SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

J. DELSARTE

Représentation linéaire des groupes de Haar

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. nº 9, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A11_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année I934-I935

ESPACE DE HILBERT

I.- Représentation linéaire des groupes de Haar

Exposé fait par M. DELSARTE, le lundi 25 Mars I935

Nous exposerons dans cette conférence la théorie de la représentation linéaire des groupes de Haar d'après les travaux de H.WEYL, F.PETER, E.CARTAN. Dans son premier mémoire, Weyl se bornait à considérer les groupes de Lie clos ; toujours en se bornant aux groupes de Lie, E.Cartan a généralisé les résultats de Weyl en considérant une variété dans laquelle le groupe opère transitivement; enfin Weyl a encore étendu les conclusions de E.Cartan.

Nous commencerons par énoncer un certain nombre de définitions et de théorèmes.

I.- Nous nous bornons à considérer les groupes de Haar de mesure totale finie V.

I°) Dans ces groupes la mesure de Haar est bi-invariante ;

Quelle que soit la fonction mesurable bornée du groupe f(x) on a

$$\iint f(y^{-1}x)\,dx\;dy = \int dy \int f(x)\;dx = V \int f(x)\;dx =$$

$$= \int dx \int f(y^{-1})\;dy = V \int f(y^{-1})\;dy$$

il en résulte bien $dx = d(x^{-1})$ et la mesure est bi-invariante.

2°) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe de Haar soit de mesure totale finie est qu'il soit compact :

S'il est compact, il est évidemment de mesure totale finie; inversement, s'il n'est pas compact, on peut trouver une suite infinie de voisinages, tous déduits par translation d'un voisinage de l'unité, et sans point commun deux à deux; la mesure totale est donc infinie .

3°) Si un groupe de Haar compact est discret, il n'a qu'un nombre fini d'éléments ; s'il est infini, il est parfait et a la puissance du continu . Cela résulte d'un théorème d'Hausdorff.

II.- Soit un groupe de Haar compact, considérons les fonctions mesurables du groupe : $f(x)$. On distingue parmi ces fonctions les classes L^p, ($p \geq$ à l'unité), formées des fonctions telles que $\int f(x)^p \, dx$ ait une valeur finie. La classe L^1 est formée des fonctions intégrables; on désignera par L^0 la classe des fonctions mesurables bornées ; elle est entièrement contenue dans L^1 puisque le groupe est de mesure totale finie. D'après l'inégalité de Holder, le produit d'une fonction de L^p par une fonction de $L^{\frac{p}{p-1}}$ appartient à L^1. La classe L^p peut être regardée comme un espace vectoriel normé, en posant

$$\| f \| = \left[\int |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

d'après le théorème de Fischer-Riesz généralisé, cet espace est complet. En particulier L^2 est un espace hilbertien pourvu que l'on définisse le produit scalaire par

$$(f.g) = \int f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$$

Si le groupe est fini, cet espace est l'espace euclidien à n dimensions; s'il est infini, c'est l'espace de Hilbert.

On démontre de plus la propriété de séparabilité suivante :

Toute fonction $F(x)$ de L^p peut être approchée avec une erreur en norme moindre que ε par une fonction continue $f(x)$.

III.- Produit de composition

Soient f et g deux fonctions de L^1 ; le produit $g(y).f(y^{-1}x)$ est intégrable sur le produit direct du groupe par lui-même :

$$\iint g(y)\ f(y^{-1}x)\ dx\ dy = \left[\int |f(x)|\ dx\right]\left[\int |g(y)|\ dy\right.$$

Il en résulte d'après le théorème de Lebesgue-Fubini que la fonction $\int g(y)\ f(y^{-1}x)\ dy$ existe presque partout dans le groupe, et qu'elle appartient à L^1 ; c'est le produit de composition de g par f :

$$\varphi(x) = \int g(y)\ f(y^{-1}x)\ dy = \int g(xy)\ f(y^{-1})\ dy.$$

Si g appartient à L^1 et f à L^0, φ est bornée et appartient aussi à L^0.

Plus généralement, si f est dans L^p et g dans $L^{\frac{p}{p-1}}$, $\varphi(x)$ existe d'après l'inégalité de Hölder ; elle appartient même à L^0 et est continue : la séparabilité de L^p entraine en effet, la continuité en norme des fonctions de L^p, que le produit de composition soit continu et borné.

celà s'en déduit sans peine. Le produit de composition de deux fonctions de L^0 est donc une fonction continue de L^0.

IV.- Représentation d'ordre n

Une matrice $E(x)$ fonction du groupe, de déterminant non nul, définit une représentation linéaire d'ordre n du groupe si l'on a $E(xy) = E(x)\,E(y)$.

A étant une matrice constante d'ordre n, de déterminant non nul, $E(x)$ et $A^{-1}E(x)A$ définissent deux représentations équivalentes qu'on ne distinguera pas l'une de l'autre.

