act. scient. et ind. 1222 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 3).

[10] STOLL (W.). - The growth of the area of a transcendental analytic set, Math. Z., t. 81, 1963, p. 76-98.

[11] THIE (P.). - On the Lelong's number, Thèse Univ. Notre-Dame (Indiana), 1965.

ADDENDUM

On n'a pas trouvé dans la littérature la proposition 1 qui est énoncée à la page 5. Le "meilleur" résultat connu semble être celui donné par NISHINO (*), selon lequel : Si A est un ensemble analytique de dimension pure p en 0 , les sous-espaces complexes L^{n-p} de dimension (complexe) $n-p$ par 0 qui coupent A de manière que 0 soit point isolé de $L^{n-p} \cap A$, forment un ensemble partout dense.

Autrement dit, l'ensemble η des L^{n-p} tels que

$$\dim_0 L^{n-p} \cap A \geqslant 1$$

a un complémentaire partout dense sur la grassmanienne $G_{n,p}$.

On va établir que η est un ensemble analytique (donc algébrique, $G_{n,p}$ étant compacte) sur $G_{n,p}$.

(a) Cas où $p = 1$: Soit $f_j(z_1, \ldots, z_n) = 0$, $j = 1, \ldots, \nu$, un système d'équations définissant A dans un voisinage de l'origine ; il suffit de remarquer que $\dim_0 L^1 \cap A \geqslant 1$ entraîne $L^1 \subset A$; soit

$$z_k = a_k u , \qquad u \in C ,$$

une représentation de L^1 ; η est défini par les conditions

$$P_{m,j}(a_k) = \left[\frac{\partial^m f_j}{\partial u^m}(a_k u)\right]_{u=0} = 0 , \tag{1}$$

écrites pour tout j et tout $m \geqslant 0$; les $P_{m,j}$ sont évidemment des polynômes homogènes, et les équations (1) définissent un sous-ensemble algébrique de l'espace projectif complexe P^{n-1} .

(b) Cas où $p > 1$: Un sous-espace L^{n-p} sera représenté par

$$z_k = \sum a_k^j u_j , \qquad 1 \leqslant k \leqslant n , \quad 1 \leqslant j \leqslant n-p .$$

On utilisera les coordonnées plückériennes en posant $(k) = (k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-p})$,

$$\delta_{(k)} = \|a_k^j\| , \qquad k \in (k) , \quad j = 1, \ldots, n-p .$$

On obtient ainsi $\nu = C_n^{n-p}$ coordonnées $\delta_{(k)}$ liées par des relations quadratiques;

(*) NISHINO (Toshio). - Les ensembles analytiques et les domaines, J. Math. Kyoto Univ., t. 1, 1962, p. 379-382.

elles définissent la grassmanienne comme sous-variété algébrique $G_{n,p}$ de l'espace projectif $P^{\nu-1}$ des coordonnées homogènes $\delta_{(k)}$.

Pour montrer que η est un sous-ensemble algébrique de $G_{n,p}$, il suffit de montrer qu'il est un sous-ensemble analytique de $G_{n,p}$, donc qu'il est analytique au voisinage d'un point

$$\mu_0 = L_0^{n-p}$$

de $G_{n,p}$. Après un changement d'axes, on peut supposer que L_0^{n-p} est le sous-espace $z_1 = z_2 = \dots = z_p = 0$. Alors, sur un voisinage ω de μ_0 , les L^{n-p} peuvent être définis par des équations

$$(2) \qquad z_k = \sum_{p+1}^{n} c_k^j z_j , \qquad k = 1 , \dots , p , \quad p+1 \leqslant j \leqslant n .$$

Appelons $s(j , k)$ la combinaison d'indices formée de k suivi des indices $p+1 , \dots , n$ dont on a retiré j . On obtient

$$c_k^j = \delta_{s(j,k)} \delta_0^{-1} ,$$

où δ_0 est le déterminant des a_k^j , $p+1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n-p$; δ_0 vaut l'unité dans la représentation (2) de μ_0 et peut être pris égal à 1 sur ω . On a donc finalement

$$(3) \qquad c_k^j = \delta_{s(j,k)} \quad \text{sur } \omega .$$

Les équations de A au voisinage de l'origine

$$f_\lambda(z_1 , \dots , z_n) = 0$$

deviennent alors

$$(4) \qquad f_\lambda\Big[\sum_{p+1}^{n} c_1^j z_j , \dots , \sum_{p+1}^{n} c_p^j z_j , z_{p+1} , \dots , z_n\Big] = \varphi_\lambda(c_k^j , z_j) = 0 ,$$

où $1 \leqslant k \leqslant p$, $p+1 \leqslant j \leqslant n$. Elles définissent un ensemble analytique B . Plus précisément, si A est défini au voisinage de l'origine dans le polycercle

$$\sup|z_i| < \rho , \qquad 1 \leqslant i \leqslant n ,$$

on considèrera un ouvert ω défini par $|c_k^j| = |\delta_{s(j,k)}| < \varepsilon$, $\delta_0 = 1$, sur $G_{n,p}$, et dans l'espace $C^{n-p}(z_{p+1} , \dots , z_n)$ un polycercle P ,

$$\sup|z_j| < \rho' , \qquad p+1 \leqslant j \leqslant n ,$$

ρ' étant tel que $(n-p)\varepsilon\rho' < \rho$. Alors (4) définit l'ensemble analytique B dans le produit

$$\mu = L^{n-p} \in \omega , \qquad \zeta = (z_{p+1} , \dots , z_n) \in P .$$

On se placera sur un domaine d'adhérence compacte dans $\omega \times P$, soit $\omega' \times P'$,

$$\mu \in \omega' \Subset \omega , \qquad \zeta \in P' \Subset P ,$$

où P' est défini par $\sup|z_j| < \rho'' < \rho'$, $p+1 \leqslant j \leqslant n$.

