DANIEL DUGUÉ

Les solutions discontinues

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 6 (1938-1939), exp. n° 5, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1938-1939__6__A5_0>

VI.- F .

CERCLE MATHEMATIQUE

de l'Ecole Normale Supérieure

Sixième année 1938-1939

CALCUL des VARIATIONS .

Les solutions discontinues

Exposé fait par M. Daniel DUGUE , le lundi 13 Février 1939

Exemplaire n° 6

Jusqu'ici, dans les exposés précédents, on avait supposé que les extrémales ne présentaient aucun point anguleux . Dans le premier exposé sera examinée la question des "solutions discontinues" . Ce terme, qui est celui adopté par M.Caratheodory dans sa thèse [Ueber die diskontinuirlichen Lösungen in der Variationsrechnung (Göttingen 1904)] dont nous suivons le plan, correspond en réalité à des discontinuités dans la pente . Comme l'a fait remarquer M.Hadamard dans son traité de Calcul des variations, une discontinuité dans la courbe elle-même, rendrait le problème indéterminé .

I.- CAS GENERAL

1.- Les conditions nécessaires d'Erdmann

Soit $F(x,y,x',y')$ une fonction analytique de x, y, x', y' , satisfaisant la condition d'homogénéité $F(x,y,kx',ky') = k\,F(x,y,x',y')$, avec k positif, et soit $x(t)$, $y(t)$, une courbe continue à l'intérieur d'un domaine donné x', y', ne s'annulant pas simultanément . Le problème est de trouver $x(t)$ et $y(t)$ de telle sorte que $J = \int_{t_1}^{t_2} F\,(x,y,x',y')\,dt$ soit minimum par rapport aux courbes infiniment voisines . On sait que $x(t)$ et $y(t)$ doivent satisfaire les équations différentielles :

$$G_1 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0 \qquad G_2 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$G = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x'} + F_1(x'y'' - y'x'') = 0$$

avec $F_1 = \frac{1}{y'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = -\frac{1}{x'y'}\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = \frac{1}{x'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$

à cause de l'homogénéité de F .

Les trois équations différentielles sont identiques , car :

$$G_1 = y' G \qquad\qquad G_2 = -x' G$$

Considérons maintenant une courbe $x(t)$, $y(t)$, $(t_1 \leq t \leq t_2)$ ayant un point anguleux en t_o . Nous allons exprimer que cette courbe est extrémale <u>par rapport aux courbes présentant un point anguleux voisin du précédent</u> . Ces courbes sont de la forme : $x = x(t) + \mu\,\xi(t)$ $y = y(t) + \mu\,\eta(t)$. Si l'on effectue l'intégration le long de ces courbes, J devient $J(\mu)$, et on doit avoir $J'_o = \left(\frac{\partial J}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} = 0$ quels que soient ξ et η . Or :

$$J'_o = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \xi + F_y \eta + F_{x'} \xi' + F_{y'} \eta')\, dt$$

$$= \Big[F_{x'}\xi + F_{y'}\eta\Big]_{t_1}^{t_o} + \Big[F_{x'}\xi + F_{y'}\eta\Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (G_1 \xi + G_2 \eta)\,dt$$

en désignant par F_x la dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}$, etc ....

Par hypothèse, on doit avoir $G_1 = G_2 = 0$ le long de la courbe qui doit être extrémale de t_1 à t_0 et de t_0 à t_2.
De plus : $\xi(t_1) = \xi(t_2) = \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$
Donc :

$$J'_0 = (F_{x'_0} - \overline{F}_{x'_0})\,\xi(t_0) + (F_{y'_0} - \overline{F}_{y'_0})\,\eta(t_0)$$

$F_{x'_0}$ et $\overline{F}_{x'_0}$ sont les valeurs de $F_{x'_0}$ en O respectivement sur l'axe 1O et sur l'axe O2. $\xi(t_0)$ et $\eta(t_0)$ étant arbitraires, il s'ensuit que :

$$F_{x'_0} - \overline{F}_{x'_0} = 0 \qquad\qquad F_{y'_0} - \overline{F}_{y'_0} = 0$$

On obtient ainsi les conditions d'Erdmann :
<u>Pour que la variation première de J s'annulle, il est nécessaire que $F_{x'}$ et $F_{y'}$ soient continues en t le long de tout l'arc d'extrémale.</u>

Ces conditions s'expriment simplement en considérant la fonction E de Weierstrass. Cette fonction s'écrit :

$$E(x,y;x',y';\overline{x}',\overline{y}') = (F_{x'} - \overline{F}_{x'})\,\overline{x}' + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\,\overline{y}'$$

Cette expression s'annule pour les directions $x', y', \overline{x}', \overline{y}'$ de la tangente au point de discontinuité et on constate du fait que $F_{x'}$ et $F_{y'}$ sont homogènes d'ordre 0 en x' et y', que : $\dfrac{\partial E}{\partial \overline{x}'} = 0$ et $\dfrac{\partial E}{\partial \overline{y}'} = 0$

pour ces deux directions.

