ANDRÉ WEIL

Formes différentielles extérieure

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. nº 1, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A1_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-37

LES TRAVAUX DE Monsieur ELIE CARTAN

FORMES DIFFERENTIELLES EXTERIEURES

Exposé fait par M. André WEIL, le lundi 16 Novembre 1936

Exemplaire n° 3

Le calcul des formes différentielles extérieures a pris à l'époque moderne une importance considérable, grâce surtout aux travaux de M.E.Cartan où il joue un rôle essentiel . Ce calcul présente deux aspects, l'un purement algébrique, c'est le calcul de Grassmann; l'autre aspect est proprement différentiel, et sous cette forme, ce calcul est principalement l'oeuvre de M.Cartan . Nous allons examiner successivement ces deux calculs .

1.- <u>Calcul de Grassmann</u>

Il a été découvert par Grassmann qui l'a exposé dans son "Ausdehnungslehre", où il en a donné toutes sortes d'applications géométriques . Soit k un corps (le corps des constantes) et soit k^n un espace vectoriel à n dimensions sur k; en choisissant dans k^n une base de n vecteurs indépendants e_i, k^n apparait comme l'ensemble des vecteurs

$$x = \sum_1^n x_i \, e_i$$, les x_i étant dans k .

On appellera <u>algèbre extérieure</u> ou <u>algèbre de Grassmann</u> sur k^n, un système hypercomplexe sur k , $G = G(k^n)$ avec les propriétés suivantes :

1°- G contient un élément unité (désigné par 1) et tous les éléments de k^n ; et G est engendré par ces éléments .

2°- Si x, y, sont deux éléments de k^n, leur produit dans G obéit à la loi : $yx = -xy$.

(Si k n'est pas de caractéristique 2, il en résulte que :

3°- quel que soit x dans k^n , $xx = 0$; si k est de caractéristique 2, on ajoute 3°- comme axiome).

4°- Les éléments de G ne satisfont pas à d'autres relations qu'à celles qui se déduisent de 2°- et 3°- .

La multiplication dans G porte le nom de multiplication extérieure ; chaque fois que ce sera utile pour éviter des confusions, on la désignera par le signe $\wedge$.

En vertu de 1°- , tout élément de G est une combinaison linéaire (avec coefficients dans k) de termes e_{i_1}, e_{i_2}, ... e_{i_m} ; en vertu de 2°- et 3°- , deux termes de cette forme sont égaux au signe près s'ils se déduisent l'un de l'autre par une permutation des facteurs (ils sont égaux si la permutation est paire, opposés si elle est impaire) ; et un tel terme s'annule s'il contient deux facteurs identiques ; en particulier, le degré d'un tel terme étant le nombre de ses facteurs e_i , tout terme de degré $>$ n est nul, et il n'y a, au signe près , qu'un seul terme de degré n, à savoir $e_1 e_2 \ldots e_n$. Il en résulte que G possède une base formée de 1 et des éléments $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_m}$ tels que

$1 \leq m \leq n$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$. la loi de multiplication de ces éléments de base étant parfaitement déterminée par 2°- et 3°-; et par conséquent, $G(k^n)$ existe et est entièrement déterminée . Bien entendu, puisque la définition de $g(k^n)$ ne fait pas intervenir les éléments de base e_i , $G(k^n)$ est attaché à l'espace k^n d'une manière invariante ; cette algèbre est donc particulièrement bien adaptée à l'étude de la géométrie affine dans k^n .