Si on désigne par E^0 la matrice transposée de E, on constate que $E^0(x^{-1})$ définit aussi une représentation du groupe ; c'est la représentation contragrédiente. Enfin, en prenant les complexes conjugués, on voit que $\bar{E}(x)$ définit aussi une représentation .

Une représentation est réductible s'il existe une représentation équivalente de la forme

$$E(x) = \left\| \begin{array}{c|c} A(x) & C(x) \\ \hline 0 & B(x) \end{array} \right\|$$

où le zéro représente une matrice rectangulaire dont tous les éléments sont nuls . La transformation linéaire correspondante dans l'espace à n dimensions invarie une variété linéaire . La représentation est complètement réductible s'il existe,une représentation équivalente de la forme

$$E(x) = \left\| \begin{array}{c|c} A(x) & 0 \\ \hline 0 & B(x) \end{array} \right\|$$

La transformation linéaire correspondante invarie alors deux variétés linéaires disjointes et complémentaires . Dans les deux cas, les matrices A(x) et B(x) fournissent des représentations du groupe .

Une représentation est irréductible si elle n'est pas réductible .

V.- Images matricielles d'une fonction : représentations intégrables .

Soit une représentation E(x) dont nous supposerons d'abord les éléments $e_{ij}(x)$ mesurables. Soit une fonction f(x) ; la première image matricielle de cette fonction est la matrice $\mathfrak{A}[f] = E(x) \times f(x)$ dont les éléments $\alpha_{ij}(x)$ sont les produits de composition des e_{ij} par f. La seconde image matricielle est la matrice $A[f] = \int E(x)\, f(x)\, dx$ où l'écriture a un sens évident.

Si on pose $f^{\circ}(x) = f(x^{-1})$ un calcul facile montre que $\mathfrak{A}[f] = E(x).A\ f^{\circ}$ (relation matricielle). Quelle que soit la matrice mesurable E(x) , on peut toujours trouver une fonction f(x) de L° telle que l'image $A[f]$ existe et soit de déterminant non nul :

Représentons les matrices d'ordre n à éléments complexes par des points dans l'espace à $2n^2$ dimensions ; on peut recouvrir l'ensemble de ces points pour lesquels la matrice est de déterminant non nul par un ensemble dénombrable de domaines convexes Δ_i ; soit $\mathcal{E}_i$ l'ensemble des éléments du groupe pour lesquels le point représentatif de $E(x)$ tombe dans Δ_i; l'un au moins de ces ensembles est de mesure non nulle; soit $\mathcal{E}'$ un ensemble de mesure non nulle λ contenu dans celui-là; il suffit de prendre f égal au quotient de la fonction caractéristique de $\mathcal{E}'$ par λ .

Supposons maintenant la représentation intégrable, c'est à dire les éléments de $E(x)$ dans L^1 , je dis qu'alors ces éléments sont des fonctions continues de L^0:

Choisissons f dans L^0 comme il vient d'être dit ; alors l'image $A[f]$ existe et est de déterminant non nul; on a $E(x) = \mathfrak{A}[f^0] . A^{-1}[f]$; les éléments de l'image $\mathfrak{A}[f^0]$ sont des produits de composition de fonctions de L^1 par une fonction de L^0, ce sont donc des fonctions de L^0; il en est par suite de même des éléments de $E(x)$. Mais alors les éléments de l'image $\mathfrak{A}[f^0]$ sont des produits de composition de deux fonctions de L^0, ce sont donc des fonctions continues de L^0 ainsi que les éléments de $E(x)$.

VI.- La méthode d'I.SCHUR.

Soit $E(x)$ une représentation intégrable d'ordre n; soit une forme hermitienne à n variables définie positive et à coefficients constants. Désignons par A sa matrice. La forme hermitienne ayant pour matrice $\overline{E}(x).A.E^0(x)$ est aussi définie positive ; les éléments de cette dernière matrice sont intégrables comme produits de fonctions de L^0 ; soit donc $C = \int \overline{E}(x).A.E^0(x)\, dx$, qui est encore la matrice d'une forme hermitienne définie positive; on a

$$C = \int \overline{E}(x).A.E^{o}(x)\ dx = \int \overline{E}(xy).A.E^{o}(xy)\ dy$$

$$= \overline{E}(x).C.E^{o}(x)$$

ce qui prouve que la forme hermitienne correspondant à C est invariée par les transformations linéaires correspondant à $E^{o}(x)$. Un changement de coordonnées convenables amène la forme hermitienne correspondant à C à être canonique, les matrices $E(x)$ deviennent alors unitaires : une représentation intégrable est toujours équivalente à une représentation unitaire .

Inversement, toute représentation unitaire est bornée donc intégrable. Si une représentation unitaire est réductible, elle est complètement réductible.