$E(x,y;x',y';\bar{x}',\bar{y}')$ a donc un zéro extraordinaire ($x'\bar{y}' - \bar{x}'y' \neq 0$) et double en tout point anguleux d'une extrémale. On voit facilement que, réciproquement, si E a un zéro double extraordinaire, les conditions d'Erdmann sont vérifiées .

Ces conditions permettent, en se plaçant en un point a,b , de trouver, si elles existent, les directions α, β ; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ des extrémales brisées ayant ce point pour point anguleux . Il suffit de résoudre :

$$F_{x'}(a,b;\alpha,\beta) = F_{x'}(a,b;\bar{\alpha},\bar{\beta})$$
$$F_{y'}(a,b;\alpha,\beta) = F_{y'}(a,b;\bar{\alpha},\bar{\beta})$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \qquad\qquad \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = 1$$

On peut également se servir de la fonction E . Il est évident que si E garde un signe constant ou est linéaire en $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, à l'intérieur d'un domaine , aucun point de ce domaine ne peut être point anguleux d'extrémale . C'est le cas pour tous les points du plan dans le problème du minimum de l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ (en particulier : ligne la plus courte joignant deux points donnés). De même la méridienne de la surface de révolution la plus aérodynamique ne saurait admettre de points anguleux (en dehors de l'axe de révolution) .

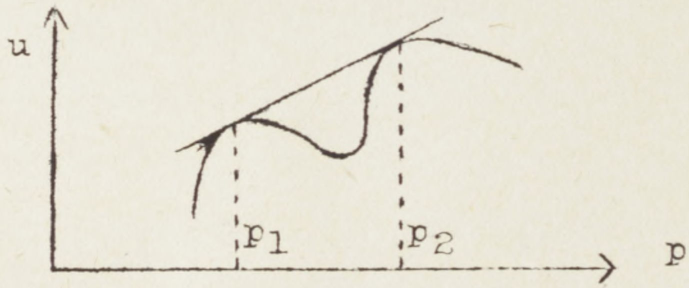
Remarque I . - On peut donner de la condition d'Erdmann une interprétation géométrique simple en prenant x comme paramètre . L'intégrale J devient :

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,p)\, dx \qquad \text{avec} \quad p = \frac{dy}{dx}$$

et les conditions d'Erdmann seront

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p=p_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p=p_2} \qquad \left(f - p\,\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p=p_1} = \left(f - p\,\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p=p_2}$$

Si l'on considère $u = f(a,b,p)$, p étant la variable indépendante et a,b les paramètres , les conditions d'Erdmann expriment que la courbe $u = f(p)$ a une tangente double pour $p = p_1$ et $p = p_2$. Réciproquement, à chaque tangente double correspond un point anguleux possible .

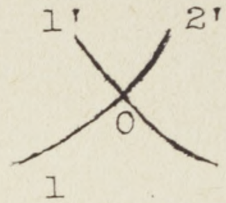


<u>Remarque II</u> . - La fonction F sous le signe d'intégration est en général telle que :

ou bien $F(x,y;x',y') = F(x,y;-x',-y')$

ou bien $F(x,y;x',y') = - F(x,y;-x',-y')$

Dans le premier cas , il est facile de voir que si en un point a,b , le système α , β , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, donne une extrémale anguleuse , le système $-\alpha$, $-\beta$, $-\bar{\alpha}$, $-\bar{\beta}$, en donnera une autre . On aura donc un système de deux solutions opposées



1 O 2 , 1'O 2' .

Dans le second cas, on voit que si $(\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ satisfait la condition d'Erdmann, $(-\alpha, -\beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $(\alpha, \beta, -\bar{\alpha}, -\bar{\beta})$, $(-\alpha, -\beta, -\bar{\alpha}, -\bar{\beta})$ la satisfont aussi . On serait tenté d'admettre alors les 4 solutions 1 O 2 , 1 O 1' , 1' O 2' , 2' O 2 . Mais dans ce cas , $F_1(x,y;x',y') = - F_1(x,y;-x',-y')$ et nous verrons au paragraphe suivant que la condition de Legendre amène à rejeter les solutions 1 O 1' et 2 O 2' .

2.- <u>Conditions de Legendre</u>

La direction $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$, satisfaisant au point a,b, les conditions d'Erdmann , on peut trouver une extrémale brisée, 1 O 2 tangente à ces deux directions . Les règles ordinaires du calcul des variations nous apprennent que pour que l'on ait affaire à un maximum ou à un minimum , il est nécessaire que F_1 garde un signe constant et soit différent de O le long de 1 O 2 . On doit donc avoir le même signe pour:

$$F_1(a,b;\alpha,\beta) \quad \text{et} \quad F_1(a,b;\bar{\alpha},\bar{\beta})$$

C'est cette condition qui permet de rejeter les solutions 1 O 1' et 2 O 2' du paragraphe précédent .

