Eugène Blanc

Les solutions différentielles de Hellinger

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. n° 5, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A7_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-1935

ESPACE DE HILBERT

E.- Les solutions différentielles de Hellinger

Exposé fait par M. Eugène BLANC, le 28 Janvier 1935

Le mémoire de Hellinger "Neue Begründung der Theorie quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen" prétend moins, comme son titre l'indique, apporter des résultats nouveaux qu'un mode nouveau d'exposition, libéré de l'algébrisme initial de Hilbert et des "conditions de convergence compliquées auxquelles il conduit".

Le premier et le deuxième chapitre en sont consacrés respectivement aux spectres discontinu et continu d'une forme quadratique à une infinité de variables et à la recherche pour cette forme d'une représentation qui en mette en évidence tous les invariants orthogonaux. Le résultat fondamental est le suivant :

Toute forme quadratique (hermitique) à une infinité de variables peut être décomposée en trois parties :

1°- Une somme de carrés de formes linéaires (formes hermitiques simples) correspondant au spectre discontinu .

2°- Une somme d'intégrales dont l'élément différentiel est une forme quadratique et dont la variable d'intégration parcourt le spectre continu .

3°- Une forme quadratique qui n'a plus aucun spectre sauf peut-être le point O.

Cette dernière forme se réduit d'ailleurs nécessairement à O. C'est ce que Hellinger démontre dans le dernier chapitre de son mémoire . Bien que ce point ait été démontré par M.Delsarte dans son exposé, il ne me parait pas inutile de donner ici la démonstration de Hellinger, intéressante à plus d'un titre .

Plan de l'exposé

I.- Existence du spectre.

II.- Décomposition d'une forme relativement au spectre ponctuel.- Cas d'une forme complètement continue .

III.- Décomposition relative au spectre continu.- Solutions différentielles .

I.- Existence du spectre

Il s'agit de démontrer le théorème suivant :

Toute forme hermitique non identiquement nulle possède nécessairement un spectre qui ne peut se réduire au seul point $\lambda = 0$.

La démonstration est fondée sur l'étude de l'inverse K, de la forme $(A - \nu E)$ considérée comme fonction analytique de la variable complexe $\nu = \lambda + i\mu$.

Soit d'abord un opérateur hermitique H . La condition nécessaire et suffisante d'existence de H^{-1} est que $\|Hf\|$ reste bornée inférieurement pour $\|f\| = 1$. (Nous dirons pour abréger que H est un opérateur borné inférieurement).

Que cette condition est nécessaire , est à peu près évident si l'on veut que H^{-1} soit un opérateur borné. On pourra démontrer qu'elle est suffisante en employant par exemple la méthode de Hilb. On pose

$$H_1 = \frac{1}{\alpha}\left[E - \alpha(E-H)\right]$$

et l'on montre qu'il est possible de choisir α tel que le développement formel

$$\alpha\left[E + (E-H) + (E-H)^2 + \ldots\right]$$

converge uniformément vers un opérateur qui n'est autre que l'inverse cherché. H^{-1} admet évidemment comme borne, l'inverse de la borne inférieure de H.

Ceci posé, considérons l'opérateur

$$S = (A - \nu E)(A - \bar{\nu} E) = (A - \lambda E)^2 + \mu^2 E$$

L'existence de S^{-1} entraine celle de K, et réciproquement car $(A - \bar{\nu}E)$ n'est autre que l'associé de $(A - \nu E)$.

On aura d'ailleurs :

$$(1) \qquad K = (A - \bar{\nu} E) S^{-1} = (A - \lambda E) S^{-1} + i\mu S^{-1}$$

$$(2) \qquad M_K = \sqrt{M_{S^{-1}}}$$

Or, d'après le théorème précédent S^{-1} existe si S est borné inférieurement. Il est immédiat que si $\mu \neq 0$, on a, pour $\|f\| = 1$, $\|Sf\| > \mu^2$. Donc en tout point du plan complexe non sur l'axe réel K existe, et l'on a

$$M_K \leq \frac{1}{\mu}$$

On voit que lorsqu'on s'approche de l'axe réel, si K présente des singularités, ce seront au plus des singularités polaires.

