ANDRÉ WEIL

Les fonctions presque périodiques

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. nº 10, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A12_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-1935

ESPACE DE HILBERT

J.- Les fonctions presque périodiques

Exposé fait par M. André WEIL le lundi 8 Avril 1935

La théorie des fonctions presque périodiques sur la droite et dans les espaces vectoriels à n dimensions a été établie par H. Bohr à partir de 1924. L'exposé qu'on va en donner repose sur la définition due à Bochner : une fonction f(x) est presque périodique si l'ensemble de ses "translatées"

$$f_t(x) = f(x+t)$$

est compact. Cette définition a été étendue par V. Neumann récemment aux groupes quelconques. D'autre part (dans le cas de Bohr), Stépanoff et Tychonoff en avaient déduit la notion d'"espace" d'une fonction f(x), dont les éléments sont les $f_t(x)$ et leurs fonctions limites. On va ici réunir ces divers points de vue en montrant que la théorie des fonctions presque périodiques équivaut essentiellement à la résolution du problème suivant : <u>comment peut-on représenter un groupe donné G dans un groupe compact, la représentation étant continue si G est supposé donné comme groupe topologique ?</u> On va voir, en effet, que toute fonction presque périodique permet de définir une telle représentation, et réciproquement une telle représentation définit une <u>classe</u> de fonctions presque périodiques, à savoir les valeurs prises sur G par les fonctions continues dans le groupe compact où G est représenté. L'application des théorèmes de Weyl (cf. exposé I de Delsarte) sur la représentation des groupes compacts donne alors tous les théorèmes de la théorie des fonctions presque périodiques : ce qui rend inutiles les démonstrations données pour celles-ci par Weyl et von Neumann, démonstrations qui apparaissent maintenant comme cas particuliers de celles données pour les groupes compacts. Les autres problèmes de la théorie (fonctions presque périodiques analytiques, généralisations des fonctions presque périodiques) trouvent aussi leur interprétation naturelle par cette méthode d'exposition .

Soit G un groupe quelconque : soit f(x) une fonction bornée sur G , quelconque si G est supposé discret, continue si G est supposé donné comme groupe topologique . s étant un élément fixe de G, x et y des éléments variables, considérons la fonction :

$$f_s(x,y) = f(y^{-1} s\, x)$$

On dira, d'après la définition de Bochner généralisée par von Neumann, que f(x) est <u>presque périodique</u> sur G, si l'ensemble des fonctions $f_s(x,y)$ est <u>compact</u> au sens de la convergence uniforme , c'est à dire si de toute suite de fonctions f_s on peut extraire une suite uniformément convergente . Ces fonctions et leurs limites forment donc un ensemble qui peut être considéré comme un espace topologique comptact (c'est , dans le cas de Bohr, l'"espace" de la fonction tel qu'il a été défini par Stepanoff et Tychonoff). Les fonctions f_s étant en correspondance avec les éléments s de G, il revient au même d'introduire dans G la topologie définie par la distance :

$$(s,t) = \overline{\text{borne}}\, |f_s(x;y) - f_t(x,y)|$$

$$= \overline{\text{borne}}\, |f(y^{-1} s\, x) - f(y^{-1} t\, x)|$$

Cette distance jouit évidemment des propriétés suivantes :

$$(s,t) \leq (s,u) + (u,t)$$

$$(s,t) = (su,tu) = (us,ut)$$

D'où l'on déduit

$$(ss',tt') \leq (ss',ts') + (ts',tt')$$
$$= (s,t) + (s',t')$$

Si e est l'élément unité, on voit en particulier que les éléments s tels que $(s,e) = 0$ forment un sous-groupe g ; et l'on a

$$(s,t) = (st^{-1},e) = (t^{-1}s,e) \ :$$

g est donc un sous-groupe invariant, et l'on a $(s,t) = 0$ si s et t appartiennent à la même classe suivant g, et dans ce cas seulement .

f étant presque périodique, on pourra, de toute suite s_i extraire une suite convergente au sens de la distance (s,t) c'est à dire telle que

$$\lim_{i,j \to \infty} (s_i,s_j) = 0$$

D'après les inégalités trouvées, on voit aussi que si s_i et t_i sont des suites convergentes, $s_i t_i$ en est une encore ; de même s_i^{-1} , car $(s_i,s_j) = (s_i s_j^{-1},e) = (s_j^{-1},s_i^{-1})$.