3.- <u>Les conditions d'Erdmann sont suffisantes</u> .

On a démontré jusqu'ici que les courbes intégrales de $G = 0$ présentant un point anguleux doivent satisfaire la condition d'Erdmann pour être extrémales par rapport aux courbes infiniment voisines <u>présentant un point anguleux infiniment voisin</u> . Nous allons établir que cette condition jointe à celle de Legendre, permet d'affirmer qu'il y a extremum par rapport aux courbes voisines même n'ayant pas de point anguleux . La démonstration se fera en trois points .

1°) Etant donné un point anguleux a, b , tout point du voisinage de a , b , peut être considéré comme un point anguleux d'une extrémale .

2°) Etant donnée une courbe $\Gamma(a,b) = 0$ passant par a,b , et non tangente à l'une des deux branches d'extrémales passant par a,b, l'ensemble des extrémales ayant leurs points anguleux sur Γ recouvre le voisinage de Γ une fois et une seule .

3°) Calcul de la différence de l'intégrale J le long d'une extrémale et le long d'une courbe voisine .

<u>1ère partie</u> .

Pour établir cette proposition, il suffit de montrer qu'on peut résoudre :

$$F_{x'}(a,b;\alpha,\beta) = F_{x'}(a,b;\bar\alpha,\bar\beta)$$
$$F_{y'}(a,b;\alpha,\beta) = F_{y'}(a,b;\bar\alpha,\bar\beta)$$
$$\alpha^2+\beta^2 = 1 \qquad \bar\alpha^2+\bar\beta^2 = 1$$

en $\alpha, \beta, \bar\alpha, \bar\beta$, au voisinage de a, b .

On est ainsi amené à calculer :

$$\frac{D(F_{x'} - \bar F_{x'}, F_{y'} - \bar F_{y'}, \alpha^2+\beta^2, \bar\alpha^2+\bar\beta^2)}{D(\alpha,\beta,\bar\alpha,\bar\beta)} = 4\Delta$$

En utilisant les relations entre $F_{x'x}$, $F_{y'y}$ et F_1, on voit que $\Delta = F_1 \bar F_1 (\alpha\bar\beta - \beta\bar\alpha)$, Δ est donc différent de zéro dans le voisinage de a, b d'après la condition de Legendre .

<u>2ème partie</u> .

Considérons la courbe $\Gamma(a,b) = 0$ régulière en a, b . Il nous faut maintenant établir que par tout point du voisinage de cette courbe passe une extrémale brisée et une seule . Nous nous placerons d'un côté déterminé de cette courbe et nous écrirons la solution de l'équation $G = 0$ passant par a, b, α, β sous la forme :

$$x = X(t,a,b,\alpha,\beta) \qquad y = Y(t,a,b,\alpha,\beta)$$

avec

$$X^0 = X(0,a,b,\alpha,\beta) = a \qquad Y^0 = Y(0,a,b,\alpha,\beta) = b$$
$$X^0{}_t = \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{t=0} = \alpha \qquad Y^0{}_t = \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_{t=0} = \beta$$
$$(X_t)^2 + (Y_t)^2 = 1 \qquad \alpha^2+\beta^2 = 1$$

On a $\Gamma(a,b) = 0$ et l'une des deux quantités Γ_a^0 , Γ_b^0 au moins est différente de 0 . Si c'est Γ_b^0 , on peut écrire $b - b_0 = P(a - a_0)$.

D'après les résultats de la première partie, on a :

$$\alpha - \alpha_0 = \alpha\,(a-a_0, b-b_0) \qquad \beta - \beta_0 = \beta\,(a-a_0, b-b_0)$$

On obtient donc α et β comme fonctions de a , et en remplaçant b, α, β par leur valeur en fonction de a dans l'expression de x et y , on a :

$$x = \xi\,(t,a) \qquad y = \eta\,(t,a)$$

Pour établir la proposition que nous avons en vue, il suffit de démontrer que

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(t, a)}_{t=0,\, a=a_0} \neq 0$$

Pour cela, on considère le déterminant fonctionnel 4 D des fonctions :

$$x = X(t,a,b;\alpha,\beta) \qquad y = Y(t,a,b;\alpha,\beta)$$

$$0 = \Gamma(a,b) \qquad 0 = F_{x'}(a,b;\alpha,\beta) - F_{x'}(a,b;\bar\alpha,\bar\beta)$$

$$0 = F_{y'}(a,b;\alpha,\beta) - F_{y'}(a,b;\bar\alpha,\bar\beta)$$

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad 1 = \bar\alpha^2 + \bar\beta^2$$

par rapport à t, a, b, $\alpha, \beta, \bar\alpha, \bar\beta$; on trouve en utilisant les relations entre les dérivées :

$$D = \frac{D(\xi,\eta)}{D(t,a)} F_1 \overline{F}_1 \Gamma_b(\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha})$$