En poursuivant dans cette voie, on aboutit, par une méthode purement algébrique, aux célèbres relations d'orthogonalité d'I.Schur. Comme nous allons les retrouver dans un instant, nous n'en parlerons pas ici, et nous exposerons maintenant les résultats de Weyl .

VII.- La méthode de WEYL.

Les relations d'orthogonalité d'I.Schur montrent qu'à chaque représentation intégrable correspond un système orthogonal de fonctions de L^{o}, donc aussi de L^{2}; la question se pose donc naturellement de savoir s'il n'est pas possible de rattacher ces résultats à la théorie des opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert . Les résultats de Weyl permettent de répondre par l'affirmative. Le principe de sa méthode se trouve dans les deux remarques très simples que voici :

<u>I°) Les systèmes caractéristiques</u>

Un système de n fonctions f_i du groupe sera dit caractéristique si l'on a

$$f_i(yx) = \sum_{j\,1}^{n} e_{ij}(x)\ f_j(y) \ ;$$

Si la matrice $E(x) = \| e_{ij}(x) \|$ est de déterminant non nul, il est clair qu'elle fournit une représentation du groupe ; on a évidemment $E(xy) = E(x).E(y)$.

<u>2°) L'opérateur de composition</u>

On peut regarder le produit de composition

$$\varphi(x) = F(x) \times f(x) = \int F(xy)\ f(y^{-1})\ dy$$

où la fonction F est fixée, comme un opérateur linéaire faisant correspondre la fonction φ à la fonction f . Supposons que ρ soit une valeur spectrale de cet opérateur à laquelle corresponde un nombre fini n, de fonctions propres f_i . On a donc $F(x) \times f_i(x) = \rho\ f_i(x)$; mais les propriétés du produit de composition montrent immédiatement que

$$\rho\ f_i(xy) = \int F(\mathcal{X}\mathcal{Y}t)\ f_i(t^{-1})\ dt = F(\mathcal{X}t)\ f_i(t^{-1})\ dt$$

$f_i(xy)$ regardée comme une fonction de x est donc aussi fonction propre de l'opérateur relative à la valeur spectrale ; il s'en suit que

$$f_i(yx) = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}(x)\ f_j(y)$$

et le système des fonctions f_i est un système caractéristique il fournit donc une représentation d'ordre n.

L'essentiel de la méthode de Weyl se trouve dans ces deux remarques . Entrons un peu dans le détail; on va démontrer les trois points suivants :
existence des représentations
relations d'orthogonalité
le système orthogonal ainsi constitué est complet dans L^2
(Le dernier de ces résultats est dû à Weyl).

VIII.- <u>Existence des représentations</u>

On posera dans la suite $\tilde{f} = \bar{f}^o$

Prenons f dans L^2 et formons le produit de composition $F = f \times \tilde{f}$; on constate sans peine que $F = \tilde{F}$; nous dirons que F a la symétrie hermitienne . On appellera trace de la fonction f(x) et on désignera par Tr(f), la valeur prise par la fonction f en l'élément unité du groupe .
Si on convient de prendre pour unité de volume, le volume du groupe, un calcul immédiat montre que $Tr(F) = \|f\|^2$.

Soit maintenant $\Xi(x)$ une représentation intégrable du groupe, qu'on peut, comme on l'a vu, supposer unitaire.
Formons les images matricielles $A\left[\bar{f}\right]$, et $A\left[f^o\right]$; on a

$$\bar{A}^o\left[\bar{f}\right] = \int f(x)\, \bar{\Xi}^o(x)\, dx = \int f(x)\Xi^{-1}(x)\, dx$$

$$= \int f(x)\, \Xi(x^{-1})\, dx = A\left[f^o\right]$$

puisque les matrices $E(x)$ sont unitaires, et en supposant que $E(x)$ se réduit à la matrice identité en l'élément unité du groupe, ce qui est nécessairement le cas. De plus, on a, d'une manière générale

$$A\left[f \times g\right] = \iint f(xy)\, g(y^{-1})\, E(x)\, dx\, dy$$
$$= \iint f(x)\, g(y)\, E(x)\, E(y)\, dx\, dy = A\left[f\right].A\left[g\right]$$

et par suite

$$A\left[\overline{F}\right] = A\left[\overline{f}\right].A\left[f^{\circ}\right] = A\left[\overline{f}\right].\overline{A}^{\circ}\left[f\right]$$

ce qui prouve que la matrice $A\left[\overline{F}\right]$ est hermitienne et que la forme hermitienne correspondante est non négative. On pourra donc ramener cette dernière matrice à la forme diagonale par une transformation <u>unitaire</u> de coordonnées dans l'espace à n dimensions ; la nouvelle représentation (équivalente à l'ancienne) sera encore unitaire, et elle sera telle que