Considérons l'effet d'un changement de base $e_i = \sum c_{ij} e_j$ sur les coefficients d'un élément donné de G , $A = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_m} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_m}$. Evidemment chaque terme se transformera en somme de termes de même degré, de sorte qu'il suffit de considérer le cas où tous les termes de A ont même degré m : dans ce cas A sera appelé une forme de degré m. (Observons que si A,B sont des formes de degré respectif p,q , leur produit satisfait à la loi $AB=(-1)^{pq}.BA$ car il en est ainsi lorsque A et B se réduisent à un seul terme , donc aussi, en vertu de la distributivité, dans le cas général). Evidemment toute forme A de degré m pourra être écrite sous la forme $A = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_m} e_{i_2} \ldots e_{i_m}$, la sommation étant étendue à <u>toutes</u> les combinaisons de m indices distincts i_1, i_2 , ..., i_m , et les coefficients a étant symétriques gauches (on dit aussi antisymétriques) par rapport à ces indices, c'est-à-dire qu'une permutation paire sur les m indices ne change pas a, et qu'une permutation impaire remplace a par -a . Alors, en faisant la substitution $e_i = \sum c_{ij} e_j$, on voit que les coefficients a se transforment comme des tenseurs covariants antisymétriques à m indices (les e_i sont considérés comme des vecteurs contravariants) Il y a donc identité entre les formes de degré m dans G et les tenseurs covariants antisymétriques à m indices dans k^n.

Soit V^p une variété à p dimensions dans k^n : l'algèbre $G(V^p)$ est évidemment isomorphe à la sous-algèbre de $G(k^n)$ qui est engendrée par 1 et par les éléments de V^p ; en particulier cette algèbre contient, à un facteur constant (scalaire)près, un élément et un seul de degré p, à savoir $v_1 v_2 \ldots v_p$, si les v_i sont un système de vecteurs de base de V^p ; en particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que les v_i soient indépendants , est que ce produit ne soit pas nul . Si on passe à d'autres vecteurs $w_i = \sum c_{ij} v_j$ l'on aura $w_1 w_2 \ldots w_p = c . v_1 v_2 \ldots v_p$, et la constante c est le déterminant des c_{ij} (on peut le vérifier , ou, ce qui vaut mieux, prendre ceci comme définition des déterminants).

Ainsi, à toute variété V^p est attachée une forme de degré p, bien définie à un facteur scalaire près, et qui peut s'exprimer comme produit de p formes de degré 1 : une telle forme s'appellera une forme complètement décomposable de degré p ; les coefficients de cette forme, exprimés au moyen des éléments de base $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p}$, forment un système de coordonnées homogènes pour V^p (pour le cas $n = 4$, $p=2$ ou, ce qui revient au même, pour le cas des droites dans l'espace projectif à trois dimensions, on retrouve ainsi les coordonnées dites plückériennes) ; ils satisfont à certaines relations quadratiques qui ont été données par Grassmann.

Soient V^p, W^q deux variétés, et A, B les formes associées, de degrés respectifs p, q ; on pourra exprimer au moyen de A, B, les propriétés géométriques de V, W. Par exemple, le fait que V contienne W s'exprimera par le fait que A soit multiple de B ; A et B auront une intersection non réduite à 0 si $AB = 0$; si au contraire, l'intersection de V, W se réduit à 0, la forme AB correspond à la variété à $p+q$ dimensions qui contient V et W ; etc ....

2.- Formes associées.

A toute forme de degré p, A, on associe (d'après Grassmann) une forme A^* de degré $n-p$ par la règle suivante: Si d'abord, A se réduit à un terme $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p}$, on lui associe une forme $A^* = \pm e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_{n-p}}$, telle que

$AA^{*} = e_1 e_2 \ldots . e_n$; il est facile de voir que A^{*} est déterminée d'une manière unique . Et l'on convient que la correspondance entre A et A^{*} est linéaire : étant définie pour la base de G, elle est donc définie pour tous les éléments de G .