Les derniers facteurs sont différents de 0 dans le voisinage de a_0, b_0. Donc $\frac{D(\xi,\eta)}{D(t,a)}$ s'annulera en même temps que D. Or, pour $t = 0$, on peut calculer que D se réduit à :

$$- F_1^{\,o}\, \overline{F}_1^{\,o}(\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha})\ (\alpha\Gamma_a + \beta\Gamma_b)$$

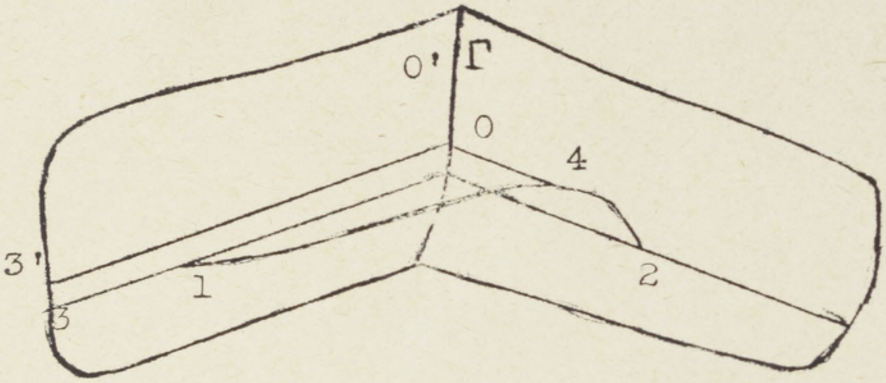
En choisissant la courbe $\Gamma(a,b)$ non tangente à la branche d'extrémale α, β, on voit que $D_{t=0}$ est différent de 0 et par suite $\frac{D(\xi,\eta)}{D(t,a)}$ ne s'annule pas au voisinage de $t=0$ $a=a_0$. Il en serait de même pour l'autre branche $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$.

On a ainsi établi l'existence de ce qu'on appelle un champ d'extrémales ayant leur point anguleux sur une courbe donnée. Cela va nous permettre de terminer le calcul de la troisième partie.

<u>3ème partie</u>.

Considérons un champ entourant la courbe extrémale brisée 1 0 2. Ce sera par exemple le domaine borné par deux extrémales voisines de l'extrémale 1 0 2 et deux courbes régulières.

Soit $x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ avec $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ une courbe reliant 1 et 2 et située toute entière à l'intérieur du champ. Cette courbe qui peut parfaitement ne pas



être analytique doit simplement avoir une tangente et donner à l'intégrale $J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\varphi, \psi ; \varphi', \psi')\, d\tau$ une valeur finie .

Pour évaluer la différence entre J le long d'une extrémale et le long d'une courbe arbitraire, nous allons considérer la fonction :

$\Omega(\tau) = J_{3'0'4'} + I_{42}$, en appelant I l'intégrale le long de la courbe arbitraire et J l'intégrale le long de l'extrémale ; on a :

$$\Omega(\tau_1) = J_{31} + I_{142}$$

$$\Omega(\tau_2) = J_{31} + I_{102}$$

Donc :

$$J_{102} - I_{142} = \Omega(\tau_2) - \Omega(\tau_1) = \int_1^2 \frac{d\Omega}{d\tau}\, d\tau$$

En supposant, comme dans le cas de la figure, que 4 est du même côté de Γ que 2 , on a :

$$\Omega(\tau) = \int_{t'_3}^{0} F(\xi, \eta, \xi', \eta')\, dt$$
$$+ \int_{0}^{t_4} F(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\xi}', \bar{\eta}')\, dt + \int_{\tau}^{t_2} F(\varphi, \psi, \varphi', \psi')\, d\tau$$

t'_3 est une fonction de a ; a et t_4 seront déterminés comme fonction de τ par les deux équations :

$$\bar{\xi}(t_4, a) = \varphi(\tau) \quad \text{et} \quad \bar{\eta}(t_4, a) = \psi(\tau)$$

Pour calculer $\frac{d\Omega}{d\tau}$, on intégrera par parties comme dans le cas des équations de Lagrange pour les deux premières intégrales . Les termes sous le signe d'intégration disparaitront du fait que les courbes 1 0 2 sont extrémales . Le terme provenant de t'_3 donnera une expression de la forme $g(a)\,\frac{da}{d\tau}$. Les termes provenant de la limite 0 disparaitront car ils sont de la forme :

$$\left[(F_{x'} - \bar{F}_{x'})\frac{\partial \xi(0)}{\partial a} + (F_{y'} - \bar{F}_{y'})\frac{\partial \eta(0)}{\partial a}\right]\frac{da}{d\tau}$$

et la condition d'Erdmann est satisfaite .