Soient $B_1 , \dots , B_\sigma$ les composantes irréductibles dans $\omega \times P$ qui rencontrent $\omega' \times P'$: elles sont en nombre fini, et B_s est de dimension pure d_s ; B_s est muni d'une projection

$$z = (\mu , \zeta) \longrightarrow \mu .$$

Soit $\mu = p(z)$; la fibre $p^{-1}[p(z)]$ est l'image dans B_s d'une partie de $A \cap L^{n-p}(\mu)$, donc est de dimension zéro en tous ses points si $\mu \notin \eta$. En tout point $z \in B_s$, calculons le rang $r(z)$ de la projection p. On a

$$r(z) = d_s(z) - d'(z) ,$$

où $d_s(z)$ est la dimension de B_s en z, et $d'(z)$ est la dimension en z de la fibre $p^{-1}[p(z)]$. Sur B_s, $d_s(z) = d_s$ est constante. L'ensemble

$$[z \in B_s \ ; \ r(z) \leqslant d_s - 1]$$

est un sous-ensemble analytique $B'_s \subset B_s$, l'inclusion n'excluant pas a priori $B'_s = B_s$; il est constitué par l'ensemble des points $z \in B_s$ en lesquels on a $d'(z) \geqslant 1$.

Procédant ainsi pour chaque composante B_s, on forme un ensemble analytique

$$\beta = \bigcup_s B'_s \subset B ,$$

ensemble des points de B où la dimension $d'(z)$ de la fibre est au moins égale à 1.

Dans ω', l'ensemble η est défini par les conditions

$$\zeta = 0 , \qquad \dim p^{-1}[p(z)] = d'(z) \geqslant 1 .$$

Il est donc l'intersection de β avec le sous-espace $\zeta = 0$; c'est un ensemble analytique. D'autre part, β est un vrai sous-ensemble analytique, le complémentaire de η étant partout dense.

Remarque. - Le fait que η est fermé est évident, directement.

Si $\mu_0 = L_0^{n-p} \notin \eta$, il existe une boule U de centre 0 , dans L_0^{n-p} , par exemple $\|\zeta\| \leqslant r$ dans la représentation (2), telle que $A \cap L_0^{n-p} \cap U$ se réduise à l'origine. Alors le compact $\|\zeta\| = r$ sur L_0^{n-p} possède un voisinage dans C^n , soit Ω , tel que $\Omega \cap A = \emptyset$, ce qui établit que sur les L^{n-p} voisins de L_0^{n-p} , $\|\zeta\| = r$ ne contienne aucun point de A ; l'ensemble analytique $L^{n-p} \cap A$ est donc de dimension zéro, c'est-à-dire que le complémentaire de η est ouvert.

Pour le 2°, on procède comme plus haut à partir de la variété des matrices (n, n) orthogonales : sur cette variété, les systèmes d'axes orthogonaux dont un sous-espace coordonné appartient à η forment un vrai sous-ensemble analytique réel.

Pour le 3°, il suffit de considérer un système d'axes, soit T_0 , dont aucun sous-espace coordonné de dimension complexe $n - p$ n'appartient à η . Puisque le sous-espace coordonné $z_1 = 0 , \dots , z_p = 0$ n'appartient pas à η , il existe $\rho > 0$ tel que, si l'on pose

$$a = [z_1 = 0 , \dots , z_p = 0 , \ \sum |z_j|^2 = \rho^2 , \ \ p+1 \leqslant j \leqslant n] ,$$

on ait $a \cap A = \emptyset$. Il existe donc ε tel que

$$[z_1 = e_1 , \dots , z_p = e_p , \ \sum |z_j|^2 = \rho^2 , \ \ p+1 \leqslant j \leqslant n] , \qquad \text{pour} \ |e_k| < \varepsilon ,$$

ne coupe pas A . Alors, dans le voisinage de l'origine,

$$\Omega = [\sup |z_m| < \varepsilon , \ \ 1 \leqslant m \leqslant p , \ \ \sum_{p+1}^{n} |z_j|^2 < \rho^2] ;$$

les sections $\Omega \cap A \cap [z_1 = e_1 , \dots , z_p = e_p]$ sont composées de points isolés, et la projection de $A \cap \Omega$ sur le sous-espace coordonné $C^{n-p}(z_{p+1} , \dots , z_n)$ est une application propre.

On procède de même à partir d'un sous-espace coordonné $C^{n-p}(z_{i_1} , \dots , z_{i_{n-p}})$, et on définit un voisinage $\Omega_{(i)}$ de l'origine tel que la projection de

$$A \cap \Omega_{(i)} \quad \text{sur} \quad C^{n-p}[z_{(i)}]$$

soit propre. On pose alors $\Omega = \bigcap_{(i)} \Omega_{(i)}$, et on détermine les a_k de l'énoncé de manière que P soit contenu dans Ω .