Il est naturel, puisque la définition de A^{*} fait intervenir la base e_i , que cette définition ne soit pas invariante par rapport à un changement de base . Il est facile de trouver le groupe qui laisse invariante la correspondance entre A et A^{*} . Tout d'abord, si $A = 1$, $A^{*} = e_1 e_2 \ldots e_n$ donc le groupe est unimodulaire . De plus, si $x = \sum x_i e_i$, on a $xx^{*} = (\sum x_i^2) e_1 e_2 \ldots e_n$, donc le groupe laisse invariante la forme $\sum x_i^2$. Réciproquement, on vérifie par un calcul facile que toute substitution orthogonale de déterminant 1, laisse invariante la correspondance entre A et A^{*} . La notion de forme associée permet donc d'exprimer les notions de la géométrie euclidienne . En particulier, soit V^p une variété à p dimensions ; soit A la forme correspondante de degré p; par une substitution orthogonale qui amène les p premiers vecteurs coordonnés à être dans V^p , on voit que A^{*} n'est pas autre chose que la forme correspondant à la variété V^{n-p} orthogonale à V^p ; ce qui montre également que la forme associée à une forme complètement décomposable est complètement décomposable .

La correspondance entre forme et forme associée prend un autre aspect si on introduit l'<u>espace dual</u> de k^n. c'est-à-dire l'espace k^n_* des formes linéaires dans k^n ; cette dualité s'exprime par le fait qu'à tout élément u de k^n_* et à tout élément x de k^n correspond un élément de k . (u,x) , à savoir la valeur de la forme u au point x. Soit G^* l'algèbre extérieure construite sur k^n_* ; on trouve que l'ensemble des formes de degré p dans G^* peut être considéré comme l'espace dual de l'ensemble des formes de degré p dans G (par exemple, à toute forme décomposable $U = u_1 u_2 \dots u_p$ dans G^* et à toute forme décomposable $X = x_1 x_2 \dots x_p$ dans G, on fera correspondre (U,X) égal au déterminant des (u_i, x_j) ; et cette fonction bilinéaire (U,X) sera étendue par linéarité à toutes les formes de degré p dans G et G^*) .

Notons que, de même que les formes de degré p dans G ne sont pas autre chose que les tenseurs covariants antisymétriques à p indices dans k^n , les formes de degré p dans G^* ne sont pas autre chose que les tenseurs contravariants antisymétriques à p indices ; et (U,X) n'est pas autre chose que le "produit contracté" d'un tenseur covariant et d'un tenseur contravariant (tous deux antisymétriques) à p indices .

Mais, d'autre part, il y a également dualité, dans G, entre les formes A de degré p et les formes B de degré n-p, cette dualité s'exprimant par l'existence d'une fonction bilinéaire (A,B) définie par $AB = (A,B).e_1e_2\ldots.e_n$, invariante par le groupe des <u>substitutions unimodulaires</u> sur les e_i . On en conclut qu'on peut établir, d'une manière invariante par rapport à ce même groupe, une correspondance entre les formes de degré p dans G^* et les formes de degré n-p dans G . Si maintenant, on établit d'une manière arbitraire une correspondance (ou pour mieux dire un isomorphisme) entre k^n et l'espace dual k^n_* (ce qui se fera par le moyen d'une forme bilinéaire $B(x,y)$, de déterminant non nul, qu'on se donnera dans k^n, et qui pourra par exemple être déduite d'une forme quadratique non dégénérée), on obtiendra une correspondance entre formes de degré p et formes de degré n-p dans G, invariante par un certain groupe de substitutions.

De la correspondance entre formes et formes associées Grassmann déduit une opération, dans G, qu'il appelle le <u>produit régressif</u> . Soient A, B deux formes de degrés p, q; si $p+q > n$, on a $AB = 0$. Mais considérons la forme $(A^* B^*)^*$: elle est de degré $p+q-n$; c'est elle que Grassmann appelle le produit régressif . Pour $p+q = n$, le produit proprement dit et le produit régressif existent tous deux, et sont alors liés par une relation très simple : si $AB = c.e_1e_2\ldots.e_n$, c étant un élément de k, le produit régressif est c. En général, les considérations ci-dessus sur l'espace dual (ou une vérification directe) montrent que l'association entre deux formes et leur produit régressif est invariante par rapport au groupe des substitutions uni-modulaires. Ceci permet de prévoir que le produit régressif permet d'exprimer certains faits géométriques, en dualité avec ceux qu'on exprime au moyen du produit extérieur. Par exemple, si A et B sont les formes correspondant à deux variétés V^p, W^q, le produit régressif s'annulera si V, W sont contenues dans une même variété à moins de n dimensions et, s'il n'en est pas ainsi, ce produit sera la forme correspondant à l'intersection de V et W.

