Séminaire de philosophie et mathématiques

D. Van Dalen

La philosophie intuitionniste et ses conséquences mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1980, fascicule 2
« La philosophie intuitionniste et ses conséquences mathématiques », , p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1980___2_A1_0>

La philosophie intuitionniste et ses conséquences mathématiques.

Le projet de décrire la philosophie intuitionniste est assez hasardeux parce qu'on court le risque d'énumérer les principes et la conception de Brouwer, comme s'il s'agissait d'un sujet historique.

Remarquons d'abord que l'intuitionnisme n'est pas à étudier comme on étudie, disons les mathématiques babyloniennes. Aujourd'hui l'intuitionnisme est une source pour les recherches des mathématiques constructives, et particulièrement pour l'analyse des notions fondamentales, comme : preuve, fonction, construction et vérité.

Sans doute, les observations et directives de Brouwer sont les plus pénétrantes. Il est le fondateur unique de l'école constructiviste tout à fait conséquente, et il a dû réfléchir sur toutes les notions fondamentales de la partie correspondante des mathématiques. Aujourd'hui il est difficile de ne pas admirer Brouwer en raison de son analyse des fondements des mathématiques. D'ailleurs il était, quant à sa philosophie, conséquent pendant toute sa vie. On n'avait pas besoin de modifications considérables pour justifier les mathématiques intuitionnistes.

Naturellement on peut distinguer des mouvements différents en philosophie intuitionniste, le plus souvent on s'écartait de certains de ses principes ou convictions philosophiques. En particulier, il existe un sujet de discorde par excellence, le solipsisme. Nous reviendrons sur ce sujet.

L'intuitionisme est, comme philosophie mathématique, une partie d'une philosophie constructiviste. Celle-ci n'est pas en contradiction avec les mathématiques classiques, mais on peut la considérer comme gouvernant un domaine particulier d'objets et méthodes constructives.

Considérons d'abord les idées de Brouwer.

On doit se rendre compte que Brouwer était, du point de vue philosophique, un idéaliste avec des vues proches de celles de (par exemple) Kant et Schopenhauer. Mais, en plus, il était un mystique. Il apparaît de documents posthumes et d'une brochure remarquable : "La vie, l'art et la mystique" (1905) que Brouwer considérait le monde, le monde triste comme il disait, comme exploité et abîmé par l'humanité.

Par exemple, il critiquait les Hollandais pour leurs interventions dans la nature. La construction des digues et des canaux était une perturbation de la balance subtile de la nature. Et, en général, l'homme s'éloignait de l'harmonie naturelle. Toutes les inventions et le progrès matériel et social serviront seulement à éloigner l'homme de l'équilibre de son âme. Il condamnait presque toutes les activités technique, scientifiques ou commerciales qui sont responsables de l'avancement de l'humanité. L'intervention des médecins était condamnée parce que ils violent l'équilibre de la responsabilité psychologique et de la constitution physique. Et, quelle est la valeur de la prolongation de la vie ? "C'est aussi triste de partir de cette vie prématurément qu'en retard".

Selon Brouwer c'est l'intellect qui fait le service diabolique de procurer la liaison entre <u>la fin et les moyens</u>. Aussi l'intellect est-il au service de la volition et du désir. La science est la culmination de ce phénomène. "Une vérité scientifique n'est qu'un certain égarement du désir qui vit exclusivement dans la tête".

L'analyse d'une science introduit toujours une spécialisation si exclusive qu'on a une situation où l'on considère le souvenir de cette science comme indépendant extérieurement. On finit par chercher les fondements de la science en général et de l'épistémologie. Néanmoins l'embarras s'accroît toujours.

En considérant l'homme comme unité fermée en soi, comme le gardien et comme l'origine du contenu psychique changeant, Brouwer conclut que la transmission de la volition et de l'information entre des individus est presque impossible. Le langage peut transmettre des messages simples comme des transactions commerciales ou des instructions pour construire un pont. Mais il est certainement insuffisant pour transmettre les nuances raffinées de la volition. En particulier toutes les émotions esthétiques, religieuses, mystiques échappent à une communication exacte.

Car les mathématiques pures sont des développements libres de l'esprit de l'homme, dit Brouwer ; cela a des conséquences graves et négatives pour la possibilité de formaliser les mathématiques. Ces idées sont antérieures au conflit intuitionnisme -formalisme entre Brouwer et Hilbert, et c'est évident que l'opinion négative de Brouwer concernant la logique est une conséquence directe de cela.

Les conceptions idéalistes de Brouwer le conduisent à considérer les autres hommes comme des projections de son propre esprit. Une citation de 1898 de sa profession de foi : "Le bon Dieu m'a donné l'aspiration de faire ma vie, c'est-à-dire mes images, si belle que possible. Il s'ensuit que je suis jeté dans le monde extérieur qui est une partie de moi-même, effroyable, et que j'essaierai de l'éliminer du monde de l'homme. Je peux nommer à peine l'amour de mes prochains, parce que je déteste la plupart des hommes. Je les reconnais à peine dans quelque part de mes propres pensées et de ma vie spirituelle ; les ombres des hommes qui m'environnent constituent la part la plus affreuse de mes images", cf. (Van Dalen 1978).