$$A\left[\overline{F}\right] = \left\| \rho_i \ \delta_{ij} \right\|$$

Formons encore l'image matricielle $\mathcal{B}\left[F\right] = F(x) \times E(x)$ analogue à $\mathcal{A}\left[F\right]$. On a $\mathcal{B}\left[F\right] = \overline{A}^{\circ}\left[F\right].E(x) = A\left[\overline{F}\right].E(x)$ puisque $A\left[\overline{F}\right]$ est hermitienne; comme elle est aussi diagonale, il en résulte

$$F(x) \times e_{ij}(x) = \rho_i\ e_{ij}(x)$$

On peut donc, F étant donnée, écrire les représentations de manière que leurs éléments soient solutions d'une équation intégrale $F(x) \times \varphi(x) = \rho\, \varphi(x)$, c'est à dire soient des fonctions propres .

Il est à noter que pour que l'image $A\left[\overline{F}\right]$ ne soit pas nulle, il est nécessaire et suffisant que l'un au moins des éléments de $E(x)$ soit une fonction propre appartenant à une valeur propre non nulle . Inversement, la remarque faite plus haut en 2° prouve que les fonctions propres d'un opérateur de composition fournissent une représentation du groupe. Si on suppose que ces fonctions propres sont intégrables, il est clair que la représentation ainsi constituée sera intégrable ; ses éléments $e_{ij}(x)$ sont en effet des combinaisons linéaires à coefficients constants des $f_i(y_p x)$, (les y_p étant des éléments fixes du groupe), ce sont donc des fonctions intégrables . Si de plus, $E(x)$ est telle que l'image $A\left[\overline{F}\right]$ soit ramenée à la forme diagonale, la valeur propre correspondant au système de fonctions propres choisi pour construire la représentation figurera nécessairement parmi les éléments diagonaux de $A\left[\overline{F}\right]$.

On obtient donc le théorème d'existence des représentations intégrables en appliquant à l'équation $F \times \varphi = \rho\varphi$ les résultats de la théorie des équations intégrales à noyaux symétriques . En particulier, à toute valeur propre non nulle de ce noyau correspond un nombre fini de fonctions fondamentales, car l'opérateur de composition est un opérateur complètement continu, de plus, il y a au moins une valeur propre non nulle . On peut préciser un peu en appliquant la méthode de Schmidt . Partons d'une fonction $f(x)$ de L^2, formons le noyau hermitien $F = f \times \tilde{f}$ et construisons la suite de ses itérés, qui ne sont autres que les puissances successives de composition de F : $F_1 = F$, $F_n = F \times F_{n-1}$

Posons enfin $\Gamma_n = Tr(F_n)$, qui est aussi la première trace du noyau $F_n(xy^{-1})$ au sens habituel .

a) On a $F_n = \tilde{F}_n$, puis $F_{2n} = F_n \times \tilde{F}_n$ et $\Gamma_{2n} = \| F_n \|^2$

La formule de Schwarz appliquée à

$$\Gamma_{2n+1} = Tr(F_n \times F_{n+1})$$

donne

$$\Gamma_{2n+1} \leq \| F_n \| \cdot \| F_{n+1} \| = (\Gamma_{2n} \cdot \Gamma_{2n+2})^{1/2} \qquad (1)$$

b) La formule de Schwarz appliquée à $F_{2n} = F_n \times F_n$ donne encore

$$| F_{2n}(x) | \leq \| F_n \|^2 = \Gamma_{2n} \qquad (2)$$

c) On a $Tr(g \times F \times \tilde{g}) = Tr(g \times f \times \tilde{f} \times \tilde{g})$

$$= Tr\left[(g \times f) \times (\widetilde{g \times f})\right] = \|(g \times f)\|^2 = 0$$

En remplaçant dans cette inégalité g par une combinaison linéaire à coefficients constants de deux fonctions g et h de L^2, on obtient l'inégalité analogue à celle de Schwarz:

$$| Tr(g \times F \times \tilde{h}) |^2 \leq Tr(g \times F \times \tilde{g}) . Tr(h \times F \times \tilde{h})$$

En conséquence il vient

$$\Gamma_{2n+2} = \mathrm{Tr}(F_n \times F \times F_{n+1})$$

$$\leq \left[\mathrm{Tr}(F_n \times F \times F_n).\mathrm{Tr}(F_{n+1} \times F \times F_{n+1})\right]^{1/2}$$

ou $\Gamma_{2n+2} \leq (\Gamma_{2n+1}\Gamma_{2n+3})^{1/2}$ (3)