Le terme provenant de t_4 sera

$$F_{x'}(\bar{\xi}', \bar{\eta}')\varphi' + F_{y'}(\bar{\xi}', \bar{\eta}')\psi' .$$

(Il suffit de substituer les valeurs de la dérivée $\frac{dt_4}{d\tau}$)

La dernière intégrale donnera évidemment : $-F(\varphi, \psi, \varphi', \psi')$.

Et par suite :

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = g(a)\,\frac{da}{d\tau} + F_{x'}(\bar{\xi}', \bar{\eta}')\varphi' + F_{y'}(\bar{\xi}', \bar{\eta}')\psi' - F(\varphi', \psi')$$

$$= g(a)\,\frac{da}{d\tau} - E(\xi', \eta', \varphi', \psi')$$

par suite de l'homogénéité en φ', ψ' de F .

$\displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} g(a)\,\frac{da}{d\tau}\,d\tau$ est évidemment nulle puisque pour 1 et 2 , a a la même valeur . Donc :

$$I_{142} - J_{102} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} E(\xi', \eta'; \varphi', \psi')\,d\tau$$

La théorie de la fonction E peut donc s'étendre aux solutions discontinues . Cette théorie repose sur ce fait que E s'annule quand la pente d'une courbe coïncide avec celle d'une extrémale et garde un signe fixe quand la courbe que l'on compare s'écarte suffisamment peu de l'extrémale ; E et F_1 ont alors le même signe . On a vu d'autre part que E s'annule d'une manière extraordinaire pour le point anguleux d'une extrémale . On voit donc que l'annulation de E est une condition suffisante pour que le long de l'extrémale brisée 102 un extremum fort ait lieu .

4.- Examen de l'ensemble des solutions discontinues et points conjugués .

On a vu que, en un point a,b, les directions α , β, des extrémales brisées sont déterminées . On peut chercher des courbes dont la tangente en chaque point est cette direction α , β , c'est-à-dire intégrer le système :

$$\frac{da}{dt} = \alpha(a,b) \quad , \quad \frac{db}{dt} = \beta(a,b)$$

Ces courbes ne sont pas en général des extrémales , c'est-à-dire qu'elles ne sont pas des intégrales de l'équation $G = 0$. On peut chercher à quelles conditions ces courbes, qui dépendent d'un seul paramètre, sont des solutions de l'équation de Lagrange qui est du second ordre . Cette condition s'écrit :

$$\alpha F_x(a,b,\bar{\alpha},\bar{\beta}) + \beta F_y(a,b,\bar{\alpha},\bar{\beta}) = \bar{\alpha} F_x(a,b,\alpha,\beta) + \bar{\beta} F_y(a,b,\alpha,\beta)$$

ou, en coordonnées non homogènes :

$$f_x + \bar{p} f_y = \bar{f}_x + p \bar{f}_y$$

$\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$, et $p, \bar{p}$ satisfaisant bien entendu à la condition d'Erdmann . Si cette condition est remplie identiquement en a, b , les courbes en question sont des extrémales qui, en chacun de leurs points, présentent un point singulier possible . C'est ce qui se produit en particulier quand l'intégrant F ne dépend ni de x, ni de y , mais seulement de x' et de y' . Dans un tel cas, on peut évidemment former des extrémales ayant un nombre arbitraire de points anguleux ces points anguleux étant arbitrairement voisins d'une courbe choisie à l'avance .

Par contre, si l'on a , en a_0, b_0 , α_0, β_0, $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\beta}_0$:

$$\text{(A)} \qquad \bar{\alpha}_0 F_x^0 + \bar{\beta}_0 F_y^0 - \alpha_0 \bar{F}_x^0 - \beta_0 \bar{F}_y^0 \neq 0$$

on peut montrer que sur l'extrémale qui passe par l'élément linéaire a_0, b_0, α_0, β_0, le point anguleux O est un point isolé. En effet, écrivons les extrémales sous la forme :

$$x = a + \alpha t + \alpha_1 t^2 + \dots \qquad y = b + \beta t + \beta_1 t^2 + \dots$$

α_1 et β_1 se calculant à partir de $G = 0$. Pour avoir le t correspondant aux points singuliers possible il faut remplacer x,y,x',y' par leur valeur dans :

$$F_{x'}(x,y,x',y') = F_{x'}(x,y;\bar{\alpha}+\xi,\bar{\beta}+\eta)$$

$$F_{y'}(x,y,x',y') = F_{y'}(x,y;\bar{\alpha}+\xi,\bar{\beta}+\eta)$$

$$1 = (\bar{\alpha}+\xi)^2 + (\bar{\beta}+\eta)^2$$

et éliminer η et ξ entre les trois équations ; ($\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont évidemment les pentes correspondant à α, β par la condition d'Erdmann). On trouve alors une équation en t de la forme

$$0 = A_1 t + A_2 t^2 + \dots\dots$$

et un calcul de déterminant montre que

$$A_1 = \bar{F}_1(\alpha \bar{F}_x + \beta \bar{F}_y - \bar{\alpha} F_x - \bar{\beta} F_y)$$

D'après nos hypothèses, A_1 est différent de O et le point O est donc point singulier isolé. En vertu de la continuité, cette propriété est vraie non seulement au point a,b mais dans un domaine entourant ce point.