Les points de l'axe réel seront de deux sortes :

I°- Ceux en lesquels $A-\lambda E$ est borné inférieurement . Ce sont des points réguliers en lesquels K existe .

2°- Ceux pour lesquels $A-\lambda E$ n'est par borné inférieurement En un tel point, K n'existe pas . Ce sont , par définition, les points du spectre . Ils sont tous, on l'a vu, dans l'intervalle (m,M) des bornes de A . (Voir D., p.I4). Cette circonstance peut se produire de deux façons :

a) $A-\lambda E$ s'annule pour un certain élément f de norme unité, de l'espace hilbertien. En d'autres termes, il existe une solution finie et non nulle de l'équation

$$(\mathcal{E}_\lambda) \qquad (A - \lambda E)\, f = 0$$

b) $A-\lambda E$ ne s'annule pour aucun élément de norme unité , Alors on pourra tout au moins, étant donnée une suite évanouissante ε_n , trouver une suite d'éléments f_n tous de norme unité tels que

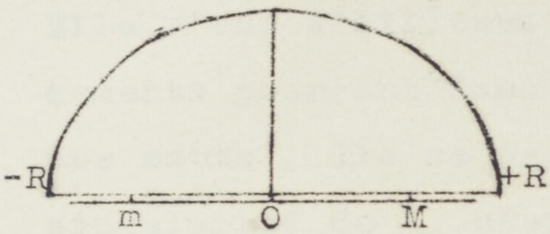
$$\| Af_n - \lambda f_n \| < \varepsilon_n$$

Pour étudier les singularités de K sur l'axe réel, il est tout indiqué d'utiliser l'intégrale de Cauchy . Remarquons que le point à l'infini est régulier et que K admet dans son voisinage le développement

$$K(\nu) = \frac{E}{\nu} - \frac{A}{\nu^2} \frac{A^2}{\nu^3} \ldots\ldots$$

(Ce développement ne diffère pas de celui donné C. p.I9, mais comme on avait pris $E - \lambda A$, au lieu de $A - \nu E$, il faut changer le signe et changer λ en $\frac{1}{\nu}$).

Nous prendrons comme contour d'intégration $\mathcal{C}$ le segment de droite $\mu = C^{te} > 0$, $-R < \lambda < +R$, et le demi-cercle de centre O et de rayon R, situé dans le demi-plan supérieur R est un nombre positif supérieur à $|m|$ et $|M|$.



L'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} K(\nu)\, d\nu$$

est nulle puisqu'il n'y a aucune singularité à l'intérieur. L'intégrale le long du demi-cercle est le demi-résidu du point à l'infini, soit $i\pi E$. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, puis faisant tendre μ vers O, on obtient aisément

$$\lim_{\mu=0} \int_{-R}^{+R} (A - \lambda E)\, S^{-1}\, d\lambda = 0$$

$$\lim_{\mu=0} \int_{-R}^{+R} \mu\, S^{-1}\, d\lambda = \pi E$$

et comme ces résultats ne dépendent pas de R pourvu que $-R \leq m < M \leq +R$, on peut écrire

$$(3) \qquad \lim_{\mu=0} \int_{m}^{M} \mu\, S^{-1}\, d\lambda = \pi E$$

Posons

$$\lim_{\mu=0} \int_{m}^{\lambda} \mu S^{-1}\, d\lambda = \sigma(\lambda)$$

la forme hermitique $\sigma(\lambda; f)$, formée avec cet opérateur est une fonction non-décroissante de λ . Elle ne peut d'ailleurs rester constante dans (m,M) puisque

$$\sigma(M;f) - \sigma(m;f) = \Pi(f,f)$$

Elle n'est d'ailleurs pas forcément continue . Ses accroissements pourront donc se produire, soit continument, soit par sauts . Ils se produiront évidemment au passage d'une singularité de K, c'est à dire d'une valeur spectrale. (S'il s'agit d'une valeur spectrale isolée elle produira sur $\sigma(\lambda)$ une discontinuité égale au demi-résidu relatif à cette valeur On voit donc comment la forme σ pourra servir à déceler ces valeurs singulières et comment le fait qu'elle ne peut rester partout constante, prouve la nécessité de l'existence de ces valeurs .

