SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

HENRI CARTAN

Systèmes de Pfaff

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. n° 2, p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A2_0>

IV. - B. -0

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-37

LES TRAVAUX DE M.ELIE CARTAN

SYSTEMES de PFAFF

Exposé fait par M.Henri CARTAN, le lundi 30 Novembre 1936

Exemplaire n° 3

On appelle système de Pfaff, tout système obtenu en égalant à zéro un nombre fini de formes différentielles à <u>r</u> variables, $x_1, \ldots, x_r$ (y compris des formes de degré zéro c'est-à-dire des fonctions des variables). La théorie de M. Cartan, qui a été développée dans le cas où les formes données sont de degré <u>zéro</u> ou <u>un</u> (systèmes de Pfaff proprement dits) s'étend aux formes de degré quelconque ; nous verrons d'ailleurs que l'intégration d'un système quelconque peut toujours se ramener à celle d'un système de Pfaff proprement dit (Voir IIème partie de cet exposé).

Les formes différentielles étant supposées définies au voisinage d'un point $(x) = (x)^0$, on se propose de déterminer, au voisinage de ce point, toutes les variétés "intégrales", c'est-à-dire les variétés à 1,2,...,p,... dimensions sur lesquelles les formes données s'annulent (voir plus loin les définitions précises). La détermination de chaque variété intégrale se fait par résolutions successives de problèmes de <u>Cauchy-Kovalewski</u> . Rappelons que le problème de Cauchy-Kovalewski consiste , étant donné un système d'équations

$$(1) \qquad \frac{\partial z_i}{\partial y} = f_i \left(x_\alpha , y , z_j , \frac{\partial z_j}{\partial x_\alpha} \right)$$

à déterminer les fonctions z_i des variables x_α et y qui, pour $y=0$, se réduisent à des fonctions données des variables x_α . ~~(En fait, dans les systèmes que nous aurons à envisager, les~~ $\cancel{f_i}$ ~~seront linéaires par rapport aux~~ $\cancel{\frac{\partial z_i}{\partial x_\alpha}}$ ~~)~~. Or l'existence et l'unicité locales de la solution sont démontrées dans le cas où toutes les données sont analytiques , et elles peuvent se trouver en défaut dans le cas contraire . Par exemple , le système

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = - \frac{\partial z_2}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

n'admet pas de solution lorsque les fonctions données $z_1(x,0)$, $z_2(x,0)$ ne sont pas analytiques .

Nous supposerons donc dorénavant que toutes les fonctions qui interviennent sont analytiques . La théorie qui va être exposée pourra nénmoins s'appliquer, ne serait-ce qu'en partie, à certains systèmes de Pfaff particuliers, non analytiques, ceux dont l'intégration se ramène à des résolutions successives de systèmes différentiels ordinaires (fonctions f_i indépendantes des $\frac{\partial z_i}{\partial x_\alpha}$). Par exemple , la théorie des systèmes complètement intégrables vaut lorsqu'on suppose simplement que les formes données ont leurs coefficients continûment différentiables.

I.- Variétés analytiques.

Commençons par étudier le cas d'un système de Pfaff dont toutes les formes sont de degré zéro.

Soit donc un nombre quelconque de fonctions $f_i(x_1 .. x_r)$ ... holomorphes au voisinage d'un point que nous prenons comme origine $x=0$. Le système d'équations

$$(2) \qquad f_i(x) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

définit, au voisinage de l'origine, un ensemble de points x que nous nous proposons d'étudier (Cf. le livre d'Osgood et le mémoire de Rückert cités dans la bibliographie).

Nous laissons de côté le cas où le déterminant fonctionnel des f_i est non nul pour $x=0$ (c'est-à-dire $df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_p \neq 0$) ; les équations (2) définissent alors une variété à $r-p$ dimensions, et on obtient une représentation paramétrique propre de cette variété en prenant comme paramètres $r-p$ des variables <u>x</u> convenablement choisies .

Dans le cas général, les $f_i(x)$ définissent un idéal $\mathfrak{J}$ dans l'anneau de toutes les fonctions holomorphes à l'origine . Appelons <u>variété de l'idéal $\mathfrak{J}$</u>, l'ensemble des zéros (voisins de $x=0$) communs à toutes les fonctions de $\mathfrak{J}$. Plus généralement, on pourrait considérer la variété d'un idéal quelconque, mais la généralisation n'est qu'apparente car le théorème de la <u>base finie</u> est vrai dans l'anneau des fonctions holomorphes à l'origine .

Deux idéaux distincts peuvent donner naissance à la

même variété (par exemple $\mathcal{J}$ et une puissance de $\mathcal{J}$).
Mais, parmi tous les idéaux qui donnent naissance à une variété V, il en est un qui contient tous les autres : l'idéal de <u>toutes</u> les fonctions (holomorphes à l'origine) qui s'annulent sur V. On l'appelle <u>l'idéal de la variété V</u>.

Une variété est dite <u>irréductible</u> si l'idéal de cette variété est <u>premier</u>.
Propriété caractéristique d'une variété V irréductible : si le produit de deux fonctions s'annule identiquement sur V, l'un au moins des facteurs s'annule identiquement sur V.

Comme conséquence du "Nullstellensatz" de Hilbert, on a la proposition suivante : si $\mathcal{P}$ est un idéal premier, toute fonction qui s'annule sur la variété de $\mathcal{P}$ appartient à $\mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}$ est l'idéal de la variété de $\mathcal{P}$, et cette variété est irréductible . Il y a ainsi correspondance biunivoque entre les variétés irréductibles et les idéaux premiers .

