

# SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

HENRI CARTAN

**Résumé du mémoire de F. Riesz sur les groupes à un paramètre  
d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert**

*Séminaire de Mathématiques (Julia)*, tome 2 (1934-1935), exp. n° 12, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SMJ\\_1934-1935\\_\\_2\\_\\_A14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A14_0)

© École normale supérieure, Paris, 1934-1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

INSTITUT HENRI POINCARÉ

(Cet exemplaire ne peut quitter la salle de lecture)

Exemplaire n° 4

SEMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

---

Deuxième année 1934-1935

---

ESPACE DE HILBERT

---

L. - Résumé du Mémoire de F. RIESZ  
sur les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires  
dans l'espace de Hilbert

---

Exposé fait par M. Henri CARTAN, le 20 Mai 1935

---

Le mémoire en question est intitulé "Über Sätze von Stone und Bochner" (Acta de Szeged, VI, 1933, p.184-198) et se compose de deux parties (I.- Théorème de Bochner généralisé II.- théorème de Stone) précédées d'une introduction.

### Introduction

On considère un groupe continu à un paramètre  $t$  d'opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert (Voir dans l'exposé C de Delsarte, la définition d'un opérateur unitaire) .  $U_t$  désignant l'opérateur, on aura

$$U_s U_t = U_{s+t} \quad , \quad U_0 = 1 \quad (\text{opérateur identique})$$

$U_t$  est par hypothèse une fonction faiblement continue de  $t$  . c'est à dire que  $(U_t f, g)$  est une fonction continue de  $t$ , quels que soient  $f$  et  $g$  .

Le théorème de Stone (Proceedings Nat.Acad., 16, 1930 p.172-175) affirme que  $U_t$  admet une représentation spectrale de la forme

$$(1) \quad U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d E_\lambda$$

les  $E_\lambda$  constituant une décomposition spectrale de l'unité, indépendante de  $t$ . D'une façon précise, (Cf. l'exposé F de Chevalley) les  $E_\lambda$  sont des opérateurs de projection formant une suite non décroissante ( $E_\lambda \leq E_\mu$  si  $\lambda \leq \mu$ ), continue

à gauche, avec

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_{\lambda} = 0 \quad , \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_{\lambda} = 1$$

La notation (1) signifie que l'on a, quels que soient  $f$  et  $g$ ,

$$(2) \quad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d(E_{\lambda} f, g)$$

et en particulier

$$(3) \quad (U_t f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d(E_{\lambda} f, f)$$

En d'autres termes, le théorème de Stone affirme que tout groupe continu à un paramètre d'opérateurs unitaires est engendré par une transformation infinitésimale qui se met sous la forme d'un opérateur hypermaximal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda dE_{\lambda} \quad (\text{Cf. l'exposé F}).$$

Pour démontrer le théorème de Stone, il faut, connaissant  $U_t$ , déterminer  $E_{\lambda}$ . Ce problème présente l'aspect particulier suivant : dans (3),  $f$  étant supposé fixé, le premier membre est une fonction continue connue  $p(t)$ ; au second membre,  $(E_{\lambda} f, f)$  est une fonction inconnue  $V(\lambda)$ , bornée, non décroissante, continue à gauche, avec la condition supplémentaire :  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} V(\lambda) = 0$

D'où le problème : A quelles conditions une fonction continue  $p(t)$  (à valeurs complexes) admet-elle une représentation de

Fourier-Stieltjes

$$(4) \quad p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dV(\lambda)$$

$V(\lambda)$  satisfaisant aux conditions énoncées plus haut ?

D'ailleurs  $dV(\lambda)$  désigne une mesure de Radon, partout non négative, de masse totale finie; inversement, une telle mesure de Radon définit  $V(\lambda)$  d'une façon unique.

La réponse est donnée par le théorème de Bochner (Vorlesungen über Fourriersche Integrale, p.74-76; Leipzig 1932) : il faut et il suffit que  $p(t)$  soit de type positif c'est à dire que l'on ait :

$$(5) \quad \sum_{\mu, \nu=1}^m p(t_\mu - t_\nu) \rho_\mu \overline{\rho_\nu} = 0$$

quels que soient  $t_1, \dots, t_m$  réels en nombre quelconque, et quels que soient  $\rho_1, \dots, \rho_m$  complexes.