Complétons donc le groupe G en lui adjoignant toutes les limites de suites convergentes ; ou plus exactement, <u>considérons toute suite convergente (s_i) comme un élément $\bar{S}$ d'un nouveau groupe $\bar{G}$</u> qui sera défini comme espace métrique au moyen de la distance

$$(\overline{S},\overline{T}) = \lim_{i,j\to\infty} (s_i, t_j)$$

les éléments $\overline{S}$ et $\overline{T}$ devant être considérés comme identiques si $(\overline{S},\overline{T}) = 0$. L'on définira le produit et l'inverse dans $\overline{G}$ par les égalités $\overline{S}\,\overline{T} = (s_i t_i)$

$$\overline{S}^{-1} = (s_i^{-1})$$

A tout $\overline{S}$ on peut faire correspondre la fonction

$$f(x,y\,|\,\overline{S}) = \lim_{i\to\infty} f_{s_i}(x,y) = \lim_{i\to\infty} f(y^{-1}s_i\,x)$$

et cette correspondance est biunivoque, car on a :

$$(\overline{S},\overline{T}) = \overline{\text{borne}}\, \left| f(x,y\,|\,\overline{S}) - f(x,y\,|\,\overline{T}) \right|$$

d'où il résulte en même temps que, pour x, y fixes , $f(x,y\,|\,\overline{S})$ est une fonction continue de $\overline{S}$.

s étant un élément de G, la suite (s,s,s,...) est alors un élément de $\overline{G}$, qui sera noté $\overline{s}$: les $\overline{s}$ forment un sous-groupe de $\overline{G}$, partout dense dans $\overline{G}$, isomorphe à G/g . On a $f(x,y\,|\,\overline{s}) = f(y^{-1}s\,x)$, d'où il s'ensuit que, pour x, y fixes $f(x,y\,|\,\overline{S})$ n'est pas autre chose que la fonction $f(y^{-1}s\,x)$, considérée comme fonction de s et prolongée par continuité au groupe $\overline{G}$. En particulier, f(s) est une fonction de s, continue au sens de la distance (s,t) , et qui, prolongée à $\overline{G}$ par continuité, engendre la fonction $f(\overline{S}) = f(e,e\,|\,\overline{S})$ et $f(x,y,\,|\,\overline{S})$ n'est pas autre chose que $f(\overline{y}^{-1}\,\overline{S}\,\overline{x})$.

G étant compact au sens de la distance (s,t), et les $\overline{s}$ étant partout denses dans $\overline{G}$, $\overline{G}$ est compact ; étant d'ailleurs métrique, c'est (parg.16) un groupe de Haar. Si, de plus, G est supposé topologique, donc f(x) continue sur G, la correspondance entre s et $\bar{s}$ est <u>continue</u> ; autrement dit, si une suite s_i tend vers s dans G, les $\bar{s}_i$ correspondants tendent vers $\bar{s}$ dans $\bar{G}$. Sinon, en effet, on pourrait, $\bar{G}$ étant compact, extraire une sous-suite des $\bar{s}_i$ qui converge vers un autre élément $\bar{S}$: mais alors les fonctions $f(y^{-1}s_i x)$ correspondantes tendraient uniformément vers $f(x,y\,|\,\bar{S})$: ce qui est impossible si $\bar{S} \neq \bar{s}$, car elles tendent vers $f(y^{-1}s\,x)$, quels que soient x et y, en vertu de la continuité de f sur G.

On voit donc que <u>toute fonction presque périodique sur G définit une représentation de G dans un groupe de Haar compact $\bar{G}$.</u>

Il en est de même d'un ensemble de fonctions $f_\nu(x)$, presque périodiques sur G, en nombre fini ou dénombrable : si, en effet, $f_\nu(x)$ définit une représentation de G dans un groupe $\bar{G}_\nu$, qui à tout s de G fasse correspondre $\bar{s}_\nu$ dans $\bar{G}_\nu$ on peut considérer l'ensemble des $f_\nu(x)$ comme définissant une représentation de G dans le produit direct de tous les $\bar{G}_\nu$ (qui est encore, un groupe de Haar compact). Il suffit pour cela de faire correspondre à tout s dans G l'élément $(\bar{s}_1, \bar{s}_2 \ldots)$ de ce produit direct.