Si maintenant, on applique à un idéal quelconque le théorème de décomposition en idéaux "primaires", on arrive facilement au résultat suivant : <u>la variété d'un idéal quelconque se compose de la réunion d'un nombre fini de variétés irréductibles</u> .

<u>Forme canonique des équations d'une variété irréductible</u>

On démontre qu'on peut, en effectuant sur les variables une substitution linéaire convenable, se ramener à des équations de la forme

$$(3)\quad P(x_{k+1};x_1,\ldots,x_k)=0 \qquad \frac{\partial P}{\partial x_{k+1}}x_i - Q_i = 0$$

$$(i=k+2,\ldots,r)$$

P et Q_i désignent des polynomes en x_{k+1}, du "type de Weierstrass" (le coefficient de la plus haute puissance est l'unité, les autres coefficients sont des fonctions holomorphes de $x_1,\ldots,x_k$, nulles à l'origine). En outre, le polynome P est <u>irréductible</u> (il ne peut pas se mettre sous la forme du produit de deux polynomes de Weierstrass de degrés moindres). L'entier k est le même pour toutes les représentations canoniques ; il définit la <u>dimension</u> de la variété. On démontre :

<u>Toute sous-variété d'une variété irréductible a un nombre moindre de dimensions</u>. (ou plutôt, il en est ainsi pour chaque composante irréductible de la sous-variété).

Voici deux conséquences importantes de cette proposition :

1°- Si f(x), holomorphe à l'origine, s'annule en tous les points de V (irréductible) suffisamment voisins d'un point $(x)^0$ de V, f(x) s'annule identiquement sur V ;

2°- Les variables (x) étant partagées en deux groupes (y) et

(z) , et la variété V étant irréductible à l'origine, $y=z=0$, la section de V par $y=y^0$ quelconque, se compose , dans l'espace (z), de l'ensemble des points-limites des sections voisines $y=y^1$; il n'y a exception que si, y^0 étant nul, la variété V appartient tout entière à la variété $y=0$.

(Démonstration : tout d'abord, les points-limites des sections $y=y^1$ appartiennent à la section $y=y^0$. Réciproquement tout point z^0 de la section $y=y^0$ est un point-limite de sections voisines ; sinon, les équations $y=y^0$ définiraient une sous-variété de V qui aurait en commun avec V tous les points voisins de y^0 , z^0 , et qui devrait donc être identique à V).

Quelques erreurs à éviter .

1°- les équations (3) deviennent illusoires aux points où l'on a

$$(4) \qquad P = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial x_{k+1}} = 0$$

en un tel point, le quotient $Q_1 : \dfrac{\partial P}{\partial x_{k+1}}$ prend la forme $\dfrac{0}{0}$; mais il tend vers une limite finie bien déterminée lorsque le point $x_1, \ldots\ldots x_{k+1}$ varie en satisfaisant à $P = 0$. Les points qui satisfont à (4) ne sont pas nécessairement des points singuliers de la variété ; la singularité peut disparaitre avec un autre mode de représentation .

2°- Un idéal premier de dimension k n'a pas toujours une <u>base</u> formée de $(r-k)$ fonctions seulement .

3°- une variété irréductible à l'origine n'admet pas toujours de représentation paramétrique au voisinage de ce point .

4°- une variété irréductible à l'origine peut ne l'être pas en des points arbitrairement voisins (par exemple, une courbe algébrique C indécomposable définit, en coordonnées homogènes, un cône algébrique Γ dans l'espace à trois dimensions , irréductible à l origine ; mais un point double de C à tangentes distinctes définit une génératrice de Γ , et au voisinage des points de cette génératrice, Γ n'est pas irréductible).

<u>Variétés homogènes</u>

Partageons les variables en deux groupes , (x) et (u) . Une variété V est homogène par rapport aux <u>u</u> si on peut la définir en égalant à zéro des polynomes homogènes en <u>u</u> , à coefficients holomorphes en <u>x</u> .

<u>Théorème I</u> .- <u>Toutes les composantes irréductibles (à l'origine) d'une variété homogène, sont homogènes</u> .

En effet, la transformation

$$(5) \qquad x \longrightarrow x , \qquad u \longrightarrow u\, e^{it} \qquad (t \text{ réel})$$

transforme l'ensemble de ces variétés irréductibles en lui-même; puisqu'elles sont en nombre fini, et que les transformations (4) forment un groupe continu ~~d'équations~~, elles sont individuellement conservées .

Soit alors V l'une des composantes irréductibles d'équations

$$f_i\ (x,u) = 0$$

Les fonctions $f_i(x,ue^{it})$ s'annulent sur V ; il en est de même de

$$P_{in}(x,u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_i(x,ue^{it})\ e^{-int}\ dt$$

Or P_{in} est un polynome homogène de degré <u>n</u> en <u>u</u> , et l'on a le développement convergent

$$f_i(x,u) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{in}\ (x,u)$$

Il en résulte que les équations

$$P_{in}\ (x,u) = 0$$

définissent la variété V ; et d'après le théorème de la base finie, elles se réduisent à un nombre fini d'entre elles . C.Q.F.D.

<u>Application</u>

Soient deux groupes d'équations

(6) $\varphi(x) = 0$, (6') $f(x,u) = 0$;

supposons que (6) définisse, dans l'espace (x) , une variété V_o irréductible au point $x=0$, et que les équations (6') soient <u>linéaires et homogènes</u> par rapport aux <u>u</u> . En chaque point $\underline{x}$ de V_o . le rang du système (6') a une valeur $s(x)$, et l'entier $s(x)$ est le même (soit s) en tous les points de V_o. sauf peut-être aux points de sous-variétés de V_o à un nombre moindre de dimensions (parce que V_o est irréductible) . En <u>tout</u> point x de V_o on aura $s(x) \leq s$; appelons ordinaires les points où $s(x) = s$.