Cette condition entraîne en particulier :

$$1^\circ - p(-t) = \overline{p(t)}$$

$$2^\circ - p(0) \geq 0, \quad p(t) \leq p(0), \text{ donc } |p(t)| \text{ borné.}$$

But du mémoire de F.RIESZ : appliquer la technique des séries de Fourier, d'abord à la démonstration du théorème de Bochner ( sous l'hypothèse  $p(t)$  mesurable, hypothèse plus large que la continuité ; on détermine alors  $V(\lambda)$  et l'on montre que (4) a lieu presque partout pour  $t$  ), puis à la démonstration du théorème de Stone déduit de celui de Bochner ( on ne sup-

pose donc pas la continuité de  $U_t$ , mais seulement la mesurabilité de  $(U_t f, f)$ ; on définit  $E_\lambda$ , et on montre d'abord que (2) a lieu presque partout; puis on montre que (2) a lieu partout, d'où suit la continuité de  $U_t$ .

---

### Théorème de BOCHNER

Indiquons seulement le plan de la démonstration. La condition de Bochner est évidemment nécessaire. Il faut montrer qu'elle est suffisante.

1°- Détermination de  $V(\lambda)$  à partir de  $p(t)$  mesurable et de type positif.

Riesz définit, à partir de  $p(t)$  fixée une fois pour toutes, une fonctionnelle linéaire  $A(h)$  (Voir la définition de  $A(h)$  dix lignes plus bas), définie pour toutes les fonctions  $h(t)$  "du type h", c'est à dire réelles, continues, et ayant par morceaux, une dérivée continue. Cette fonctionnelle est réelle et bornée, elle a une valeur non négative quand  $h(t)$  est non négative. Elle peut donc, d'après un théorème classique de Riesz, être considérée comme l'intégrale de  $h(t)$  par rapport à une mesure de Radon, partout non négative et de masse totale finie, cette mesure de Radon caractérisant la fonctionnelle  $A(h)$ , et par suite la fonction  $p(t)$ .

D'où la fonction  $v(\lambda)$  telle que

$$(6) \quad A(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \, d v(\lambda) .$$

Indiquons seulement comment on définit  $A(h)$  . On

pose :

$$(7) \quad A(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \, h^*( -t) \, dt$$

$h^*(t)$  désignant la transformée de ~~Fourier~~ de  $h(t)$  , c'est-  
Fourier

à dire

$$(8) \quad h^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, h(\lambda) \, d\lambda$$

L'intégrale (7) existe parce que  $p(t)$  est mesurable et bornée. Le fait que la fonctionnelle  $A(h)$  est bornée (on a, d'une façon précise,  $|A(h)| \leq p(0)$  si  $|h(t)| \leq 1$ ), et qu'elle est non négative si  $h(t)$  est non négative, résulte essentiellement du fait que :

$$A(h^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-s) \, h^*(t) \, \overline{h^*(s)} \, dt \, ds$$

est  $\geq 0$  , conséquence du fait que  $p(t)$  est de type positif.

(Pour le détail des démonstrations, consulter le mémoire de F. Riesz) .

2°-  $v(\lambda)$  étant ainsi définie, il reste à montrer que :

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, d v(\lambda)$$

qui est bornée et continue, est égale, presque partout, à

$p(t)$ , ce qui relève de la technique des séries de Fourier.

On montre d'abord que

$$(9) \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) h^x(-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) h^x(-t) dt$$

quelle que soit  $h(t)$  réelles, puis complexes; ensuite on prend une fonction  $h(t)$  particulière, telle que

$$h^x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{n} \frac{\sin^2 \frac{n}{2} (t+u)}{(t+u)^2} \quad (u > 0, n \text{ entier})$$

et, dans (9), on fait croître  $n$  indéfiniment,  $u$  restant fixe; le premier membre tend vers  $\frac{\pi}{2} q(u)$ , le second vers  $\frac{\pi}{2} p(u)$  pour presque toutes les valeurs de  $u$ .

C.Q.F.D.

### Complément

Pour la suite, il est bon de rappeler comment on trouve  $V(\lambda)$  à partir de la fonctionnelle  $A(h)$ . On a

$$(\lambda_1 \leq \lambda_2)$$

$$V(\lambda_2 - 0) - V(\lambda_1 + 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(h_n)$$

les  $h_n(t)$  étant une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq h_n(t) \leq 1 \quad \text{quel que soit } t \\ h_n(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq \lambda_1 \quad \text{et pour } t \geq \lambda_2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t) = 1 \quad \text{pour } \lambda_1 < t < \lambda_2 \end{array} \right.$$

En particulier, si on convient que  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} V(\lambda) = 0$  et que  $V(\lambda)$  est continue à gauche, on a

$$(9') \quad V(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) h_n^x(-t) dt$$

avec

$$\begin{cases} 0 \leq h_n(t) \leq 1 \\ h_n(t) = 0 \text{ pour } t \geq \lambda \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t) = 1 \text{ pour } t < \lambda. \end{cases}$$

---

### Théorème de STONE

---

Voici le plan de la démonstration :