Sous la même condition, chaque solution de l'équation de Lagrange voisine de l'extrémale 10 a un point anguleux dans le voisinage de O . Il suffit de montrer qu'étant donnée une extrémale , $y = f(x,m,n)$, voisine de l'extrémale donnée, on peut trouver une courbe $y = \varphi(x,\lambda)$ [intégrale du système $\frac{da}{dt} = \alpha(a,b)$, $\frac{db}{dt} = \beta(a,b)$] qui lui soit tangente au voisinage du point O . C'est un calcul de déterminants analogues aux précédents .

Des résultats précédents, on déduit le théorème fondamental suivant , sous les hypothèses que :

1°) pour chaque élément linéaire de 1 à 0 de l'extrémale régulière 1,0 , l'équation de Lagrange est régulière

2°) le point O est un point anguleux possible de l'extrémale 10 où les conditions de Legendre sont vérifiées

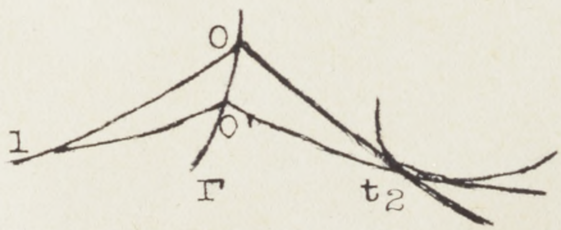
3°) $\overline{\alpha}_0 F_x{}^0 + \overline{\beta}_0 F_y{}^0 - \alpha_0 \overline{F}_x{}^0 - \beta_0 \overline{F}_y{}^0 \neq 0$

<u>il existe pour le faisceau d'extrémales passant par 1 une courbe analytique passant par O et régulière en ce point, sur laquelle se trouvent tous les points anguleux du faisceau</u> .

Ce théorème permet d'étendre la théorie des points conjugués au cas discontinu . En effet, soit le faisceau d'extrémales voisines de 10, passant par 1 dont les points singuliers sont sur une courbe Γ au voisinage de O . Considérons l'ensemble des extrémales ayant leur point singulier sur Γ et le déterminant D déjà envisagé. Ce déterminant s'annule pour la première fois pour t négatif pour la valeur t_1. Cette valeur t_1 ne dépend que de la pente de la tangente à Γ en O. En effet, on peut montrer que :

$$D = F_1 \overline{F}_1 (\alpha \overline{\beta} - \beta \overline{\alpha}) \begin{vmatrix} X_t & X_a & X_b \\ Y_t & Y_a & Y_b \\ 0 & \Gamma_a & \Gamma_b \end{vmatrix}$$

Soit t_2 la plus petite valeur positive pour laquelle $\overline{D}$ et par conséquent $\dfrac{D(\overline{\xi}, \overline{\eta})}{D(t,a)}$ s'annule. Les secondes branches des extrémales O2 toucheront leur enveloppe au point correspondant à t_2. Ce point sera le point conjugué du point 1 et, en général en ce point la courbe 102 cessera d'être une extrémale, pour l'intégrale J.



La théorie des points conjugués ne peut s'étendre au cas exceptionnel où :

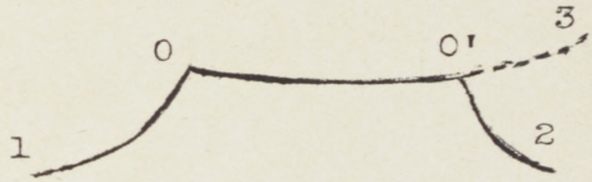
$$\overline{\alpha} F_x + \overline{\beta} F_y - \alpha \overline{F}_x - \beta \overline{F}_y \equiv 0$$

car, dans le faisceau de solutions de G passant par le point 1, l'extrémale 10 est la seule qui puisse être discontinue

(chacun de ces points étant un point anguleux possible).
Il n'existe donc plus de courbes Γ.

Solutions multiplement discontinues .

Les résultats précédents permettent d'énoncer les conditions pour qu'une courbe 100'2 , présentant deux points anguleux soit extrémale .



Il faut et il suffit que :

1°) 10,00',0'2 satisfassent aux équations de Lagrange et qu'en 0 et 0' les conditions d'Erdmann soient remplies .