Les inégalités (1) et (3) se résument en

$$\Gamma_{n+1} / \Gamma_n \leq \Gamma_{n+2} / \Gamma_{n+1} \qquad (n=2,3,\ldots) \qquad (4)$$

l'inégalité est encore valable pour n =1 ; on le voit en remarquant que

$$\Gamma_2 = \mathrm{Tr}(f \times \tilde{f} \times f \times \tilde{f}) \leq \|f\|.\ \|\tilde{f} \times f \times \tilde{f}\| = (\Gamma_1\Gamma_3)^{1/2}$$

d'après la formule de Schwarz.

d) Enfin, par la formule de la moyenne, on déduit de l'inégalité (2)

$$\Gamma_{2m+2n} = \mathrm{Tr}(F_{2m} \times F_{2n}) \leq \Gamma_{2m}\Gamma_{2n} \qquad (5)$$

Mais on peut montrer aussi que

$$\left|F_{2n+1}(x)\right| \leq \Gamma_{2n+1}$$

Remplaçons pour celà dans l'inégalité $\mathrm{Tr}(g \times F \times \tilde{g}) \geq 0$, g par $\alpha F_n(u^{-1}x) + \beta F_n(v^{-1}x)$; elle devient alors

$$\alpha\bar{\alpha}\Gamma_{2n+1} + \alpha\bar{\beta} F_{2n+1}(u^{-1}v) + \bar{\alpha}\beta\overline{F_{2n+1}}(u^{-1}v) + \beta\bar{\beta}\Gamma_{2n+1} \geq 0$$

d'où résulte la propriété annoncée ; on a donc pour tout indice $n \geq 2$, $\left|F_n(x)\right| \leq \Gamma_n$; puis, comme plus haut

$$\Gamma_{m+n} \leq \Gamma_m\Gamma_n \qquad (m,n,=2,3\ldots) \qquad (6)$$

L'inégalité (4) montre que les quotients Γ_{n+1}/Γ_n vont en croissant; ils sont positifs et bornés supérieurement, car d'après (4) et (6)

$$\left[\Gamma_{n+1}/\Gamma_n\right]^k \leq \Gamma_{n+k}/\Gamma_n \leq \Gamma_k$$

Ils tendent donc vers une limite positive $\gamma \leq \left[\Gamma_k\right]^{1/k}$ pourvu que les Γ_n ne soient pas tous nuls, ce qui n'arrive que si $\|F\|^2$ est nul. De plus $\Gamma_{n+1}/\Gamma_n \leq \gamma$ et la suite $\gamma^{-n}\Gamma_n$ est décroissante, elle est d'ailleurs bornée inférieurement par l'unité, elle a donc une limite $h \geq 1$.

Posons maintenant $\Phi_n = \gamma^{-n} F_n$; on a

$$\|\Phi_m - \Phi_n\|^2 = \operatorname{Tr}\left[(\Phi_m - \Phi_n) \times (\Phi_m - \Phi_n)\right]$$

$$= \gamma^{-2m}\Gamma_{2m} - 2\gamma^{-m-n}\Gamma_{m+n} + \gamma^{-2n}\Gamma_{2n}$$

qui tend vers zéro quand m et n augmentent indéfiniment ; Φ_n converge donc en moyenne dans L^2 vers une limite φ ; mais comme $\gamma\Phi_{n+1} = F \times \Phi_n$, la suite Φ_n étant convergente en moyenne, la suite Φ_{n+1} convergera dans L^o et on aura

$$F \times \varphi = \varphi \times F = \gamma\varphi ; \quad \varphi \times \varphi = \varphi = \tilde{\varphi}$$

et

$$h = \operatorname{Tr}(\varphi) = \operatorname{Tr}(\varphi \times \tilde{\varphi}) = \|\varphi\|^2$$

Si ψ est une fonction propre quelconque de F : $F \times \psi = \rho\,\psi$; on a :

$$\gamma^{-n} F_n \times \psi = \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^n \psi ;$$

Le premier membre tend uniformément vers une limite, donc $\rho \leq \gamma$ et γ est la plus grande valeur spectrable de F.

On peut montrer directement que les fonctions propres correspondant à la valeur spectrale γ sont en nombre fini ; désignons par (φ_i) le système orthogonal , fini ou non, formé par ces fonctions propres . Les fonctions $\overline{\varphi_i(x^{-1}s)}$, où s est fixé, forment aussi un système orthogonal normé ; on a

$$(\varphi \cdot \overline{\varphi_i(x^{-1}s)}) = \int \varphi(x)\, \varphi_i(x^{-1}s)\, dx = \varphi \times \varphi_i = \varphi_i(s)$$

l'application de l'inégalité de Bessel donne alors

$$\|\varphi\|^2 \geq \sum_i \varphi_i(s)\, \bar{\varphi}_i(s) ;$$

et en intégrant cette inégalité sur le groupe, on voit que les φ_i sont nécessairement en nombre fini n, et que l'on a $n \leq \|\varphi\|^2 = h$. On peut par suite appliquer la méthode indiquée en (VII-2°) ; soit donc

$$\varphi_i(yx) = \sum_{j\,1}^{n} e_{ij}(x)\, \varphi_j(y)$$

formules qui définissent la représentation d'ordre n : $E(x) = \| e_{ij}(x) \|$; on a de plus $e_{ij}(x) = \int \varphi_i(yx)\, \bar{\varphi}_j(y)\, dy$