Supposons maintenant $\underline{s}$ assez petit pour que, quel que soit $\underline{x}$ de V_o, les équations (6') en $\underline{u}$ aient d'autre solution que $u = 0$. Alors, parmi les variétés (homogènes) irréductibles définies, dans l'espace (x,u) , par les équations (6) et (6') , il y en a une qui contient les points "ordinaires" de V_o et les $\underline{u}$ correspondants . Nous l'appellerons la <u>solution générale</u> du système d'équations .

En un point ordinaire de V_o, le système (6') est équivalent à

$$(7) \qquad u_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \varphi_{i\alpha}(x)\, u_\alpha \qquad\qquad (i = k+1, \ldots\ldots) \; ;$$

les $\varphi_{i\alpha}(x)$ sont holomorphes, mais deviennent indéterminés aux points non ordinaires de V_o . On voit que la "solution générale" se compose des points (x,u) suivants :

1°- $\underline{x}$ ordinaire de V_o, u_α arbitraires, u_i définis par (7)

2°- x non ordinaire de V_o, et pour les u, l'ensemble des limites d'indétermination obtenues en considérant les $\underline{x}$ ordinaires voisins .

D'après le théorème I, l'ensemble de ces limites d'indétermination constitue, en chaque point x^o de V_o, un <u>cône algébrique</u> (irréductible ou non) dans l'espace (u).

<u>Exemple</u>.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ \frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} \end{cases}$$

la "solution générale" s'obtient en ajoutant à ces équations l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

mais le système proposé admet en outre la solution

$$x = y = z = 0 \qquad (u,\ v,\ w \text{ quelconques})$$

II.- Eléments différentiels.

Un <u>élément à p dimensions</u> E_p, dans l'espace $(x_1, \dots x_r)$ est défini :

1°- par les coordonnées $x_1, \dots, x_r$ d'un point, dit <u>point d'appui</u> de E_p ;

2°- par une variété linéaire à p dimensions $\mathcal{E}_p$ dans l'espace homogène

$$dx_1, \dots\dots, dx_r.$$

Les éléments à zéro dimension sont les <u>points</u> de l'espace $(x_1, \dots, x_r)$.

Une variété $\mathcal{E}_p$ peut être définie :

- soit par p vecteurs indépendants, c'est-à-dire au moyen d'une représentation paramétrique

$$(8) \qquad dx_i = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_{i\alpha} v_\alpha \qquad (i=1,\ldots,r)$$

les v_α étant des paramètres, les $\lambda_{i\alpha}$ étant les coordonnées de p vecteurs;

-soit , intrinsèquement, par (r-p) relations linéaires distinctes entre $dx_1,\ldots,dx_r$.

Une forme extérieure Φ en $dx_1,\ldots,dx_r$ (à coefficients constants) <u>s'annule sur</u> $\mathcal{E}_p$ si, par la substitution (8), elle devient une forme en $v_1,\ldots,v_p$, identiquement nulle . Cette définition est indépendante du mode de représentation de $\mathcal{E}_p$; elle exprime que Φ appartient à l'idéal défini (dans l'anneau des formes en $dx_1,\ldots, dx_r$ à coefficients constants) par les (r-p) formes du premier degré $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-p}$, qui, égalées à zéro définissent $\mathcal{E}_p$. Pour celà, il faut et il suffit que le produit extérieur

$$\Phi \wedge \varphi_1 \wedge \cdots\cdots \wedge \varphi_{r-p}$$

soit nul .

Le produit $\varphi_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \varphi_{r-p} = \mathcal{E}_p$ est une forme de degré r-p , complètement décomposable ; toute substitution de déterminant non nul effectuée sur $\varphi_1, \ldots , \varphi_{r-p}$, reproduit $\mathcal{E}_p$ à un facteur constant près .

La forme $\mathcal{E}_p$ définie à un facteur près, caractérise la variété $\mathcal{E}_p$ (ce qui justifie l'identité des notations) .

Etant donné une forme de degré (r-p) à coefficients constants $\underline{u}$, on exprime qu'elle est complètement décomposable en écrivant certaines relations quadratiques homogènes entre les $\underline{u}$. Ces relations définissent, dans l'espace projectif à $\frac{r!}{p!\,\overline{r-p}!} - 1$ dimensions, une variété algébrique $\sum_p$ à p(r-p) dimensions dont tous les points sont simples (grassmannienne) . Les points de cette variété représentent les variétés linéaires à p dimensions de l'espace (homogène) à $\underline{r}$ dimensions .

Résumons :

1°- un élément à p dimensions E_p est défini par l'ensemble d'un point $x_1, \ldots\ldots, x_r$ de l'espace (x) et d'un point (u) de la variété $\sum_p$;

2°- pour qu'une forme $\Phi(dx_1, \ldots, dx_r)$ s'annule sur une variété $\mathcal{E}_p$, il faut et il suffit que la forme $\mathcal{E}_p$ de degré r-p , construite avec les $\underline{u}$ du point correspondant de $\sum_p$, satisfasse à

$$\Phi \wedge \mathcal{E}_p = 0$$

(<u>Remarque</u> : toute forme Φ de degré $>$ p s'annule sur $\mathcal{E}_p$)

<u>Définition</u> : une forme différentielle extérieure (à coefficients fonctions de $\underline{x}$ cette fois) s'annule sur un élément E_p si la forme à coefficients constants obtenue en rempla-

çant les <u>x</u> par les coordonnées du point d'appui de E_p s'annule sur la variété $\mathcal{E}_p$ relative à E_p.