3.- Formes différentielles

Sur une variété "différentiable" à n dimensions, on considérera, en chaque point, l'espace vectoriel à n dimensions des différentielles en ce point. C'est un espace ayant pour base, si l'on prend des coordonnées locales x_1, $x_2, \ldots, x_n$ au voisinage d'un point de la variété, les différentielles dx_i des coordonnées. Sur cet espace, on construit l'algèbre extérieure G : les formes de G sont les formes différentielles extérieures sur la variété. Il y a, ici encore, identité entre ces formes et les tenseurs covariants antisymétriques sur la variété. Une telle forme s'écrira: $A(x) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_p}$. Pour éviter des difficultés très sérieuses, on supposera les coefficients

$a(x)$ deux fois continument différentiables .

Tout ce qui a été fait plus haut subsiste ici : Tout d'abord, la notion de produit extérieur ; mais aussi la notion de forme associée, dès qu'on s'est donné une forme quadratique différentielle non dégénérée (c'est-à-dire un ds^2 , mais qui n'a pas besoin d'être défini positif ; par exemple, en théorie électromagnétique (équations de Maxwell) intervient la notion de formes associées par rapport à la forme quadratique bien connue $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$).

Ce qui fait la nouveauté du calcul des formes différentielles extérieures par rapport au calcul de Grassmann, c'est l'opération de dérivation extérieure, introduite en analyse (semble-t-il) par M.Cartan . Par définition, si l'on a :

$$A = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_p} \; dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_p}$$

les a étant continument différentiables, on posera :

$$dA = \sum da_{i_1 i_2 \dots i_p} \; dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_p}$$

da désignant la différentielle de a (qui est une forme de degré 1 de l'algèbre G). Si A est une forme de degré p, dA en est une de degré p+1 . Cette opération satisfait aux lois suivantes :

1°- Si A est une forme de degré 0, c'est-à-dire une fonction $f(x)$ (continument différentiable). dA n'est autre que la différentielle ordinaire df (forme de degré 1).

2°- Si A, B sont des formes de degrés respectifs p, q on a :

$$d(AB) = dA.B + (-1)^p A.dB$$

comme on le vérifie immédiatement (et trivialement) à partir de la définition .

3°- Quel que soit A, on a $d(dA) = 0$. Ce théorème qu'on vérifie facilement, est au fond équivalent au théorème $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, qui est un cas particulier (celui où A est de degré 0).

Réciproquement, ces trois propriétés, jointes à la linéarité ($d(A+B) = dA + dB$) suffisent à déterminer entièrement l'opération d, comme on le voit immédiatement ; par conséquent, cette opération possède une signification invariante (indépendante du choix des coordonnées).
C'est naturellement, ce qui en fait l'importance .
Dans le cas où A est une forme de degré 1 (ou, comme on dit parfois aussi, une "forme de Pfaff", ou "expression de Pfaff") on connaissait depuis longtemps le "covariant bilinéaire" associé à la forme, qui n'est autre que la forme bilinéaire formée avec les coefficients de dA : ce covariant joue un

grand rôle dans les travaux de Frobenius . D'autre part, Poincaré, dans son mémoire "Sur les résidus des intégrales doubles", avait écrit les équations qui expriment $dA = 0$; mais l'opération générale que nous désignons par d apparait pour la première fois dans les travaux de M. Cartan (où elle est généralement notée A' et non dA) . Il convient de noter que cette opération n'est autre que la dérivation tensorielle , pour les tenseurs covariants antisymétriques: on sait, en effet, que l'opération de dérivation tensorielle qui en général fait intervenir les g_{ik} de la forme quadratique fondamentale, en est indépendante dans le cas particulier dont il s'agit .