Il est clair que la matrice E(x) se réduit à la matrice unité en l'élément unité du groupe ; les $\varphi_i(yx)$ formant aussi un système orthogonal normé, la matrice E(x) sera unitaire ,ce qui se traduit par $\tilde{e}_{ij} = e_{ji}$. Il faut encore montrer que $A\left[\overline{F}\right] = \| a_{ij} \|$ n'est pas nulle. Or on trouve facilement $\varphi_i(x) \times F(x) = \sum_j a_{ij} \varphi_j(x)$; si on calcule à l'aide de cette formule la trace h de $\varphi \times F$, on constate qu'elle est égale à une forme hermitienne de coefficients a_{ij} calculée pour des valeurs des φ_i en l'élément unité ; cette trace n'étant pas nulle, les a_{ij} ne sont pas tous nuls .

IX.- Relations d'orthogonalité

Nous venons de voir qu'à la valeur spectrale γ correspondent un nombre fini de fonctions propres ; φ étant elle-même une fonction propre est une combinaison linéaire de ces fonctions propres et d'après ce qui a été vu elle se met sous la forme

$$\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(s) \overline{\varphi_i(x^{-1}s)}$$

ou

$$\varphi(xy^{-1}) = \sum_i \varphi_i(x) \overline{\varphi}_i(y)$$

ce qui montre que H est un entier égal au nombre des fonctions propres correspondant à γ . Nous dirons avec H. Weyl que f(x) est une fonction unitaire caractéristique si l'on a

$$f(xy^{-1}) = \sum_{ij} \lambda_{ij} \varphi_i(x) \overline{\varphi}_j(y) \ ;$$

il est clair que cette fonction est une combinaison linéaire des φ_i ; on a donc $f \times \varphi = f$, et f est aussi une combinaison linéaire des $\varphi_i \times \varphi$; ces dernières fonctions sont d'ailleurs unitaires caractéristiques comme on le constate sans peine . Supposons que l'un d'entr'elles $f = \varphi_i \times \varphi$ ne soit pas multiple de φ. $\tilde{f}$ est aussi unitaire caractéristique avec les coefficients $\bar{\lambda}_{ji}$; $f + \tilde{f}$; $\frac{1}{\sqrt{-1}}(f - \tilde{f})$ seront aussi unitaires caractéristiques sans être multiple de φ , elles seront de plus hermitiennes; on peut donc supposer que dans f les coefficients sont hermitiens: une transformation unitaire effectuée sur les φ_i rendra alors la matrice $\|\lambda_{ij}\|$ diagonale; supposons qu'il en soit ainsi et posons $\lambda_{ii} = \lambda_i$; enfin, imaginons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_p$; les autres λ_i étant différents de $\lambda_p = \lambda'$;$(i > p)$.

Par une combinaison linéaire de φ , de f , de ses puissances de composition, il est possible de former une fonction unitaire caractéristique φ' telle que

$$\varphi'(xy^{-1}) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x) \, \bar{\varphi}_i(y) ;$$

(Voici comment on procédera : si dans la suite (λ_i) il y a seulement k nombres différents, on formera un polynome de degré k-1, égal à 1 quand la variable prend la valeur λ', et à zéro quand elle est égale à l'une des autres valeurs de la suite (λ_i). On regardera ce polynome comme une fonction de composition de f en y remplaçant l'unité par φ ; on obtient ainsi la fonction φ').

φ' étant unitaire caractéristique le groupe de fonctions fondamentales ($\varphi_1 ; \varphi_2 ; \ldots\ldots ; \varphi_p$) subit une transformation linéaire par la translation $x \longrightarrow xy^{-1}$; il en résulte que la représentation est complètement réductible , et que la matrice $E(x)$ se décompose . En appliquant ce procédé à chacun des nombres distincts de la suite λ_i ; puis à nouveau à chacune des matrices partielles en lesquelles on aura ainsi décomposé $E(x)$, on finira par décomposer la suite initiale (φ_i) en suites partielles telles que ($\varphi_1 ; \varphi_2 ; \ldots\ldots \varphi_p$). Chacune de ces suites a la propriété suivante :

La somme $\sum_1^p \varphi_i(x)\ \bar{\varphi}_i(y)$ est une fonction $\varphi'(xy^{-1})$ de xy^{-1} seul , et les seules combinaisons linéaires

$$\sum_{ij\ 1}^{p} \lambda_{ij}\ \varphi_i(x)\ \bar{\varphi}_j(y)$$

qui aient cette propriété sont des multiples de φ'.