Il en résulte que la somme, le produit, le quotient (si le dénominateur a une borne inférieure > 0), la limite uniforme de fonctions presque périodiques, sont presque périodiques sur G.

Réciproquement, supposons que l'on se donne une représentation de G dans un groupe compact G_1 : soit $\overline{G}$ la fermeture dans G_1 de l'image de G; désignons par $\overline{s}$, l'image dans $\overline{G}$ d'un élément quelconque s de G, par $\overline{S}$ un élément quelconque de $\overline{G}$. Si $f(\overline{S})$ est une fonction continue quelconque sur $\overline{G}$, elle est uniformément continue et bornée, et les fonctions de x,y définies par

$$f(x,y \mid \overline{S}) = f(\overline{y}^{-1}\,\overline{S}\,\overline{x})$$

forment un ensemble compact : la fonction $f(\overline{s})$ est donc une fonction de s, presque périodique sur G. Autrement dit, toute représentation de G dans un groupe de Haar compact détermine une classe de fonctions presque périodiques sur G, continues sur G si G est un groupe topologique.

Appliquons maintenant les résultats de l'exposé précédent (Delsarte). La fonction $f(\overline{S})$, continue sur $\overline{G}$, déduite de la fonction presque périodique f(x) donnée sur G, pourra être développée dans $\overline{G}$ suivant les coefficients des représentations unitaires de $\overline{G}$, et sera limite uniforme de combinaisons linéaires finies de tels coefficients . Mais, G se trouvant représenté dans $\overline{G}$, toute représentation unitaire de $\overline{G}$ en est une aussi de G: et ses coefficients sont des fonctions presque périodiques sur G. Toute fonction presque périodique sur G est donc limite uniforme de combinaisons linéaires finies de représentations unitaires de G, et réciproquement : c'est le théorème d'approximation .

Pour interpréter de même le développement en fonctions orthogonales, il faut définir, au moyen des seules valeurs de f sur G, l'intégrale $\int f(\overline{S})\, d\overline{S}$ prise sur $\overline{G}$: le groupe compact étant supposé avoir la mesure totale 1, cette intégrale peut d'ailleurs être considérée comme une valeur moyenne et sera notée $\mathfrak{M}(f)$; et l'on aura, quels que soient $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ dans $\overline{G}$:

$$\mathfrak{M}(f) = \int f(\overline{Y}^{-1}\overline{S}\,\overline{X})\, d\overline{S}$$

$f(\overline{S})$ étant une fonction continue sur $\overline{G}$, le second membre peut être calculé par l'intégrale de Riemann : on pourra subdiviser $\overline{G}$ en ensembles mesurables W_i, de diamètre assez petit pour que l'on ait

$$\left| \mathfrak{M}(f) - \sum_i m\, W_i . f(\overline{Y}^{-1}\overline{S}_i\overline{X}) \right| < \varepsilon$$

quels que soient $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, pourvu que $\overline{S}_i \subset W_i$. Soit E l'image de G dans $\overline{G}$, ou même plus généralement, n'importe quel ensemble partout dense dans $\overline{G}$: l'on pourra remplacer $\overline{X}$, $\overline{S}_i$, $\overline{Y}$, par des points $\overline{x}$, $\overline{s}_i$, $\overline{y}$, pris dans E, et l'on aura donc :

$$\left| \mathfrak{M}(f) - \sum_i m\, W_i . f(\overline{y}^{-1}\overline{s}_i\overline{x}) \right| < \varepsilon$$

pourvu que $\overline{s}_i \subset W_i$; d'ailleurs, on a $\sum m\, W_i = m\, G = 1$.