<u>Idéal différentiel</u>.

On dit qu'un idéal $\mathfrak{I}$ de formes différentielles (à coefficients holomorphes en un point x^0) est <u>différentiel</u> si, ω désignant une forme quelconque de $\mathfrak{I}$, la forme dérivée $d\omega$ appartient aussi à $\mathfrak{I}$. (ceci vaut en particulier pour les formes de degré zéro de $\mathfrak{I}$).

Plus généralement, étant donné un idéal <u>quelconque</u> $\mathfrak{I}$, l'ensemble des formes de $\mathfrak{I}$ et de leurs dérivées définit un idéal différentiel $\mathfrak{I}'$: idéal dérivé de $\mathfrak{I}$. Si $\mathfrak{I}$ a une base $\omega_1, \ldots, \omega_h$, les formes $\omega_1, \ldots, \omega_h$ $d\omega_1, \ldots, d\omega_h$ constituent une base pour $\mathfrak{I}'$.

$\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ désignant deux idéaux quelconques, la congruence

$$\mathfrak{I} \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ \mathfrak{J})$$

entraine

$$\mathfrak{I}' \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ \mathfrak{J}')$$

(conséquence immédiate de la formule qui donne la dérivée du produit de deux formes).

Toutes les notions précédentes se conservent par tout changement de variables (non nécessairement biunivoque)

$$\begin{cases} x_i \longrightarrow f_i(y_1, \ldots, y_R) \\ dx_i \longrightarrow df_i \end{cases}$$

($i=1,\ldots\ldots r$; R non forcément égal à r)

Idéal différentiel d'une variété .

L'exemple le plus simple d'idéal différentiel est le suivant : Soit V une variété analytique, irréductible en un de ses points (x^o) . Il lui est attaché un idéal premier $\mathfrak{v}$ dans l'anneau des fonctions holomorphes en (x^o). $\mathfrak{v}$ définit aussi un idéal dans l'anneau des formes différentielles (de tous les degrés) à coefficients holomorphes en (x^o) . L'idéal dérivé, soit $\mathfrak{V}$, s'appelle l'idéal différentiel de la variété V . On peut lui donner pour base un nombre fini de fonctions (constituant une base de $\mathfrak{v}$) et les différentielles de ces fonctions .

Eléments de contact d'une variété .

On dit qu'un élément E_p est un élément de contact de la variété V (irréductible au voisinage d'un point (x^o)) si les formes de l'idéal $\mathfrak{V}$ s'annulent sur E_p . Pour cela il faut et il suffit :

1°- que le point d'appui de E_p soit un point de V ;

2°- que les différentielles des fonctions f_i (servant de base à $\mathfrak{v}$) s'annulent sur E_p , c'est-à-dire

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = 0$$

Soit $\underline{s}$ le rang du système (9) sur la variété V

(Cf. fin de la 1ère partie) . On a $s < r$; en un point "ordinaire" de V, <u>s</u> des variables <u>x</u> s'expriment en fonction des $r-s = k$ autres convenablement choisies . On voit que k est la dimension de V ; on appelle souvent <u>simples</u> les points ordinaires (dans le sens ci-dessus). × errata

Il en résulte facilement : <u>si le point (x^0) est simple, l'idéal différentiel $\mathcal{V}$ se compose des formes qui s'annulent sur les éléments de contact à k dimensions de V</u> (k étant la dimension de V).

<u>Eléments de contact principaux.</u>

k désignant toujours la dimension de V, les éléments de contact à $p \leq k$ dimensions peuvent être définis par les équations

$$\varphi(x) = 0, \qquad g_p(u) = 0, \qquad F(x,u) = 0 \quad ;$$

les équations $\varphi = 0$ sont celles de la variété V ; les équations $g_p(u) = 0$ sont celles de la variété $\sum_p$ des formes complètement décomposables de degré $r-p$; les équations $F(x,u) = 0$ sont linéaires et homogènes en u , et s'obtiennent en écrivant que les formes df_i s'annulent sur l'élément E_p de coordonnées (x,u) . Or les équations précédentes définissent un nombre fini de variétés irréductibles dans l'espace (x,u) ; parmi elles, celle qui contient les points <u>simples</u> de V et les éléments de contact correspondants s'appellera la <u>famille principale</u> des éléments de contact à p dimensions. En un point non simple de V, les éléments de contact <u>principaux</u> forment une variété <u>algébrique</u> dans l'espace (u) (Cf. fin de la Ière partie).

Par exemple, si V est un cône dans l'espace à trois dimensions, les éléments de contact principaux à deux dimensions sont les plans tangents au cône tout le long d'une génératrice ; mais il y a d'autres éléments de contact à deux dimensions : tous les plans passant par le sommet du cône.

III.- <u>Variétés intégrales</u>, <u>éléments intégraux d'un système de Pfaff.</u>

Un système de Pfaff s'obtient en égalant à zéro un nombre fini de formes différentielles de degrés quelconques, à coefficients holomorphes au voisinage d'un point que nous prendrons comme origine $x = 0$. En chaque point x^0 suffisamment voisin de zéro, ces formes définissent, dans l'anneau des formes différentielles à coefficients holomorphes en x^0, un idéal $\mathcal{J}(x^0)$, qui peut dépendre du point x^0. Si l'idéal $\mathcal{J}(0)$ est <u>différentiel</u>. (Cf. IIème partie), il en est de même de $\mathcal{J}(x^0)$ quel que soit x^0.