1°- on vérifie que  $(U_t f, f) = p(t)$  est bien de type positif quel que soit  $f$  ; il lui correspond une fonction  $V(\lambda ; f)$  définie, à partir de  $p(t)$ , par la relation (9), qui s'écrit ici

$$V(\lambda ; f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_t f, f) h_n^x(-t) dt$$

2°- on pose plus généralement :

$$(10) \quad V(\lambda ; f, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_t f, g) h_n^x(-t) dt ;$$

c'est une fonctionnelle bilinéaire bornée; elle est donc de la forme

$$(E_\lambda f, g)$$

$E_\lambda$  étant un opérateur linéaire borné ; et on a

$$(11) \quad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dV(\lambda ; f, g)$$

pour presque toutes les valeurs de  $t$  . ( On peut faire en sorte que les valeurs exceptionnelles de  $t$  ne dépendent pas de  $f$  et  $g$ , parce que l'espace de Hilbert est séparable).

3°- Il reste alors à montrer que :

$\alpha$ ) L'opérateur  $E_\lambda$  est hermitien

$\beta$ ) La relation (11) a lieu pour toutes les valeurs de  $t$  sans exception

$\gamma$ ) On a  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda = 1$

$\delta$ ) On a  $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_2} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}$  si  $\lambda_1 \leq \lambda_2$

Remarque : les conditions  $\alpha$ ),  $\gamma$ ),  $\delta$ ) expriment que les  $E_\lambda$  sont des opérateurs de projection et forment un spectre; la continuité à gauche et la propriété

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda = 0$$

résultent de la définition de  $V(\lambda ; f)$ .

### Indications sur le développement

1°-  $(U_t f, f)$  est de type positif

En effet, en posant

$$(U_t f; f) = p(t)$$

on a, en vertu de la propriété de groupe

$$\sum_{\mu, \nu=1}^m p(t_\mu - t_\nu) \rho_\mu \bar{\rho}_\nu = \left( \sum_{\mu=1}^m \rho_\mu U_{t_\mu} f, \sum_{\nu=1}^m \rho_\nu U_{t_\nu} f \right) \geq 0$$

### 2°- Propriétés de $V(\lambda; f, g)$

$$\text{On a } V(\lambda; f, f) = V(\lambda; f) ,$$

et

$$V(\lambda; f + \mu g) = V(\lambda; f) + \mu V(\lambda; g, f) + \bar{\mu} V(\lambda; f, g) + \mu \bar{\mu} V(\lambda; g)$$

Or on a presque partout (Cf. 2ème partie du théorème de Bochner)

$$(U_t f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dV(\lambda; f) ;$$

en remplaçant  $f$  par  $f + \mu g$  et égalant les coefficients de  $\bar{\mu}$  on obtient la relation (11).

On montre que  $V(\lambda; f, g)$  est une fonctionnelle bornée en faisant voir que

$$|V(\lambda; f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g) ;$$

pour cela, il suffit de vérifier

$$V(\lambda; f) \leq (f, f)$$

ce qui résulte de

$$V(\lambda) \leq p(0) .$$

( On a vu en effet plus haut que  $|A(h)| \leq p(0)$  si  $|h(t)| \leq 1$  )

### 3°- Propriétés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

1) En permutant  $f$  et  $g$  dans (10), on voit que  $E$  est hermitien.

$\beta$ ) et  $\delta$ ) résultent d'une propriété générale : l'opérateur

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\lambda) dE_{\lambda}$$

où  $k(\lambda)$  désigne une fonction (réelle ou complexe) du type h, a une propriété multiplicative : si  $k = k_1 k_2$ , alors

$K = K_1 K_2$  (conséquence du fait que les  $U_t$  forment un groupe.)

On obtient  $\beta$ ) en prenant

$$k(\lambda) = e^{i\lambda t}$$

les opérateurs correspondants

$$(I2) \quad Q_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dE_{\lambda}$$

forment donc un groupe, et comme  $Q_t = U_t$  presque partout, on a  $Q_t = U_t$  pour toutes les valeurs de t.

$\gamma$ ) On a  $Q_0 = U_0 = 1$  ; d'où d'après (I2)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_{\lambda}$$

c'est à dire  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_{\lambda} = 1$

$$\delta) \text{ En prenant } k_1(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda < \lambda_1 \\ 0 & \text{pour } \lambda > \lambda_1 \end{cases}$$

$$k_2(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda < \lambda_2 \\ 0 & \text{pour } \lambda > \lambda_2 \end{cases}$$

on trouve

$$K_1 = E_{\lambda_1} \quad K_2 = E_{\lambda_2}$$

d'où  $E_{\lambda_2} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}$  si  $\lambda_1 \leq \lambda_2$