Séminaire Lelong.
Analyse

Jean-Luc Verley

Représentations intégrales de Fantappié-Leray

Séminaire Lelong. Analyse, tome 6 (1965-1966), exp. n° 4, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1965-1966__6__A4_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
6e année, 1965/66, n° 4

21 et 28 mars 1966

REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DE FANTAPPIÉ-LERAY

par Jean-Luc VERLEY

(d'après André MARTINEAU [3] et [4])

La matière de cet exposé est contenue dans [4] (pages 43 à 60). Nous nous contenterons de donner ici un bref résumé, sans démonstration.

1. Notations.

E étant un espace vectoriel de dimension finie, on définit l'espace projectif associé $P(E)$, quotient de $(\underset{\sim}{C} \times E)^*$ par le groupe des homothéties ; $P(E)$ est une variété analytique complexe, de dimension complexe $2n$, dont E est une sous-variété ouverte. On notera

$$(\zeta_0 , Z) , \quad \zeta_0 \in \underset{\sim}{C} \quad \text{et} \quad Z \in E \qquad (\text{resp.} \quad (\xi_0 , \xi) , \quad \xi_0 \in \underset{\sim}{C} , \quad \xi \in E') ,$$

les coordonnées homogènes d'un point de $P(E)$ (resp. de $P(E')$).

L'équation d'un hyperplan $\bar{\xi}$ de $P(E)$ est une équation homogène de la forme

$$(1) \qquad \xi_0 \, \zeta_0 + \langle Z , \xi \rangle = 0 , \qquad \xi \in E' \quad ;$$

lui associant le point $P(E')$ de coordonnées homogènes (ξ_0 , ξ) et vice versa, on peut identifier $P(E')$ à l'ensemble des hyperplans de $P(E)$ et vice versa. On obtient ainsi une notion de dualité, bien connue pour $E = \underset{\sim}{C}^n$.

Pour $A \subset P(E)$, on désignera par C^*A l'ensemble (identifié à un sous-ensemble de $P(E')$) des hyperplans de E ne rencontrant pas A .

2. Représentations du type de Leray.

Identifions E à $\underset{\sim}{C}^n$ par le choix d'un système de coordonnées.

Considérons, sur $\underset{\sim}{C}^n$ et $\underset{\sim}{C}^{n+1}$ respectivement, les deux formes différentielles

$$\omega(Z) = dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_n ,$$

$$\omega'(\xi_0 , \xi_1 , \ldots , \xi_n) = \omega'(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \xi_k \, d\xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_k} \wedge \ldots \wedge d\xi_n .$$

Si $g(Z , \xi)$ est une fonction holomorphe de $(Z , \xi) \in U \times \Omega$, U ouvert de $\underset{\sim}{C}^n$ et Ω cône ouvert de $(C^{n+1})^*$, holomorphe de degré $-n$ en ξ , alors

$$g(Z , \xi) \omega'(\xi) \wedge \omega(Z)$$

définit une forme différentielle holomorphe π dans l'ouvert $U \times \varphi(\Omega) \subset E \times P(E')$ (φ est ici l'application canonique $E' \times \underset{\sim}{C} \to P(E^*)$).

K désignera dans la suite un compact convexe de E dont le bord est une variété régulière (de dimension réelle $2n - 1$). Pour tout point $Z \in \partial K$, ∂K admet un hyperplan réel tangent, et il existe un seul hyperplan complexe passant par Z et contenu dans cet hyperplan réel ; nous le désignerons par $\xi(Z) \in P(E')$. Nous désignerons enfin par $\Sigma(\partial K)$ la sous-variété réelle de dimension $2n - 1$ de $E \times P(E')$, image de la variété ∂K par l'application $Z \longmapsto (Z , \xi(Z))$ et orientée par transport de l'orientation de ∂K (*). Remarquons que $\Sigma(\partial K)$ est une sous-variété de la quadrique $\mathcal{Q}$, d'équation

$$\xi.Z = \xi_0 + \xi_1 Z_1 + \dots + \xi_n Z_n = 0 \quad ,$$

qui est une sous-variété complexe de dimension complexe $2n - 2$ de $E \times P(E')$.

Nous considérerons dans la suite des représentations intégrales du type

$$(2) \qquad \int_{\Sigma(\partial K)} g(Z , \xi) \omega'(\xi) \wedge \omega(Z) = \int_{\Sigma(\partial K)} \pi$$

où $g(Z , \xi) \omega(\xi) \wedge \omega(Z)$ est holomorphe dans $U \times C^* K_1$ (U ouvert convexe et K_1 compact convexe, $K_1 \subset K \subset U$).

Remarquons que si deux compacts convexes K et K' ont un point intérieur commun, alors les deux intégrales relatives à K et K' sont égales car $\Sigma(\partial K)$ et $\Sigma(\partial K')$ sont homotopes dans $\mathcal{Q}$, et la forme π est fermée sur $\mathcal{Q}$ (car holomorphe et de degré maximum).