Il y a plus :

Intégrons sur le segment $\mu = C^{te} > 0, \quad \lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ la relation

$$(A - \nu E)\, K(\nu) = E$$

qui définit l'inverse K , puis faisons tendre μ vers 0. Il viendra après réduction

$$\text{(S)} \qquad A\left[\sigma(\lambda_1;f) - \sigma(\lambda_0;f)\right] - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda \, d\sigma(\lambda;f) = 0$$

quel que soit f et quel que soit l'intervalle (λ_0, λ_1)

Si au point $\lambda_0 \neq 0$ $\sigma(\lambda, f)$ a une discontinuité non identiquement nulle

$$\Delta\sigma(\lambda_o;f) = \sum \Delta\sigma_{pq}(\lambda_o)\, x_p\, \overline{x}_q$$

l'équation (S) devient

$$(S_1) \qquad A\,\Delta\sigma - \lambda_o \Delta\sigma = 0$$

ce qui revient à dire que

$$\sum_\alpha a_{p\alpha}\, \Delta\sigma_{\alpha q} - \lambda_o \Delta_{pq} = 0$$

quels que soient p et q.

Or il y a dans le tableau $\{\Delta\sigma_{\alpha q}\}$ au moins une ligne d'éléments non tous nuls ; cette ligne fournit une solution non nulle de l'équation $(\mathcal{E}\,\lambda_o)$

λ_o appartient au spectre discontinu.

En particulier, si cela a lieu pour $\lambda = 0$, l'équation (S_1) montre que le saut correspondant $\Delta\sigma$ est nul . Ainsi donc , si en aucun point autre que $\lambda = 0$, σ ne subit de discontinuité, il y aura nécessairement au moins un intervalle (λ_o, λ_1) dans lequel σ croit continument . Soit un point de cet intervalle et $\Delta\lambda$ un accroissement très petit de λ ; on aura si petit que soit $\Delta\lambda$:

$$(S_2) \qquad A\left[\sigma(\lambda+\Delta\lambda, f) - \sigma(\lambda, f)\right] - \int_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda} \lambda\, d\sigma(\lambda, f) = 0$$

ce que l'on pourra traduire symboliquement par

$$A\, d_\lambda\sigma(\lambda;f) - \lambda\, d_\lambda\sigma(\lambda;f) = 0$$

σ n'étant pas constante pour la valeur λ , la forme

$$d_\lambda\sigma(\lambda;f) = \sum_{pq} d\,\sigma_{pq}(\lambda)\, x_p\, \overline{x}_q$$

n'est pas identiquement nulle ; elle a au moins une ligne de coefficients non identiquement nulle ; on peut dire que cette ligne fournit dans l'intervalle infiniment petit $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ une solution infiniment petite de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$.

C'est ce qu'on appellera une <u>solution différentielle.</u>

λ appartient alors au spectre continu.

<u>Remarque</u> .- Si l'on fait $\lambda_0 = m$, $\lambda_1 = M$ dans (S), il vient

$$\Pi A = \int_m^M \lambda \, d\,\sigma(\lambda ; f)$$

En composant cette relation avec (D.,p.I6)

$$A = \int_m^M \xi \, d\, A_\xi$$

on voit que la forme $\sigma(\lambda ; f)$ ne se distingue pas essentiellement de la forme A_ξ introduite par Riesz.