Réciproquement, si la constante A est telle que l'on puisse, quel que soit $\varepsilon > 0$, choisir les $\overline{s}_i$ dans E et les coefficients $c_i \geqslant 0$ de manière que $\sum c_i = 1$, et que l'on ait

$$\left| A - \sum c_i\, f(\overline{y}^{-1}\overline{s}_i\overline{x}) \right| < \varepsilon$$

quels que soient $\overline{x}$ et $\overline{y}$ dans E , on a

$$A = \mathfrak{M}(f).E$$

étant partout dense et f continue, on aura en effet

$$\left| A - \sum c_i \; f(\overline{Y}^{-1}\overline{s}_i\overline{X}) \right| < \varepsilon$$

quels que soient $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ dans $\overline{G}$, d'où, en intégrant par rapport à $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sur $\overline{G}$

$$\left| A - \sum c_i . \mathfrak{M}(f) \right| < \varepsilon$$

donc, puisque $\sum c_i = 1$, $A = \mathfrak{M}(f)$. On voit ainsi , f étant continue , <u>qu'il existe une constante et une seule , égale à $\mathfrak{M}(f)$, qui soit limite uniforme d'une suite de fonctions de la forme</u> $\sum c_i \; f(\overline{y}^{-1}\overline{s}_i\overline{x})$ les c_i étant $\geqslant 0$ et tels que $\sum c_i = 1$, les $\overline{s}_i$ étant pris dans l'ensemble E, et $\overline{x}$ et $\overline{y}$ étant quelconques dans E . <u>Si en particulier</u>, f(x) <u>est presque périodique sur G, il existe une constante et une seule, limite uniforme de fonctions</u>

$$F(x,y) = \sum c_i \; f(y^{-1}s_i x) \qquad (c_i \geqq 0, \; \sum c_i = 1);$$

cette constante sera notée $\mathfrak{M}(f)$, et appelée la <u>valeur moyenne</u> de f(x) sur G (d'après von Neumann); et l'on aura donc, si $f(\overline{S})$ est la fonction continue sur le groupe compact $\overline{G}$ qu'on déduit de f(x)

$$\mathfrak{M}(f) = \int f(\overline{S}) \; d\overline{S}$$

Soit maintenant M(x) une représentation unitaire irréductible, de degré r, de G; les éléments de la matrice M(x)f(x) seront presque périodiques sur G, et l'on écrira :

$$M(f) = \mathfrak{M}\left[M(x)f(x)\right]$$

D'ailleurs , $f(x)$ et $M(x)$ définissent une représentation de G dans un groupe compact $\overline{G}'$, de sorte que, si $\overline{s}'$ désigne l'élément de $\overline{G}'$ correspondant à s dans G, et $\overline{S}'$ un élément quelconque de $\overline{G}'$, f et M, prolongées par continuité à $\overline{G}'$, déterminent respectivement une fonction $f(\overline{S}')$ continue sur G' et une représentation irréductible $M(S')$ de $\overline{G}'$, et que l'on ait

$$M(f) = \int M(\overline{S}')\, f(\overline{S}')\, d\overline{S}'$$

Soit $\overline{g}'$ le sous-groupe formé des éléments $\overline{S}'$ tels que l'on ait identiquement en $\overline{x}'$, $\overline{y}'$: $f(\overline{y}'^{-1}\overline{S}'\overline{x}') = f(\overline{y}'^{-1}\overline{x}')$: $f(\overline{S}')$ sera constante sur les classes suivant $\overline{g}'$, et le groupe quotient $\overline{G}'/\overline{g}'$ ne sera pas autre chose que le groupe compact $\overline{G}$ défini par $f(x)$ sur G. $f(\overline{S}')$ sera alors développable en série (convergente au sens de L^2 sur $\overline{G}'$) suivant les coefficients des représentations de $\overline{G}'/\overline{g}'$.