4.- Aspect intégral.

On peut se demander, réciproquement, étant donné une forme A, s'il y a une forme B telle que $dB = A$. D'après ce qui précède, il faut, pour qu'il en soit ainsi, que $dA = 0$. Réciproquement, si $dA= 0$, on vérifie sans aucune difficulté l'existence de B (qui s'obtiendra par des quadratures) dans le voisinage d'un point donné : on pourra par exemple, procéder par récurrence suivant le nombre des variables (Cf. aussi les conférences ultérieures de H.Cartan, sur les systèmes de Pfaff). On en déduit immédiatement que si $dA = 0$, A peut être mis sous la forme dB , si l'on

<u>se trouve sur une variété simplement connexe</u> (homéomorphe à l'espace à n dimensions).

Ce résultat est étroitement lié au théorème de Stokes dû, lui aussi, à M.Cartan. Soit A une forme de degré p ; soit V^p une variété à p dimensions, c'est-à-dire une somme (à coefficients entiers, ou même plus généralement à coefficients dans le corps des nombres réels ou complexes) d'images continues, continument différentiables, de simplexes euclidiens alors, l'intégrale de A sur V^p possède une valeur bien définie . Si l'on désigne par $\dot{V}^p$ la <u>frontière</u> d'une variété V^p (c'est-à-dire la somme algébrique des frontières des simplexes composant V^p) le théorème de Stokes s'écrit :

$$\int_{\dot{V}^{p+1}} A = \pm \int_{V^{p+1}} dA$$

A étant une forme quelconque de degré p, V^{p+1} une variété à p+1 dimensions ; le signe dépend de p et des conventions faites pour l'orientation de la frontière d'une variété .
Il est clair que le théorème sera démontré si on le démontre pour un simplexe euclidien ; et dans ce cas il ne présente pas de difficulté .

5.- <u>Extension possible de la théorie</u>.

De Rham, dans sa thèse et ses travaux ultérieurs, a mis en évidence une analogie très profonde entre le calcul des formes différentielles extérieures et celui des variétés en topologie combinatoire . Au produit des formes correspond l'intersection des variétés , à la différentielle extérieure correspond la frontière : et les règles formelles sur ces opérations sont exactement les mêmes si on fait correspondre aux formes de degré p dans un espace à n dimensions, les variétés à n-p dimensions .

Lorsque p = n, on a , d'une part, les formes de degré n, qui ne sont pas autre chose que les éléments de volume, c'est-à-dire les distributions de masse "régulières" (possédant une densité continue) dans l'espace étudié ; d'autre part, les variétés à 0 dimensions, au sens de la topologie combinatoire, sont les sommes de points en nombre fini, à coefficients réels, c'est-à-dire, les distributions de masse concentrées en un nombre fini de points . On connait la notion qui embrasse ces deux-là comme cas particuliers : c'est la notion de mesure de Radon , (sur la droite c'est la notion d'élément d'intégrale de Stieljes).

On peut conjecturer qu'il y a de même, dans le cas général, une notion embrassant à la fois celle de forme à p dimensions et celle de variété à n-p dimensions . Cette notion n'a pas encore été trouvée ; mais du moins, l'analogie entre formes et variétés a déjà conduit à des résultats remarquables ; ceux-ci sont esquissés d'une manière très claire dans la conférence de de Rham , citée ci-dessous, et à laquelle je renvoie pour cette question .

BIBLIOGRAPHIE

E.CARTAN - Leçons sur les invariants intégraux (Paris , Hermann, 1922)

E.KAHLER - Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen (Hamburger Mathem.Einzelschriften, 1934)

G.de RHAM , Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples (Enseignement Mathématique t.XXXV (1936) p.213).