2°) F_1 doit garder le même signe le long de tous les morceaux de courbe .

3°) Le point conjugué de 1 sur l'extrémale brisée 103 ne peut être situé entre 0 et 0' et ne peut coincider avec 0' .

4°) Le point conjugué de 0 sur l'extrémale 00'2, qui se trouve sur $0'^2$ est différent de 0' .

5.- Exemple.

Soit à trouver les extrémales discontinues de l'intégrale : $$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{yx'^3}{y'^2} + \frac{y'^2}{x'} \right\} dt$$

telles que $x' > 0$.

En prenant le paramètre t qui est arbitraire tel que $\frac{y'}{x'} = t$ les solutions de l'équation de Lagrange sont :

$$x = c_1 + \frac{4t}{9}(3c + t^2) \qquad\qquad y = \frac{t^2}{3}(2c + t^2)$$

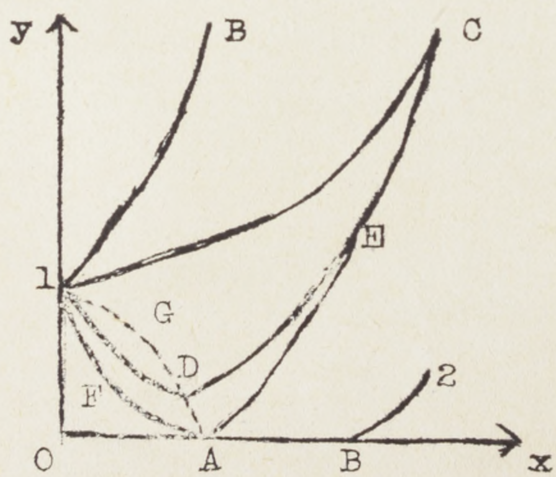
Ce sont des courbes unicursales de 4ème ordre symétriques par rapport à $x = c_1$.

Si $c > 0$, on peut avoir sur une extrémale un point anguleux de coordonnées

$$y_0 = c^2 \qquad\qquad x = c_1 \pm \frac{16}{9} c^{3/2}$$

La condition de Legendre est satisfaite tant que $y > 0$ et $x' > 0$.

On peut chercherla région du plan dans laquelle doit se trouver un point qu'on peut relier à un point donné 1 sur l'axe des y, par une extrémale brisée .



Soient 1B et 1FA les deux extrémales passant par 1 pour lesquelles $c = 0$ et soit 1GDA la courbe lieu des points anguleux du faisceau, qui, dans ce cas, passe par 1 . AEC est l'enveloppe des extrémales brisées et 1C est l'arc d'extrémale brisée limite de DE quand D tend vers 1 sur la courbe 1GDA .

La discussion du problème montre qu'il y a une extrémale discontinue quand 2 est à l'intérieur du triangle curviligne 1GDAC , et continue quand il est à l'intérieur, soit de B1C ou 1GDAF . On peut se demander ce qui arrive si 2 est à droite de AEG . On peut montrer que si l'on donne à l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{yx'^3}{y'^2} + \frac{y'^2}{x'} \right\} dt$$

prise le long de Ox , la valeur 0 , il y a encore un extremum qui est atteint pour la courbe composée de deux arcs d'extrémales correspondant à la valeur 0 de c , passant par 1 et par 2 , et de la portion de l'axe Ox qui les raccorde. (1FA B2) .

II.- CAS ISOPERIMETRIQUE

1.- Problème général

Soient maintenant deux intégrales :

$$J^o = \int_{t_1}^{t_2} F^o(x,y;x',y')\ dt$$

$$J^1 = \int_{t_1}^{t_2} F^1(x,y;x',y')\ dt$$

satisfaisant aux mêmes conditions que précédemment . Le problème est de trouver les courbes donnant à J^o une valeur extrême, et à J^1 une valeur donnée . On sait que ce problème se ramène au problème précédemment traité . Pour qu'une courbe à point anguleux soit extrémale , il est nécessaire que :

A) Le long de chaque partie continue

$$\lambda_o\ G^o + \lambda_1\ G^1 = 0$$

G^oet G^1 étant les équations de Lagrange relatives à J^o et J^1 .

B) En chaque point anguleux :

$$\lambda_o F^o_{x'} + \lambda_1 F^1_{x'} = \lambda_o \overline{F}^o_{x'} + \lambda_1 \overline{F}^1_{x'}$$

$$\lambda_o F^o_{y'} + \lambda_1 F^1_{y'} = \lambda_o \overline{F}^o_{y'} + \lambda_1 \overline{F}^1_{y'}$$

C) Le rapport $\dfrac{\lambda_o}{\lambda_1}$ est constant le long de l'extrémale .