Ces suites fournissent une représentation du groupe ; je dis que cette représentation est irréductible . Soit en effet, φ_i une des fonctions de la suite ; le produit de composition $\int \varphi_i(x\, t^{-1})\ \bar{\varphi}_j(t\, y^{-1})\, dt$ est une fonction de xy^{-1} seul ; il se met sous la forme

$$\sum_{km;1}^{p} \lambda_{km}\ \varphi_k(x)\ \bar{\varphi}_m(y)$$

avec

$$\lambda_{km} = \int c_{ik}(t)\ \bar{c}_{jm}(t)\ dt\ ;$$

d'après ce qui précède, la matrice $\| \lambda_{km} \|$ est un multiple de la matrice unité ; on a donc

$$\int e_{ik}(t)\,\bar{e}_{jm}(t)\,dt = \rho_{ij}\,\delta_{km}$$

faisant $k = m$ et sommant en k, on trouve

$$\int \Big[\sum_k e_{ik}(t)\,\bar{e}_{jk}(t)\Big]\,dt = p\,\rho_{ij}$$

mais la matrice $\| e_{ij}(t) \|$ étant unitaire, cette relation s'écrit encore $\delta_{ij} = p\,\rho_{ij}$; on obtient donc les relations d'orthogonalité d'I.Schur ; elles entrainent l'indépendance linéaire des $e_{ij}(x)$ et donc l'irréductibilité de la représentation .

De tout ceci résulte que les φ_i et par conséquent φ sont des combinaisons linéaires des coefficients d'un certain nombre de représentations unitaires irréductibles : $E_k(x) = \| e^k_{ij}(x) \|$, de degrés respectifs n_k ; on peut toujours, comme on l'a vu, transformer ces représentations $E_k(x)$ de manière à ramener les différentes images matricielles correspondantes $A_k[\varphi]$ à la forme diagonale, puisque φ est hermitienne . L'équation $\varphi \times \varphi = \varphi$ ayant pour conséquence $A_k[\varphi].A_k[\varphi] = A_k[\varphi]$, il faut que ces éléments diagonaux soient égaux à 0 ou 1 ; si alors on développe φ suivant le système orthogonal e^k_{ij}, on trouve

$$\varphi = \sum_k n_k \Big[e^k_{i_1 i_1}(x) + e^k_{i_2 i_2}(x) + \ldots + e^k_{i_{m_k} i_{m_k}}(x) \Big]$$

$$h = \sum_k n_k . m_k$$

φ admet donc les fonctions propres suivantes :

$e^k_{1_\alpha j}(x)$; $(k = 1,2,\dots,m$; $\alpha = 1,2,\dots m_k$; $j=1,2\dots n_k)$

ce sont des fonctions propres de F appartenant à la valeur propre γ ; elles sont en nombre h, il n'y en a donc pas d'autres .

X.- Le théorème de fermeture

On peut continuer l'application de la méthode de Schmidt et passer à la seconde valeur propre . Posons $f' = f - \varphi \times f$; un calcul facile donne $F' = f' \times \tilde{f}' = F - \gamma\varphi$; tout ce qu'on a dit pour F peut se répéter pour F' soient F'_n la suite de itérés de composition de F' ; soit γ' la plus grande des valeurs propres de F' ; soit φ' la limite uniforme de $\gamma'^{-n} F'_n$.

Les relations suivantes sont immédiates :

$$F'_n = F_n - \gamma^n\varphi \; ; \qquad F' \times \varphi = \varphi \times F' = 0 \; ;$$

Il en résulte que toute fonction propre ψ de F' correspondant à une valeur propre non nulle ρ est aussi une fonction propre de F appartenant aussi à ρ ; en effet, $F' \times \psi = \rho\psi$ entraine $\varphi \times \psi = 0$, donc $F \times \psi = \rho\psi$; inversement, $F \times \psi = \rho\psi$ a pour conséquence $F' \times \psi = \rho\psi - \gamma[\varphi \times \psi]$ et aussi $(\gamma - \rho)[\varphi \times \psi] = 0$, donc $F' \times \psi = \rho\psi$ ou 0 suivant que $\gamma \neq \rho$ ou que $\gamma = \rho$.