Nous dirons qu'une variété V, irréductible en un de ses points x^0, est <u>intégrale</u> si les formes de $\mathcal{J}$ s'annulent sur les éléments de contact principaux de V, y compris les éléments à zéro dimension, c'est-à-dire les <u>points</u>

de V.

Au voisinage d'un point <u>simple</u> de V, cette condition équivaut à la suivante :

$$\mathfrak{J} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{V})$$

$\mathfrak{V}$ désignant l'idéal différentiel de la variété V relatif au point simple considéré.

Inversement, si les formes de $\mathfrak{J}$ s'annulent, en chaque point simple de V, sur l'élément de contact à k dimensions relatif à ce point (k désignant la dimension de V), elles s'annulent sur tous les éléments de contact (à un nombre quelconque de dimensions) relatifs à un point simple et, par passage à la limite, sur tous les éléments de contact <u>principaux</u> relatifs à un point quelconque (simple ou non).

<u>Remarque 1</u>

Si une forme de $\mathfrak{J}$ s'annule, chaque composante homogène de cette forme s'annule; c'est pourquoi nous supposerons toujours que la base de $\mathfrak{J}$ est constituée de formes <u>homogènes</u>.

<u>Remarque 2</u>

En un point(simple) où V admet une représentation paramétrique

$$x_i = f_i\ (t_1 \ldots\ldots, t_k)\ ,$$

la condition pour que V soit intégrale est que les formes de

$\mathcal{J}$ s'annulent par la substitution

$$x_i \longrightarrow f_i \quad , \quad dx_i \longrightarrow df_i$$

Remarque 3

Toute sous-variété d'une variété intégrale est intégrale.

Eléments intégraux.

Il est naturel d'appeler *intégral* tout élément E_p sur lequel les formes de $\mathcal{J}$ s'annulent. (Remarque : il peut exister des formes qui s'annulent sur tous les éléments intégraux sans appartenir à $\mathcal{J}$; par exemple, si $\mathcal{J}$ a pour base, au voisinage du point $x = y = 0$, la forme $y^2 dx$ la forme ydx s'annule sur tous les éléments intégraux et n'appartient pas à $\mathcal{J}$).

D'après ce qui précède :

Pour qu'une variété V à k dimensions soit intégrale, il faut et il suffit que, en chaque point simple de V, l'élément de contact à k dimensions soit intégral.

Le problème de l'intégration d'un système de Pfaff, c'est-à-dire de la détermination des variétés intégrales à 1, 2, ..., dimensions, se décompose donc en deux :

1°- déterminer les éléments intégraux de dimension donnée K ;

2°- cela fait, reconnaitre, parmi ces éléments, ceux qui sont effectivement éléments de contact principaux d'une variété intégrale à k dimensions, étudier de quel arbitraire dépendent ces variétés intégrales , etc ....

<u>Détermination des éléments intégraux à k dimensions</u> .

Ils sont définis par des équations

(10) $\varphi_0(x) = 0$, $g_k(u) = 0$, $F(x,u) = 0$;

Les fonctions φ_0 sont les formes de degré zéro de $\mathcal{J}$; les équations $g_k(u) = 0$ sont celles de la grassmannienne $\sum_k$; les équations $F(x,u) = 0$ sont linéaires et homogènes en <u>u</u> , et s'obtiennent en écrivant que les formes de $\mathcal{J}$ (de degré ≥ 1) s'annulent sur l'élément considéré .
Le système (10) définit, au voisinage de $x = u = 0$, un nombre fini de variétés irréductibles dans l'espace (x,u).
Les éléments intégraux à k dimensions se répartissent donc en <u>familles irréductibles</u> . De plus, les éléments de contact principaux d'une variété intégrale (irréductible) appartiennent à une même famille irréductible d'éléments intégraux . En définitive, la recherche des variétés intégrales à k dimensions pourra s'effectuer séparément pour chaque famille irréductible d'éléments intégraux à k dimensions .

Les familles d'éléments intégraux ont été obtenues à partir d'un système de Pfaff . On pourrait, plus généralement, se donner a priori une famille analytique irréductible $\mathcal{F}$ d'éléments à k dimensions, et chercher les variétés à k dimensions dont les éléments de contact principaux appartiennent à la famille. Cette généralisation n'est qu'apparente, car les variétés cherchées sont variétés intégrales d'un système de Pfaff qu'on peut former de la manière suivante :

<u>ler cas</u> - supposons d'abord les éléments à k dimensions définis par des relations

$$(11) \qquad dx_i - \sum_{\alpha=1}^{k} \ell_{i\alpha}\, dx_\alpha = 0 \qquad (i=k+1, \ldots.)$$

les $\ell_{i\alpha}$ sont des coordonnées (non homogènes, indépendantes) de la variété $\mathcal{E}_k$ de l'élément considéré, cette représentation n'étant possible que si $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots\ldots \wedge dx_k \neq 0$ sur $\mathcal{E}_k$.

La famille $\mathcal{F}$ sera alors définie par des équations

$$(12) \qquad \varphi(x, \ell) = 0$$

entre les coordonnées <u>x</u> du point d'appui de l'élément et les paramètres ℓ. (Remarquons que ce mode de définition de $\mathcal{F}$ nous oblige à ne considérer que des éléments à k dimensions <u>voisins</u> d'un élément x^0, ℓ^0).

Dans ce cas, les variétés "intégrales" sont évidemment les variétés intégrales à k dimensions du système de

Pfaff (aux variables x et ℓ) formé par les équations (11) et (12) , à condition de se borner aux variétés sur lesquelles $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k \neq 0$.