II.- <u>Décomposition d'une forme relativement au spectre ponctuel . - Formes hermitiques complètement continues</u>

Si φ_0 est une solution non nulle de

$$(\mathcal{E}_{\lambda_0}) \qquad (A - \lambda_0 E)\, f = 0$$

c'est à dire si

$$A\,\varphi_0 - \lambda\varphi_0 = 0 \qquad \|\varphi_0\| \neq 0$$

la fonctionnelle linéaire $(f.\varphi_0)$ est appelée une <u>forme caractéristique de A relative à λ_0</u>. On peut évidemment, vu l'homogénéité de (S_1) supposer $\|\varphi_0\| = 1$.

La forme hermitique

$$(f.\varphi_0)\,\overline{(f.\varphi_0)}$$

dérive de l'opérateur

$$\Phi = \varphi_0 . (f.\varphi_0)$$

qui est un opérateur de projection puisque $\Phi^2 = \Phi$. (Voir C.p.5 et suivantes). Nous appellerons en abrégé une telle forme, une <u>forme hermitique simple</u>. Elle généralise le carré d'une forme linéaire normée.

On a démontré (D.p.I7) qu'à toute valeur λ_i du spectre ponctuel, on peut attacher une forme

$$B_{\lambda_i} = A(\lambda_i + 0) - A(\lambda_i - 0)$$

telle que

$$B^2_{\lambda_i} = B_{\lambda_i} \quad ; \quad B_{\lambda_i} B_{\lambda_j} = 0 \quad ; \quad (A - \lambda_i E)\, B_{\lambda_i} = 0$$

(cette forme est à un facteur constant près $\Delta\sigma_i$ du précédent paragraphe).

La première relation prouve que B_{λ_i} est un opérateur de projection. Appelons $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$ la multiplicité sur laquelle il projette, c'est à dire l'ensemble des éléments

$$g_i = B_{\lambda_i} f$$

lorsque f parcourt tout l'espace hilbertien.

La deuxième relation montre que $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$ et $\mathfrak{M}_{\lambda_j}$ sont complètement orthogonales .

La troisième relation montre que tout élément g_i est une solution de l'équation

$$(\mathcal{E}_{\lambda_i}) \qquad (A - \lambda_i E)\, g = 0$$

c'est à dire que toute fonctionnelle $(f.g_i)$ est une forme caractéristique de A relative à λ_i.

On peut (B.p5) rapporter $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$ à une famille $\{\gamma_{i,k}\}$ d'éléments orthogonaux et normés pris dans cette variété. L'opérateur B_{λ_i} sera la somme des opérateurs orthogonaux deux à deux (C.p.7 et suivantes)

$$p_{i,k} = \gamma_{i,k}\,(f.\gamma_{i,k})$$

et on aura :

$$B_{\lambda_i} = \sum_k p_{i,k}$$

Ainsi la forme B_{λ_i} est décomposée en une somme de formes hermitiques simples .

Les opérateurs $p_{i,k}$,$p_{j,k}$ relatifs à deux multiplicités $\mathfrak{M}_{\lambda_i}$, $\mathfrak{M}_{\lambda_j}$ sont orthogonaux puisque ces multiplicités sont complètement orthogonales .

Si l'on se reporte (D.p.I6) à la relation

$$A = \int_m^M \lambda\, d\, A_\lambda = \sum_i \lambda_i \left[A(\lambda_i + 0) - A(\lambda_i - 0) \right] + \int_m^M \lambda\, d\, A'_\lambda$$

$$= \sum_i \lambda_i\, B_{\lambda_i} + \int_m^M \lambda\, d\, A'_\lambda$$

dans laquelle A' est une fonction continue de λ , on voit que l'on pourra écrire

$$(D) \qquad A = \sum_i \lambda_i \sum_k p_{i,k} + A'$$

La forme A' n'admet plus de spectre ponctuel en dehors du point O; en ce point elle admet comme forme caractéristique

$$P = \sum_{i,k} p_{i,k}$$

en effet

$$A' \sum p_{i,k} = A' \sum B_{\lambda_i} = \sum (A - \lambda_i E) B_{\lambda_i} = 0$$