Si donc $M(\overline{S}')$ n'est pas l'une de ces représentations, on aura $M(f) = 0$; pour que $M(f) \neq 0$, il faut que $M(\overline{S}')$ se réduise à une représentation de $\overline{G}$. Autrement dit, <u>on a $M(f) = 0$ pour toutes les représentations unitaires irréductibles $M(x)$ de G sauf au plus pour les représentations $M^{(\nu)}(x)$</u> (en nombre fini ou en infinité dénombrable) <u>qui correspondent à celles du groupe compact $\overline{G}$ défini par $f(x)$ sur G: et $f(x)$ est développable en série</u>

$$f(x) = \sum_{\nu} \sum_{i,j} c_{ij}^{(\nu)} m_{ij}^{(\nu)}(x)$$

<u>suivant les éléments $m_{ij}^{(\nu)}$ de ces représentations $M^{(\nu)}$, les coef-</u>

ficients étant donnés par les "formules de Fourier" :

$$\| c_{ij}^{(\nu)} \| = M^{(\nu)}(f) = \mathfrak{M}\left[M^{(\nu)}(x)\ f(x)\right] = \int M^{(\nu)}(\xi) f(\xi) d\xi$$

et la série étant convergente "en moyenne", c'est à dire que si $f_m(x)$ désigne la m-ième somme partielle, on a :

$$\lim_{m=\infty} \mathfrak{M}\left(|f(x) - f_m(x)|^2\right) = 0$$

C'est le théorème fondamental de Bohr, étendu par Von Neumann .

Considérons en particulier le cas où G est isomorphe au groupe additif des nombres réels : G étant maintenant noté additivement, la définition des fonctions presque périodiques se réduit évidemment à celle de Bochner. Le groupe $\overline{G}$ défini par une fonction presque périodique sur G sera évidemment abélien puisqu'il contient un sous-groupe abélien partout dense, à savoir l'image de G ; la théorie de Bohr n'est donc pas autre chose que la théorie des représentations du groupe additif des nombres réels dans un groupe abélien compact . Mais les représentations unitaires irréductibles de G sont bien connues : en vertu d'un théorème général sur les matrices permutables, toute représentation d'un groupe unitaire abélien peut en effet être ramenée à la forme diagonale, de sorte que les représentations irréductibles sont de degré 1; ce sont donc ici les solutions continues des équations

$$\chi(xy) = \chi(x)\,\chi(y)\ , \qquad |\chi(x)| = 1$$

et ce sont donc les fonctions $\chi(x) = e^{i\alpha x}$, α étant un nombre réel quelconque. f(x) étant une fonction presque périodique, sur la droite, on voit donc qu'il existe au plus une infinité dénombrable d'"exposants caractéristiques" α_ν tels que

$$\mathfrak{M}\left[e^{i\alpha_\nu x} f(x)\right] \neq 0$$

et que f(x) est développable en série, convergente en moyenne suivant les $e^{i\alpha_\nu x}$, ou bien encore que f(x) est limite uniforme de combinaisons linéaires finies des $e^{i\alpha_\nu x}$. Ce sont les théorèmes classiques de Bohr, la démonstration qui vient d'en être donnée étant au fond la même que celle de Weyl. On a des résultats analogues si G est le groupe des translations d'un espace vectoriel à n dimensions, les $e^{i\alpha_\nu x}$ devant seulement être remplacés par les fonctions

$$\chi(x) = e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n)}$$

Remarquons encore, dans ce cas, que la moyenne $\mathfrak{M}(f)$ d'une fonction presque périodique peut encore être définie de la manière suivante (c'est la définition classique) :

$$\mathfrak{M}(f) = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X} f(x)\,dx$$

f(x) étant limite uniforme de "polynomes exponentiels" de la forme $\sum c_\nu e^{i\alpha_\nu x}$, il suffit de vérifier qu'il en est ainsi pour $f(x) = e^{i\alpha x}$: mais pour ces fonctions la vérification est immédiate .

Donnons maintenant quelques indications sur les généralisations des fonctions presque périodiques . Il suffit, pour obtenir une telle généralisation, de définir une classe de fonctions presque périodiques par la conditionque l'ensemble des $f_s(x,y)$ soit compact, non plus au sens de la convergence uniforme, mais en un autre sens convenablement choisi: en même temps, on pourra cesser d'exiger que f(x) soit continue sur G. Pour cela, en général, on remplacera la distance étudiée plus haut par une autre distance, qu'on pourra définir de différentes manières; on écrira