Remarque : ce problème est équivalent à l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles

$$\varphi\left(x, \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha}\right) = 0$$

à (r-k) fonctions inconnues x_i de k variables x_α . La résolution d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles du premier ordre se ramène donc à la résolution d'un système de Pfaff. Le cas des ordres supérieurs s'y ramène aussi par l'introduction d'inconnues auxiliaires .

<u>2ème cas</u> - Les éléments à k dimensions étant définis par les coordonnées <u>u</u> d'un point de la grasmannienne $\sum_k$ (coordonnées homogènes, dépendantes), la famille $\mathcal{F}$ aura des équations de la forme

$$(13) \qquad \varphi(x,u) = 0 \ , \quad g_k(u) = 0 \ ;$$

(certaines des relations $\varphi = 0$ pouvant ne contenir que les <u>x</u>) .

Pour exprimer que les <u>u</u> sont les coordonnées d'un élément de contact d'une variété à k dimensions, on écrit les relations linéaires entre $dx_1, \ldots, dx_r$ (à coefficients linéaires en u) qui expriment que le vecteur $dx_1, \ldots dx_r$ appartient à l'élément de coordonnées <u>u</u> . Ces relations, jointes à (13) , définissent un système de Pfaff ; il suffit de chercher les variétés intégrales à k dimensions de ce système, en se bornant à celles dont les éléments de contact principaux n'annulent pas tous les produits $dx_{i_1} \wedge \ldots\ldots \wedge dx_{i_k}$.

Comparaison des deux méthodes .

La première comporte l'introduction d'un nombre moindre d'inconnues nouvelles (savoir les ℓ au lieu des u) par contre, la seconde permet d'envisager d'un seul coup tous les éléments de contact quelle que soit leur orientation (puisque le voisinage de $u = 0$ donne tous les éléments à k dimensions) . C'est ainsi, par exemple, que la notation

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

pour une équation aux dérivées partielles, ne permet pas de considérer des surfaces intégrales qui ont des plans tangents parallèles à Oz , alors que ces surfaces s'introduisent naturellement par l'introduction de coordonnées homogènes pour le plan tangent, quand la nature de l'équation rend cette introduction possible .

Prolongement d'un système de Pfaff.

Lorsqu'on cherche les variétés intégrales à k dimensions d'un système de Pfaff, on détermine d'abord les éléments intégraux à k dimensions. Prenant une famille irréductible de tels éléments intégraux, on est amené, comme on vient de le voir, à former un nouveau système de Pfaff (appelé système prolongé) en adjoignant aux anciennes variables $\underline{x}$ de nouvelles variables ℓ (non homogènes) ou $\underline{u}$ (homogènes). Le système prolongé ne comporte que des formes de degrés zéro et un. On pourra le prolonger à son tour (k conservant toujours la même valeur). Nous verrons, dans le prochain exposé, que c'est par des prolongements successifs que l'on arrive à déterminer toutes les variétés intégrales à k dimensions du système initial.

IV.- Propriété fondamentale des idéaux différentiels

Soit V une variété intégrale d'un idéal $\mathcal{J}$ de formes différentielles. On a, au voisinage d'un point simple de V

$$\mathcal{J} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathcal{V})$$

On a donc, avec les idéaux dérivés $\mathcal{J}'$ et $\mathcal{V}'$ (Cf. IIème partie)

$$\mathcal{J}' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathcal{V}')$$

Or $\mathcal{V}$ est un idéal différentiel, et par suite, $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$; d'où

$$\mathcal{J}' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathcal{V})$$

Donc, toute variété intégrale de l'idéal $\mathcal{J}$ est

<u>variété intégrale de l'idéal dérivé</u>, et par suite, les éléments de contact de V doivent être intégfaux non seulement pour $\mathcal{I}$, mais aussi pour $\mathcal{I}'$.

Historiquement, c'est la substitution de $\mathcal{I}'$ à $\mathcal{I}$ qui a fait faire un pas décisif à la théorie des systèmes de Pfaff Cela tient à une propriété très importante des idéaux différentiels, que nous allons exposer maintenant .

Soit à exprimer que la variété paramétrique V

$$x_i = f_i(t_1, \ldots, t_p) \qquad \text{(t voisin de zéro)}$$

est intégrale . La substitution

$$x_i \longrightarrow f_i \ , \qquad dx_i \longrightarrow df_i$$

transforme $\mathcal{I}$ en un idéal $\mathcal{I}^{x}$ de formes en t et dt , et il s'agit d'exprimer que toutes les formes de $\mathcal{I}^{x}$ sont nulles . Or, portons spécialement notre attention sur la variable t_p (posons $t_p = \tau$) ; dans tous les cas, chaque forme ω de $\mathcal{I}^{x}$ peut s'écrire

$$\omega(t_1, \ldots, t_{p-1}, \tau ; dt_1, \ldots, dt_{p-1}, d\tau) =$$

$$\Omega(t, \tau ; dt_1, \ldots, dt_{p-1}) + d\tau \wedge \Pi(t, \tau ; dt_1, \ldots, dt_{p-1}) ,$$

et les Ω forment un idéal . Pour que la variété soit intégrale, il faut et il suffit que les Ω et les Π soient nulles .

<u>Théorème 3. - Si l'idéal $\mathcal{I}$ est différentiel, il faut et</u>

<u>Il suffit, pour que V soit intégrale</u>

1°- <u>que les Π appartiennent à l'idéal des Ω</u> ;

2°- <u>que, pour $\tau = 0$, les formes Ω s'annulent</u>.