On voit du même coup que

$$A P = \left[\sum_{i,k} \lambda_i p_{i,k}\right] \left[\sum_{i,k} p_{i,k}\right] + A'P = \sum_{i,k} \lambda_i p_{i,k}$$

en sorte que l'on peut écrire

$$A = A P + A'$$

La relation (D) donne la décomposition en formes simples de ce qui dans A correspond au spectre ponctuel. Il restera dans le paragraphe suivant à décomposer A' d'une façon analogue.

Il peut arriver d'ailleurs que A' soit nul. C'est en particulier ce qui se passe si A est <u>complètement continue</u>, c'est à dire si l'opérateur A transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente .

Si A est complètement continue, il en est de même de A P et par suite de $A' = A - AP$.

Or, A' pour ne pas être identiquement nul doit avoir, en dehors de $\lambda = 0$, un spectre qui par hypothèse n'est pas ponctuel . Il existe donc une valeur $\lambda_0 \neq 0$ et une suite d'éléments normés f_n , tels que

$$\| A' f_n - \lambda_o f_n \| < \varepsilon_n$$

c'est à dire tels que $A'f_n - \lambda_o f_n$ tende fortement vers zéro. De la suite f_n nous pourrons (puisqu'il existe un principe de Bolzano-Weierstrass pour la convergence faible) extraire une suite faiblement convergente f_{n_k} ; soit f sa limite ; $A' f_{n_k}$ va converger fortement vers A'f, ce qui avec la convergence forte de $A'f_{n_k} - \lambda_o f_{n_k}$ vers zéro, entraine la convergence forte de f_{n_k} vers f. Alors f est aussi normé et l'on a à la limite

$$A'f - \lambda_o f = 0 \qquad \| f \| = 1$$

ce qui est impossible puisque λ_o ne fait pas partie du spectre ponctuel . Donc A' est <u>identiquement nulle</u> .

Ainsi $A = \sum_i \lambda_i \, p_{i,k}$

Les λ_i ne sont d'ailleurs pas quelconques . Les $\gamma_{i,k}$ constituent en effet d'après leur construction une suite orthogonale et normée, ils ont par conséquent 0 comme point d'accumulation faible unique ; alors les $A\gamma_{i,k}$ tendent vers zéro en norme :

$$\| A \gamma_{i,k} \| = \| \lambda_i \gamma_{i,k} \| = \lambda^2_i \longrightarrow 0$$

Les λ_i s'accumulent donc vers 0, ce qui entraine évidemment qu'à chaque λ_i ne correspond qu'un nombre fini de $p_{i,k}$

Il est bien entendu que cette démonstration n'est valable que pour les formes complètement continues <u>hermitiques</u> . Dans le cas général où $A \neq A^x$, la démonstration est beaucoup plus compliquée .

III.- Spectre ~~dis~~continu
Solutions différentielles

Il nous reste à faire l'étude d'une forme telle que A' , forme n'ayant pas de spectre ponctuel en dehors de $\lambda = 0$. C'est donc une forme telle que l'équation

$$(\mathcal{E}_\lambda) \qquad (A - \lambda E) f = 0$$

n'ait pour aucune valeur $\lambda \neq 0$ de solution à norme finie. Hilbert a donné le premier un exemple d'une telle forme ; c'est la forme quadratique

$$X = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + \dots$$

Pour cette forme, l'équation $\mathcal{E}_\lambda$ équivaut au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2} (x_{p-1} + x_{p+1}) - \lambda x_p = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Il est aisé de voir que si $|\lambda| \geq 1$, on a $|x|_p \geq |x_{p-1}|$ en sorte que $\sum x_p^2$ ne peut converger .