$$(s,t) = \| f_s - f_t \|$$

et l'on verra comme plus haut que, si l'on complète G en lui adjoignant les limites de suites convergentes au sens de cette distance, G se trouvera représenté dans un groupe de Haar compact $\overline{G}$. Si les s_i forment une telle suite convergente, ayant pour limite un élément $\overline{S}$ de $\overline{G}$, on définira $f(x,y \mid \overline{S})$ comme la limite (au sens de la distance employée) des fonctions f_{s_i}, si la distance employée jouit de propriétés convenables, on trouvera qu'il existe sur $\overline{G}$ une fonction et une seule définie à un ensemble de mesure nulle près, $f(\overline{S})$ telle que l'on ait, quel que soit $\overline{S}$:

$$f(x,y \mid \overline{S}) = f(\overline{y}^{-1}\overline{S}\ \overline{x})$$

<u>au sens de la distance</u>, c'est à dire , plus exactement :

$$\| f(x,y \mid \overline{S}) - f(\overline{y}^{-1}\overline{S}\ \overline{x}) \| = 0$$

Réciproquement, si $f(\overline{S})$ est une fonction donnée sur $\overline{G}$, satisfaisant à certaines conditions qui dépendent de la classe étudiée $f(\overline{s})$ sera une fonction de s, presque périodique sur G au sens de cette classe .

Si en particulier, l'on prend pour G le groupe additif des nombres réels, on obtiendra une théorie de ce type en prenant pour distance $\|f - g\|$ l'une des distances étudiées par Stepanoff, Weyl, Besicovitch (Voir le livre de Besicovitch ou celui de Favard). Les fonctions de Besicovitch, par exemple, ne sont pas autre chose que celles qui correspondent aux fonctions $f(\overline{S})$ de la classe L^p sur le groupe $\overline{G}$ - (on entend par là comme on sait, les fonctions pour lesquelles $|f(\overline{S})|^p$ est intégrable sur $\overline{G}$) : il est donc évident que ces fonctions possèdent une série de Fourier, et que, pour la classe L^2, on aura un théorème de Fischer-Riesz.

Plus simple est la théorie des fonctions presque périodiques analytiques : soit $f(s)$ une fonction analytique de la variable complexe s, régulière dans la bande $a \leq R(s) \leq b$ ($R(s)$ désigne la partie réelle de s). On considère l'ensemble des fonctions $f_\tau(s) = f(s + i\tau)$, τ désignant un nombre réel quelconque; on dira que $f(s)$ est presque périodique si cet ensemble est compact au sens de la convergence uniforme, c'est à dire au sens de la distance

$$(\tau , \tau') = \overline{\text{borne}}_{a \leq R(s) \leq b} \left(f_\tau - f_{\tau'} \right)$$

Le groupe G, qui est ici le groupe additif des nombres réels τ, étant complété, ici encore, par l'adjonction des limites $\overline{T}$ des suites convergentes τ_ν, on posera :

$$f(s \mid \overline{T}) = \lim_{\nu \to \infty} f(s + i\tau_\nu)$$

et le développement de cette fonction suivant les caractères $\chi(\overline{T})$ du groupe G donnera :

$$f_\tau(s) = \sum_\nu c_\nu(s).e^{i\alpha_\nu \tau}$$

Les coefficients $c_\nu(s)$ sont des fonctions analytiques de s, en vertu de leur expression

$$c_\nu(s) = \int_{\overline{G}} f(s \mid \overline{T})\, \chi(\overline{T})\, d\overline{T}$$

$\chi(\overline{T})$ étant le caractère de $\overline{G}$ qui se réduit à $e^{-i\alpha_\nu \tau}$ sur G; mais on doit avoir :

$$f_\tau(s + i\tau') = f_{\tau+\tau'}(s)$$

donc :

$$c_\nu(s + i\tau') = e^{i\alpha_\nu \tau'}\; c_\nu(s)$$

et par conséquent

$$c_\nu(s) = C_\nu\, e^{i\alpha_\nu s},$$

C_ν étant une constante, ce qui donne le développement de f(s) en série de Dirichlet :