La condition est évidemment nécessaire . Inversement, si elle est remplie, les Π et les Ω sont tous nuls; il suffit de le démontrer par récurrence par rapport au degré k de la forme ω .

Tout d'abord, si ω est de degré zéro, on a $\Pi = 0$, $\omega = \Omega$

La forme

$$d\,\Omega = \;....\; + d\tau \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}$$

appartient à $\mathcal{J}$, et par suite $\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}$ appartient à l'idéal (Ω)
Autrement dit, les formes ω_i de degré zéro satisfont à un système de relations

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} = \sum_j a_{ij}\,(t, \tau)\;\;\omega_j$$

et comme $\omega_i(t,0) = 0$, on a $\omega_i = 0$ quelque soit τ .

Supposons le théorème démontré pour les formes de degré k-1 , et soit maintenant ω une forme de degré k. La forme Π correspondante est de degré k-1 , et par suite identiquement nulle . Le raisonnement se poursuit alors comme ci-dessus ($\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}$ désignera la dérivée de Ω lorsqu'on y considère les t et les dt comme des constantes).

L'importance du théorème 2 tient à ce qu'il énonce des conditions nécessaires et suffisantes pour que des courbes à une dimension ($t = C^{te}$, τ variable) s'appuyant sur une variété intégrale à $(p-1)$ dimensions ($\tau \neq 0$) engendrant une variété intégrale.

V.- Intégrale générale d'un système de Pfaff (systèmes en "involution" de E. Cartan)

Nous supposerons désormais que $\mathcal{J}$ est un idéal différentiel.

Points intégraux.

On les obtient en égalant à zéro les formes de degré zéro de $\mathcal{J}$. On trouve un nombre fini de variétés irréductibles. Pour étudier le système, nous étudierons successivement les variétés irréductibles de points intégraux. Dans ce qui suit, nous supposerons (hypothèse essentielle !) que les formes φ_0 de degré zéro de l'idéal différentiel $\mathcal{J}$ forment une base pour l'idéal premier de la variété irréductible V_0 des points intégraux.

Eléments intégraux à une dimension.

Ils sont donnés par

$$(14) \qquad \varphi_0(x) = 0 \quad , \quad \varphi_1(x, \ell) = 0 ,$$

les fonctions φ_1 étant linéaires et homogènes par rapport aux paramètres (homogènes) ℓ d'un élément à une dimension. Soit s le rang du système $\varphi_1(x, \ell) = 0$ lorsque x appartient à V_0 ; nous dirons qu'un point intégral est ordi-

<u>naire</u> , si en ce point le rang est effectivement <u>s</u> .

On a $s \leq r$, et si $s = r$, il ne passe pas d'élément intégral à une dimension par un point intégral ordinaire . Dans ce cas, nous arrêtons là l'étude du système .

Si $s < r$ (posons $r-s-1 = r_1$) , par un point intégral ordinaire passent ∞^{r_1} éléments intégraux à une dimension. Dans ce cas, les équations (14) définissent, dans l'espace (x, ℓ) des variétés irréductibles dont l'une constitue la <u>solution générale</u> du système (Cf. fin de la Ière partie) . Tout élément intégral qui appartient à la solution générale sera dit <u>élément intégral général à une dimension</u> (il peut y avoir d'autres éléments intégraux à une dimension) . Nous désignerons par V_1 la variété (irréductible) des éléments intégraux généraux à une dimension.

<u>Exemple</u>

Toute équation $f(x,y, \frac{dy}{dx}) = 0$ à une fonction inconnue <u>y</u> de <u>x</u> , se ramène au système de Pfaff

$$f(x, y, z) = 0 , \qquad dy - z\, dx = 0$$

($f = 0$ est supposée irréductible au point x_0, y_0, z_0 considéré). Soit $\mathcal{J}$ l'idéal différentiel correspondant ; les formes du 1er degré de $\mathcal{J}$ admettent la base

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \quad , \qquad dy - z\,dx$$

Ici, $r = 3$, $s = 2$; les points intégraux ordinaires sont ceux où l'on a pas à la fois

$$\frac{\partial f}{\partial x} + z\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad ;$$

par un point intégral ordinaire passe un élément intégral à une dimension . Par exemple, si $f = y - z^2$, les points intégraux ordinaires sont ceux où $z \neq 0$; les éléments intégraux généraux à une dimension sont donnés par

$$dx = 2\,dz \quad , \qquad dy = 2\,z\,dz \quad ;$$

il y a d'autres éléments intégraux (savoir, $z = 0$, $y = 0$ $dy = 0$, $\frac{dz}{dx}$ arbitraire ; ils ne sont en général éléments de contact d'aucune variété intégrale ; parmi eux, seuls les éléments $dz = 0$ sont éléments de contact de la variété intégrale, dite "singulière" , $y = z = 0$) .

Eléments intégraux à deux dimensions

Revenons à l'étude générale de notre idéal $\mathcal{J}$, en supposant $s < r$.

Cherchons les éléments intégraux à deux dimensions passant par un élément intégral général E_1 à une dimension Soient ℓ les coordonnées d'un élément à une dimension; pour que cet élément engendre avec E_1 un élément intégral, on a des relations

$$(15) \qquad \varphi_2(x, u^1, \ell) = 0$$

linéaires en ℓ. Les x et les u^1 sont les coordonnées de l'élément E_1, c'est-à-dire d'un point de V_1. Sur V_1 le système (15) d'équations en ℓ a un rang au moins égal à s (car parmi ces équations figurent celles qui expriment que l'élément ℓ est intégral) ; soit $s + s_1$ ce rang. On a

$$s + s_1 \leqq r - 1 ,$$

puisque le système a au moins une solution (savoir $\ell = u^1$) ; d'où

$$s_1 \leqq r_1$$

Si $s_1 = r_1$, par un élément intégral général E_1, ne passe en général, aucun élément intégral à deux dimensions. Dans ce cas, nous arrêtons notre étude.