Si au contraire, $|\lambda| < 1$, on peut poser simultanément $\lambda = \cos t$, $x_1 = c \sin t$. Il vient alors

$$x_p = c \sin pt$$

Alors $\sum x_p^2 = c^2 \sum \sin^2 pt$ ne converge pas non plus.

Il n'y a donc pas de spectre ponctuel .

Par contre, pour $|\lambda| < 1$

$$\sum_p \left[\int_0^t x_p \, dt \right]^2$$ converge quel que soit t, en sorte que l'on peut considérer si Δt est très petit, les

$$\int_t^{t+\Delta t} x_p \, dt$$ comme satisfaisant sensiblement à l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ dans laquelle $\lambda = \cos t$.

On dira symboliquement que les $x_p dt$ sont les coordonnées d'une solution différentielle df , de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ pour la valeur $\lambda = \text{arc} \cos t$.

On a vu à la fin du paragraphe 1 que pour toute valeur de λ appartenant au spectre, l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ a une solution finie ou une solution différentielle . Les solutions finies correspondant au spectre discontinu, les solutions différentielles correspondront au spectre continu . De plus, les unes comme les autres se trouveront, comme l'a remarqué Delsarte, engendrées par les variations , soient discontinues, soient continues , de la forme génératrice $\sigma(\lambda, x)$ ou ce qui revient au même de la forme A_λ de Riesz. La décomposition d'une forme ayant seulement un spectre discontinu sera analogue à la décomposition faite plus haut, en formes hermitiques simples, seulement l'échelle des λ étant ici continue, la sommation dénombrable par rapport aux i, sera remplacée par une sommation continue , c'est à dire par une intégration par rapport à λ . La sommation par rapport à l'indice k restera au contraire dénombrable.

Soit défini pour tout λ un élément $\varphi(\lambda)$ tel que pour des valeurs quelconques λ_0 et λ_1, on ait

$$A\left[\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_0)\right] - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda \, d\varphi(\lambda) = 0$$

Nous dirons symboliquement que, quel que soit λ, $d\varphi$ satisfait à l'équation

$$(\mathcal{E}') \qquad A\, d\varphi(\lambda) - \lambda\, d\varphi(\lambda) = 0$$

Nous raisonnerons pour faire plus vite et plus intuitif sur les différentielles. Il va sans dire que ces raisonnements peuvent être rendus rigoureux (Voir Hellinger, p.240-258).

On a, en premier lieu, si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs quelconques

$$A\, d\varphi(\lambda_1) - \lambda_1\, d\varphi(\lambda_1) = 0$$

$$A\, d\varphi(\lambda_2) - \lambda_2\, d\varphi(\lambda_2) = 0$$

En multipliant scalairement la première équation par $d\varphi(\lambda_2)$, et la deuxième par $d\varphi(\lambda_1)$, en retranchant membre à membre et tenant compte de ce que $A = A^{\times}$, il vient

$$\left[d\varphi(\lambda_1) - d\varphi(\lambda_2)\right] = 0$$

Soient maintenant deux intervalles I_1 et I_2. En les décomposant en intervalles très petits, puis passant à la limite (comme pour définir une intégrale) il vient :

$$(\Delta_1 \varphi . \Delta_2 \varphi) = \lim. \sum_i \left[\delta_i \varphi . \delta_i \varphi\right]$$

Δ_1 et Δ_2 , δ_i ayant des significations évidentes, et la sommation étant effectuée sur ceux des intervalles partiels qui appartiennent à la fois à I_1 et I_2. Ce n'est pas diminuer la généralité que de supposer $\varphi(0) = 0$, φ n'étant définie qu'à une constante additive près . Alors si $\mu \geq \lambda$

$$\left[\varphi(\lambda).\varphi(\mu)\right] = \left[\Delta_{0,\lambda}\varphi(\lambda).\ \Delta_{0,\mu}\varphi(\mu)\right] = \left[\Delta_{0,\lambda}\varphi(\lambda).\ \Delta_{0,\lambda}\varphi(\lambda)\right]$$

puisque les intervalles $0,\lambda$ et λ,μ n'ont pas de partie commune . Ainsi

$$\left[\varphi(\lambda).\varphi(\mu)\right] = \left[\varphi(\lambda).\ \varphi(\lambda)\right] = \Phi_0(\lambda) \quad \text{si } \mu \geq \lambda$$