On peut continuer les mêmes opérations en posant $f'' = f' - \varphi' \times f$ d'où résulte $F'' = f'' \times \tilde{f}'' = F' - \gamma'\varphi'$; et ainsi de suite . On obtient deux suites $f^{(n)}$ et $F^{(n)}$ avec $F^{(n)} = f^{(n)} \times \tilde{f}^{(n)}$

les valeurs propres et les noyaux principaux correspondants seront désignés par $\gamma^{(n)}; \varphi^{(n)}$. On montre de proche en proche que l'on a

$$\varphi^{(n)} \times \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)} = \widetilde{\varphi}^{(n)} \quad ; \varphi^{(n)} \times \varphi^{(\ell)} = 0$$

$$F_m^{(n)} = F_m - \left[\gamma^m \varphi + \gamma'^m \varphi' + \ldots + (\gamma^{(n-1)})^m \varphi^{(n-1)}\right]$$

Il en résulte

$$\Gamma_m^{(n)} = \mathrm{Tr}(F_m^{(n)}) = \Gamma_m - \left[h \gamma^m + \ldots + h^{(n-1)} (\gamma^{(n-1)})^m\right] \geq 0$$

ce qui prouve que $\gamma^{(n)}$ tend vers zéro ; les inégalités

$$\Gamma_{m+1}^{(n)} \leq \gamma^{(n)} \Gamma_m^{(n)} \leq \gamma^{(n)} \Gamma_m \qquad (m = 1,2,3.....)$$

montrent ensuite que $\Gamma_m^{(n)}$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment pourvu que m soit au moins égal à 2 ; comme on a

$$\left| F_m^{(n)} (x) \right| \leq \Gamma_m^{(n)}$$

on voit que $F_m^{(n)}$ tend uniformément vers zéro pour les mêmes valeurs de m . La série

$$F_m = \gamma^m \varphi + \gamma'^m \varphi' + \ldots.. \qquad (m = 2.3 \ldots.)$$

converge donc absolument et uniformément vers F_m.

Nous avons de plus

$$f^{(n)} = f - (\varphi + \varphi' + \ldots.. + \varphi^{(n-1)}) \times f \quad ;$$

$$F^{(n)} = f^{(n)} \times \widetilde{f}^{(n)} \; ;$$

$$\left\| f^{(n+\ell)} - f^{(n)} \right\|^2 = h^{(n)} \gamma^n + \dots + h^{(n+\ell-1)} \gamma^{(n+\ell-1)}$$

Le second membre de la dernière égalité tend vers zéro car

$h\gamma + h'\gamma' + \dots \leq \Gamma_1$

$f^{(n)}$ tend donc en moyenne vers une fonction g ; $F^{(n)}$ tend uniformément vers $G = g \times \tilde{g}$; $F_2^{(n)}$ tend uniformément vers $G_2 = G \times G = 0$ d'après ce qu'on a vu il y a un instant ; de là résulte que G, puis g, sont des fonctions de normes nulles :

Soit en général $F = f \times \tilde{f}$, et supposons $\|F\| = 0$; on a alors

$$\| g \times f \|^2 = Tr(g \times F \times \tilde{g}) = 0,$$

puis $Tr(g \times f \times h) = 0$, quels que soient g et h .
Il en résulte que l'intégrale de $f(x^{-1}y)$, prise dans l'espace produit du groupe par lui-même sur le produit de deux ensembles quelconques de l'espace du groupe, est nulle .
La fonction $f(x^{-1}y)$ est alors nulle presque partout dans l'espace produit, on en conclut facilement que la norme de f est nulle .

Revenant alors à ce qui a été dit plus haut, g étant de norme nulle, on voit que la série $\gamma\varphi + \gamma'\varphi' + \dots$ converge uniformément vers $F = f \times \tilde{f}$; la série

$$(\varphi \times f) + (\varphi' \times f) + \dots$$

converge en moyenne vers f . Enfin un produit de composition $f \times g$ sera représenté par une série uniformément convergente

$$f \times g = (\varphi \times f \times g) + (\varphi' \times f \times g) + \ldots\ldots$$

les termes du second membre sont des fonctions propres attachées aux valeurs spectrales γ, γ', ...
Tout produit de composition peut donc se développer en série uniformément convergente suivant les coefficients de la représentation unitaire.

Supposons f continue ; la différence $f - f \times g$ peut être rendue aussi petite que l'on veut en prenant g nul en dehors d'un voisinage suffisamment petit de l'unité; son intégrale étant de plus égale à 1 ; toute fonction continue peut donc être approchée uniformément par des sommes finies formées avec les éléments des représentations unitaires; c'est le théorème d'approximation de Weyl qui donne une généralisation étendue du développement d'une fonction continue sur un cercle en série de Fourier uniformément convergente.

Une conséquence importante des résultats précédents est que l'ensemble des représentations d'un groupe de Haar compact est dénombrable.

BIBLIOGRAPHIE

F. PETER und H. WEYL - Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen koutinnierlichen Gruppe.
(Math. Annalen. 97-1927-p.737)

__E.CARTAN__ - Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos .
(Rendiconti del circolo matematico di Palermo 53-1929-p.217).

__H.WEYL__ - Harmonics on homogenious manifolds .
(Annals of mathematics , 35-1934- p.486)

__A.WEIL__ - Méthodes intégrales en théorie des groupes .
(Mémorial des Sciences Mathématiques - à paraitre).