Si $s_1 < r_1$ (posons $r_1 - s_1 - 1 = r_2$), appelons ordinaire tout élément intégral général pour lequel le rang est effectivement $s + s_1$. Par un E_1 ordinaire, passent ∞^{r_2} éléments intégraux à deux dimensions. Le système (15), auquel on adjoindrait les équations définissant les x et les u^1 d'un E_1 général, admet alors une "solution générale" ; les éléments intégraux (à deux dimensions) correspondants sont dits : éléments intégraux généraux à deux dimensions. Dans l'espace de tous les éléments à deux dimensions, ils forment une variété irréductible V_2.

On voit, que de proche en proche, on définira les éléments intégraux <u>généraux</u> à trois, ... dimensions ; jusqu'à ce qu'on arrive à un entier n tel que $s_n = r_n$ (ce qui arrivera nécessairement, car $r > r_1 > r_2$ ...). En définitive, les entiers r_i et s_i satisfont au système d'égalités et d'inégalités

$$
\begin{array}{lll}
s < r \ , & r - s - 1 = r_1 \ , & s = r - r_1 - 1 \ . \\
s_1 < r_1 \ , & r_1 - s_1 - 1 = r_2 \ , & s + s_1 = r - r_2 - 2 \ . \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_{n-1} < r_{n-1} \ , & r_{n-1} - s_{n-1} - 1 = r_n \ , & s + s_1 + \ldots + s_{n-1} = r - r_n - n \ . \\
s_n = r_n & & s + s_1 + \ldots + s_{n-1} + s_n = r - n
\end{array}
$$

L'entier n s'appelle le <u>genre</u> du système de Pfaff.

L'étude précédente se résume ainsi :

Quel que soit l'entier $p \leq n$, il y a des éléments intégraux "généraux" à p dimensions; ils constituent , dans l'espace des éléments à p dimensions, une variété analytique irréductible V_p . Par un élément intégral général "ordinaire", E_p, passent $\infty^{r_{p+1}}$ (0 si p = n) éléments intégraux à p+1 dimensions ; ces éléments sont généraux . Ajoutons , pour être complet, que tous les points intégraux sont considérés comme généraux .

On dit que le système est en <u>involution</u> pour toute dimension $p \leq n$.

Eléments intégraux réguliers .

Parmi les éléments intégraux généraux à $p \leq n$ dimensions, nous distinguerons les éléments réguliers, dont voici la définition par récurrence par rapport à p :

Définition : Tout point intégral est régulier ; un élément intégral général E_p est régulier s'il contient au moins un E_{p-1} régulier ordinaire (c'est-à-dire tel que par E_{p-1}, passent exactement ∞^{r_p} éléments intégraux à p dimensions).

Par suite, à chaque élément régulier E_p on peut associer au moins une chaine de sous-éléments E_0 E_1, ... E_{p-1}

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{p-1} \subset E_p$$

telle que chaque E_k ($k \leq p-1$) soit régulier et ordinaire . Et l'on vérifie facilement :

- tout point intégral voisin de E_0 est régulier ordinaire, et est contenu dans au moins un élément intégral à une dimension voisin de E_1 ;

- tout élément intégral voisin de E_1 est régulier ordinaire, et est contenu dans au moins un élément intégral à deux dimensions voisin de E_2 ;

- etc ... jusqu'à : tout élément intégral voisin de E_{p-1} est régulier ordinaire, et contenu dans au moins un élément intégral à p dimensions voisin de E_p ;

- enfin, tout élément intégral à p dimensions voisin de E_p est régulier .

Tout cela s'applique en particulier pour $p = n$.

Celà posé, annonçons le théorème fondamental d'existence dont la démonstration (qui repose sur le théorème 2 IVème partie, sera donnée dans l'exposé du 14 Décembre).

Théorème 3 .- Si E_p est régulier, et si $E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{p-1} \subset E_p$ désigne une chaine attachée à E_p , alors

- par E_o passe au moins une courbe intégrale M_1 admettant E_1 pour élément de contact ;
- par M_1 passe au moins une variété intégrale à deux dimensions M_2 admettant E_2 pour élément de contact;
- ....
- par M_{p-1} passe au moins une variété intégrale à p dimensions M_p admettant E_p pour élément de contact.

Ainsi tout élément intégral régulier à p dimensions, est l'élément de contact d'au moins une variété intégrale à p dimensions . Nous appellerons intégrale générale à p dimensions, toute variété intégrale à p dimensions dont les éléments de contact principaux sont des éléments intégraux généraux , parmi lesquels il y a au moins un élément intégral régulier. Le théorème 3 est un théorème d'existence pour les variétés intégrales générales.

au moins au voisinage d'un élément intégral régulier ; s'il est muet pour les éléments intégraux non réguliers, cela tient à la nature des choses, comme nous le verrons dans le prochain exposé .

BIBLIOGRAPHIE

E.CARTAN .- Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales (Ann.Ec.Norm. 3ème série 18, 1901, p.241-312)

E.KÄHLER .- Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen (Hamburger Math.Einzelschriften, 1934)

Pour ce qui concerne la décomposition d'une variété analytique en variétés irréductibles , consulter :

OSGOOD .- Lehrbuch der Funktionentheorie (II,1) (Teubner 1924)

RÜCKERT .- Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale (Math.Ann. 107, 1932, p.259-281) .