On en tire aisément

$$\left[\Delta_1 \varphi(\lambda).\ \Delta_2 \varphi(\lambda)\right] = \Delta_{1.2} \Phi_0(\lambda)$$

où $\Delta_{1.2}$ est l'accroissement subi par Φ_0 dans la partie commune à I_1 et I_2.

En particulier

$$\left[\Delta\varphi(\lambda).\ \Delta\varphi(\lambda)\right] = \Delta\,\Phi_0(\lambda)$$

les accroissements étant tous pris dans le même intervalle.

Considérons alors la forme linéaire

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta\Phi_0(\lambda)}}\,\Delta\,\varphi(\lambda, f) = \left[\frac{\Delta\varphi(\lambda)}{\sqrt{\Delta\Phi_0(\lambda)}}\ .\ f\right]$$

cette forme est normée d'après ce qui précède .

Si maintenant on divise l'intervalle (m,M) en intervalles partiels très petits I_i , les formes hermitiques correspondantes

$$\frac{\Delta_i \varphi(\lambda\,;f)}{\sqrt{\Delta_i \varphi_o(\lambda)}}$$

forment un système orthogonal et normé pour lequel, d'après l'inégalité de Bessel

$$\sum_i \frac{\left[\Delta_i \varphi(\lambda\,;f)\,.\,\Delta_i \varphi(\lambda\,;f)\right]}{\Delta_i \varphi_o(\lambda)} \leq E$$

Si l'on passe à la limite comme pour une intégration, on se trouve dans les conditions où le premier membre tend vers une intégrale de Hellinger (Voir A.p.I7)

$$\int_m^M \frac{\left[d\,\varphi(\lambda\,;f).d\varphi(\lambda\,,f)\right]}{d\,\varphi_o(\lambda)}$$

Si l'on retranche de A' l'intégrale

$$\int_m^M \lambda\,\frac{\left[d\,\varphi(\lambda\,;f).d\,\varphi(\lambda\,;f)\right]}{d\,\varphi_o(\lambda)}$$

on obtient une nouvelle forme pour laquelle $\phi(\lambda)$ n'engendre plus de solutions différentielles. En recommençant on mettra finalement A' sous la forme

$$A' = A'' + \sum_{k'}\int_m^M \lambda\,\frac{\left[d\varphi_{k'}(\lambda\,;f)\;d\phi_{k'}(\lambda\,;f)\right]}{d\phi_o^{(k')}(\lambda)}$$

où A" ne possède plus aucun spectre sauf peut-être $\lambda = 0$. Cette forme est nécessairement indentiquement nulle. Ainsi toute forme hermitique A peut s'écrire

$$A = \sum_i \lambda_i \sum_k p_{i,k} + \sum_{k'} \int_m^M \lambda \frac{\left[d\,\varphi_{k'}(\lambda\,;f).d\varphi_{k'}(\lambda\,;f)\right]}{d\varphi_o^{(k)}(\lambda)}$$

l'analogie entre les deux sortes de termes obtenus étant d'ailleurs assez claire pour qu'il soit inutile d'y insister plus longuement .

BIBLIOGRAPHIE

Hellinger.- Neue Begründung etc... Crelle t.136-1908

Riesz.- Equations linéaires à une infinité d'inconnues

Et les quatre exposés A,B,C,D du Séminaire .

Voir aussi : Hellinger.- Sitzungsber.d.Phys.Med.Soc.in Erlangen, t.40 (1908) p.84.