3. Intégrale de Cauchy-Fantappié-Leray.

THÉORÈME 1 (cf. [1]). - Soient K un convexe compact, et f holomorphe dans un voisinage ouvert de K . Alors, pour tout $u \in \overset{\circ}{K}$, on a

---

(*) $\overset{\circ}{K}$ est orienté par la condition

$$\frac{1}{(2i)^n} \int_{\overset{\circ}{K}} dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_n \wedge \overline{dZ_1} \wedge \dots \wedge \overline{dZ_n} \geqslant 0 \quad ,$$

et ∂K est muni de l'orientation donnée par la formule de Stokes.

$$(3) \quad f(u) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma(\partial K)} \frac{f(Z)}{(\xi_0 + \xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n)^n} \omega'(\xi) \wedge \omega(Z) \quad ,$$

$$\xi = (\xi_1 , \dots , \xi_n) \quad .$$

COROLLAIRE. - Tout compact convexe K possède la propriété de Runge, i. e. les polynômes sont denses dans l'espace vectoriel $H(K)$ des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K (muni de la topologie

$$H(K) = \varinjlim_{\substack{\Omega \supset K \\ \Omega \text{ ouvert}}} H(\Omega) \;).$$

4. Indicatrice projective (FANTAPPIÈ).

Nous désignerons par $H'(K)$ l'espace vectoriel des fonctionnelles analytiques portables par K (cf. [2] ou [5]). Remarquons que, pour $\xi \in E'$, la fonction $Z \longmapsto \dfrac{\xi_0}{\xi_0 + \langle Z , \xi \rangle}$ ne dépend que de l'hyperplan $\bar{\xi}$ défini par (ξ_0 , ξ) et est holomorphe dans un voisinage de tout compact ne rencontrant pas l'hyperplan précédent.

DÉFINITION. - Soit $T \in H'(K)$; on appelle indicatrice projective de T la fonction

$$\varphi_T : \xi \longmapsto \left(T\left(Z \longmapsto \frac{\xi_0}{\xi_0 + \langle Z , \xi \rangle}\right)\right)$$

définie sur $\complement^{*} K$.

Désignant par $H_0(\complement^{*} K)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\complement^{*} K$ et nulles à l'infini (i. e. pour $\xi_0 = 0$), on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - L'application $T \to \varphi_T$ est un isomorphisme de $H'(K)$ sur $H_0(\complement^{*} K)$, la fonctionnelle analytique $T \in H'(K)$ qui correspond à $\varphi \in H_0(\complement^{*} K)$ étant définie, pour $f \in H(K)$, par

$$(4) \qquad T(f) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma(K')} f_\omega(Z) \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_0^{n-1}} \left(\frac{1}{\xi_0} \varphi(\xi)\right) \omega'(\xi) \wedge \omega(Z) \quad .$$

Ici f_ω est un représentant de f holomorphe dans l'ouvert $\omega \supset K$, et K' un compact convexe tel que $\mathring{K} \subset K' \subset \omega$.

Remarquons que cette intégrale est bien du type (2).

5. Théorème de l'indicatrice.

Rappelons en quelques mots la définition de la transformation de Fourier-Borel (cf. [2] ou [3]) : A toute fonctionnelle analytique T sur E on associe la fonction entière de type exponentiel

$$(5) \qquad \mathfrak{F}T(u) = T(Z \longmapsto \exp\langle Z , u\rangle) \ , \quad u \in E' \ ,$$

appelée transformée de Fourier-Borel de T. Si T est portable par un convexe compact K, de fonction d'appui $h_K(u) = \sup_{Z\in K} \operatorname{Re}\langle Z , u\rangle$, alors on a, $\forall\ \varepsilon > 0$, une majoration du type :

$$(6) \qquad |F(u)| \leqslant K(\varepsilon)\ \exp(h_K(u) + \varepsilon\|u\|) \ ;$$

ici $\|u\|$ est une norme complexe quelconque sur E. La réciproque de ce résultat constitue le théorème suivant.

THÉORÈME 3 (Théorème de l'indicatrice). - Si F est une fonction entière définie sur E' qui satisfait à une majoration du type

$$(6) \qquad |F(u)| \leqslant K(\varepsilon)\ \exp(h_K(u) + \varepsilon\|u\|) \ , \quad \forall\ \varepsilon > 0$$

($h_K(u)$ fonction d'appui d'un convexe compact K), il existe une fonctionnelle analytique T portable par K telle que $\mathfrak{F}T = F$.

Désignons par $\mathcal{E}_K$ l'espace vectoriel des fonctions entières sur E' qui satisfont à (6). D'après le théorème 2, il suffit de construire une bijection $F \longmapsto \mathcal{L}_F$ de $\mathcal{E}_K$ sur $H_0(C^*K)$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\mathfrak{F}"] \arrow[dr] & & \mathfrak{F}T = F \arrow[dl] \\ & \omega_T = \mathcal{L}_F & \end{tikzcd}$$

Nous renvoyons à [3] ou [4] pour la construction de la transformée de Laplace projective $\mathcal{L}_F$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LERAY (Jean). - Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 81-180.

[2] MARTINEAU (André). - Sur les fonctionnelles analytiques et la transformée de Fourier-Borel, J. Anal. math., Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[3] MARTINEAU (André). - Fonctions entières de plusieurs variables complexes, Université de Montpellier, Notes manuscrites photocopiées.

[4] MARTINEAU (André). - Equations différentielles d'ordre infini, Séminaire Leray: Equations aux dérivées partielles, 5e année, 1965/66 (à paraître).

[5] VERLEY (Jean-Luc). - Fonctionnelles analytiques sur les variétés de Stein, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 4e année, 1964/65, n° 6, 17 p. (Math. Semin., 1).