$$f(s) = \sum C_\nu\, e^{i\alpha_\nu s}$$

Enfin, l'on peut se demander s'il existe, sur les groupes de Lie, des fonctions presque périodiques dans des cas autres que ceux étudiés par Bohr : la réponse est négative. Il suffit, d'après ce qu'on a vu, de rechercher les représentations unitaires d'un groupe de Lie, G, que nous supposerons <u>connexe</u> Pour cela, nous conviendrons d'appeler <u>quasi-clos</u> tout groupe de Lie (connexe) qui est infinitésimalement le produit direct d'un groupe semi-simple clos par un groupe abélien ; et nous ferons usage du théorème suivant, de E.Cartan, qui permet de reconnaitre , au moyen des seules constantes de structure, si un groupe est quasi-clos : pour qu'un groupe de Lie soit semi-simple clos, il faut et il suffit que sa forme $\varphi(e)$ (V.E.Cartan, Memorial fasc.42, parg.22) soit définie négative; pour qu'il soit quasi-clos, il faut et il suffit que $\varphi(e)$ soit définie ou semi-définie négative . Il en résulte immédiatement que tout sous-groupe de Lie d'un groupe clos ou quasi-clos est quasi-clos. En particulier, toute représentation unitaire d'un groupe de Lie connexe G représente G sur un sous-groupe de Lie d'un groupe unitaire , par conséquent, sur un groupe quasi-clos: on aura une telle représentation chaque fois qu'on aura un sous-groupe invariant g de G, fermé dans G, tel que le groupe quotient G/g soit quasi-clos. Si l'on a deux tels sous-groupes g_1, g_2, on a simultanément deux représentations de G sur les groupes quasi-clos

$$\gamma_1 = G/g_1 \qquad \gamma_2 = G/g_2$$

donc une représentation dans le produit direct $\gamma_1 \times \gamma_2$ de ces deux groupes, qui est encore quasi-clos : cette dernière représentation est un homomorphisme de G sur un groupe (quasi clos, puisque c'est un sous-groupe de $\gamma_1 \times \gamma_2$) isomorphe au groupe quotient G/g_3 , g_3 désignant l'ensemble des éléments communs à g_1 et à g_2. Autrement dit, si g_1 et g_2 sont tels que les quotients de G par ces groupes soient quasi-clos, le groupe g_3 formé des éléments qui leur sont communs, jouit de la même propriété, et par suite, il existe un sous-groupe invariant g possédant cette propriété, et contenu dans tous les sous-groupes qui la possèdent . Toute représentation unitaire de G est alors, en réalité, une représentation de G/g; toute fonction presque périodique sur G étant développable suivant les représentations de G, est constante sur les classes suivant g, de sorte que c'est en réalité une fonction presque périodique sur le groupe quasi-clos G/g.

Mais , par sa définition même, un groupe quasi-clos est infinitésimalement isomorphe au produit direct d'un groupe de Lie clos par un groupe abélien; et il suffit , pour l'obtenir de former le produit direct d'un groupe de Lie clos K par un groupe V_n isomorphe au groupe des translations d'un espace vectoriel à n dimensions, et de prendre le quotient de ce produit $K \times V_n$ par un sous-groupe formé d'un nombre fini d'éléments . La recherche des fonctions presque périodiques , sur un groupe quasi-clos , se ramène ainsi au même problème sur les groupes clos d'une part, sur les groupes V_n d'autre part: or, sur V_n le problème est résolu par la théorie de Bohr; et sur un groupe compact toute fonction continue est évidemment presque périodique, de sorte que le problème est trivial . En définitive on voit que la généralisation de von Neumann ne définit, sur les groupes de Lie connexes, aucune nouvelle fonction qui ne se ramène à celles déjà connues . En revanche, il existe des groupes dénombrables (par exemple les groupes libres à un nombre fini ou dénombrable de générateurs) qui admettent évidemment des représentations unitaires non triviales . Il serait très intéressant de rechercher si tous les groupes dénombrables en admettent aussi : c'est une question qui ne semble pas encore avoir été abordée .

BIBLIOGRAPHIE

Besicovitch, Almost periodic functions (Cambridge I932)

Favard, Fonctions presque périodiques (Collection Julia)

von Neumann, Almost periodic functions on groups, Transactions Am.Math.Soc.I934

H.Weyl, Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, Math.Ann.t.97

A.Weil, Mémorial (à paraitre) chap.IV.