Supposons que les équations de Lagrange , $G^o = 0$ $G^1 = 0$ possèdent une solution commune , $x = x(t)$, $y = y(t)$ Cette solution est évidemment une intégrale de

$$\lambda_o G^o + \lambda_1 G^1 = 0$$

Pour chaque $\frac{\lambda_o}{\lambda_1}$ et chaque t_1 on pourra déterminer une quantité τ telle que $x(t)$ et $y(t)$ soit la solution unique de l'équation

$$\lambda_o G^o + \lambda_1 G^1 = 0$$

passant par les deux points $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$ et $x_2 = x(t_2)$, $y_2 = y(t_2)$ avec

$$|t_2 - t_1| \leq \tau$$

Si τ a une limite inférieure $\tau_o \neq 0$ quand $\frac{\lambda_o}{\lambda_1}$ varie , la condition $|t_2 - t_1| \leq \tau_o$ entrainera que la courbe $x = x(t)$, $y = y(t)$ est la courbe unique annulant la variation première du problème isopérimétrique et passant par x_1 et x_2 . Le long de cette courbe J^1 a une valeur donnée et il n'est pas possible de lui faire prendre une valeur donnée d'avance . On voit donc que dans ce cas, si l'on se borne aux extrémales continues, le problème n'a pas de solutions . Ces extrémales brisées s'introduisent donc d'elles mêmes .

Le cas extrême est celui où chaque solution de $G^o = 0$ est solution de $G^1 = 0$ sans que les deux équations soient identiques . Pour le calcul pratique on peut mettre les conditions d'Erdmann sous la forme :

$$\begin{vmatrix} F^o_{x'} - \overline{F}^o_{x'} & F^1_{x'} - \overline{F}^1_{x'} \\ F^o_{y'} - \overline{F}^o_{y'} & F^1_{y'} - \overline{F}^1_{y'} \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = - \frac{F^o_{x'} - \overline{F}^o_{x'}}{F^1_{x'} - \overline{F}^1_{x'}} = \frac{F^o_{y'} - \overline{F}^o_{y'}}{F^1_{y'} - \overline{F}^1_{y'}}$$

La première relation permet de calculer $\overline{x}'$, $\overline{y}'$ en un point donné quand on connait x', y' , et la seconde permet de déterminer .

2.- Cas exceptionnel.

Ce cas se présente si $G^o = 0$ et $G^1 = 0$ ont les mêmes intégrales sans être identiques . En prenant x comme paramètre indépendant les deux équations de Lagrange s'écrivent :

$$f^o_{pp}\, y'' = - f^o_y + f^o_{px} + p\, f^o_{py}$$

$$f^1_{pp}\, y'' = - f^1_y + f^1_{px} + p\, f^1_{py}$$

Il faut alors que l'on ait :

$$\frac{f^o_y - f^o_{px} - p\, f^o_{py}}{f^o_{pp}} = \frac{f^1_y - f^1_{px} - p\, f^1_{py}}{f^1_{pp}} = \varphi\,(x,y,p)$$

pour toutes les olutions , et l'équation différentielle du problème s'écrit alors :

$$\left[\lambda_o f_{pp}^o + \lambda_1 f_{pp}^1\right]\left[y'' - \varphi(x,y,p)\right] = 0$$

Les intégrales sont donc celles de l'équation du second ordre $y'' - \varphi(x,y,p) = 0$, et celles de l'équation du premier ordre $\lambda_o f_{pp}^o + \lambda_1 f_{pp}^1 = 0$.

Darboux a démontré que toute intégrale de cette équation est intégrale de $y'' - \varphi(x,y,p) = 0$, ce qui ramène le problème à la recherche des solutions de cette équation . Les mêmes théorèmes que dans le cas général sont encore valables au sujet de l'existence de points anguleux dans le voisinage d'un point anguleux, de l'unicité de ce point sur une extrémale générale . Par une méthode analogue on étend au cas isopérimétrique la théorie des points conjugués .

III.- AUTRES RECHERCHES

& BIBLIOGRAPHIE

On trouvera une bibliographie de la question des extrémales discontinues dans un article de Graves (Transactions of american Mathematical Society - 1930) . Les principales recherches ont porté sur les points suivants :

1°) Discontinuité de la courbe extrémale elle-même. (Razmadzé - Mathemat. Annalen 1925 et Bulletin de l'Université de Tiflis, 1922-23) .

2°) Discontinuité dans l'intégrant . C'est le problème de la marche du rayon lumineux dans un milieu où l'indice de réfraction est variable . (Bliss et Mason - Transactions of American Mathematical Society - 1906) .

3°) Cas des intégrales multiples - Ce cas a été examiné par Kobb dans deux articles des Acta Mathematica - 1892 et 1893 .

4°) Discontinuités introduites par des considérations de frontières ou de limitations de pente . Ces questions ont été traitées entre autres , par :

M.Hadamard - Annales de l'Ecole Normale - 1907

M.Mayer - Math. Annalen - 1878 .