Plus tard (1948) Brouwer revient à ce sujet dans "Consciousness, Philosophy and Mathematics". Il ajoute que la postulation des esprits indépendants implique un esprit de second ordre de l'observateur. Tout cela contient une contradiction. Une conséquence de l'absence de la pluralitée des esprits est l'absence d'une science de l'esprit (p. 1240).

Voici le solipsisme de Brouwer, qui présente des conséquences mathématiques sur lesquelles nous reviendrons.

Sans souscrire à tous les principes de Brouwer, on peut lui accorder que l'activité mathématique de l'homme est une activité spirituelle. En fait c'est le point de départ de l'intuitionisme.

Un jour Brouwer définissait les mathématiques comme "la partie exacte de la pensée humaine". Cette définition est bonne, considérant les défauts de toutes les autres définitions.

LES FRUITS MATHEMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE BROUWERIENNE

Il y a deux espèces de mathématiques - la science mauvaise qui aide l'homme dans sa lutte contre la nature et contre ses prochains (mathématique appliquée) - et la science belle et innocente qui résulte du développement libre de l'esprit humain (mathématique pure).

Dans sa thèse de doctorat (1907) Brouwer écrit : "les mathématiques sont une création libre, indépendante de l'expérience. Elles se développent à partir d'une intuition archétype, qu'on peut appeller constante dans la variation et une dans la multiplicité".

Comme Kant, Brouwer accepte l'apriori du temps, mais il refusait l'apriori de l'espace. Le temps est l'origine du nombre, comme le suggérait Schopenhauer. La construction de Brouwer peut être caractérisée comme suit :

"Le premier acte de l'intuitionnisme sépare complètement les mathématiques du langage mathématique, notamment des phénomènes de langage qui sont décrit par la logique théorique, et admet que les mathématiques intuitionnistes sont essentiellement une activité hors du langage, une activité de l'esprit qui a ses origines dans la perception d'un mouvement du temps, c'est-à-dire la désintégration d'une partie de la vie en deux objets distincts, dont l'un tient lieu de l'autre, qui est conservé par la mémoire. Si la dualité née ainsi est dénuée de toute qualité, il reste la forme vide du substrat commun de toutes les dualités. Ce substrat commun, cette forme vide, est l'intuition fondamentale des mathématiques" (1952B).

Nous verrons que la création des systèmes fondamentaux est une activité de l'esprit.

Mais ça ne suffit pas pour la fondation du continu. Et les vues mystiques de Brouwer le conduisent à exploiter l'idée de développement libre de l'esprit. En 1917 il introduisit la suite de choix, une conception discutée pour la première fois par Emile Borel, et annexé et utilisée dans l'intuitionnisme par Brouwer, qui reconnaissait cette curiosité comme le concept fondamental pour sauver le continu. Du point de vue historique la notion de concept "suite de choix" est de Borel, mais pour Borel c'était un objet de nature didactique. C'est Brouwer qui reconnut ses possibilités et son intérêt pour les fondements des mathématiques.

Pour les détails de la théorie des suites de choix je vous renvoie au livre de Troelstra : "Choice Sequences".

Une des conséquences importantes de la philosophie solipiste de Brouwer est le concept du sujet créatif. Car l'homme, selon Brouwer, est une unité autonome, il ne peut qu'accepter des vérités expérimentées par lui-même. Ainsi, pas d'autorité, pas de foi. La conséquence de ce point de vu est la fusion des concepts "je sais A" et "A est vrai" ; la sémantique est identifiée avec l'épistémologie. Les traces du sujet créatif sont discernables dans les publications de Brouwer depuis son article "Le caractère suspect des principes logiques" (1908 C), d'abord sous la forme de problèmes non résolus (cette méthode est aussi acceptable pour des constructivistes qui refusent la philosophie de Brouwer), mais plus tard Brouwer introduisit les suites de choix dépendant de l'activité (ou de l'expérience) du sujet créatif. Depuis 1948 Brouwer a développé la théorie du sujet créatif de telle manière qu'il pouvait réfuter certains principes des mathématiques classiques dans un sens fort. C'est-à-dire auparavant l'état de ces problèmes était : "à ce moment je n'ai pas une démonstration de A", mais les méthodes fortes impliquent "à ce moment j'ai une démonstration de $\neg A$".

Le concept du sujet créatif a été étudié par Kreisel et Kripke, et Kreisel a proposé des axiomes pour cette théorie.

Disons que nous parlons d'une théorie comprenant l'arithmétique, et que $\vdash_n$ A signifie "J'ai une démonstration de A au moment n" (ou, "jai prouvé la vérité de A au moment n").

Les axiomes sont $\vdash_n A \vee \neg \vdash_n A$, $\vdash_n A \rightarrow \vdash_{n+m} A$, $A \leftrightarrow \exists x \vdash_x A$

Utilisant ces axiomes on peut déduire des contre-exemples de Brouwer, comme $\neg \forall x \ (x \neq 0 \rightarrow x \neq 0)$
$(\neg \forall x \in \mathbb{R} \ \ (x \neq 0 \rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \ (\ |x| > r > 0)$[Troelstra, 1969].

Kripke a introduit un principe équivalent à ces axiomes, sans mentionner le sujet créatif. C'est le <u>Schéma de Kripke</u>, sous la forme

$$\exists f (A \leftrightarrow \exists n \quad f(n) \neq 0) \qquad (\text{où} \quad f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N})$$

Comme nous verrons on peut le considérer comme une espèce de principe de compréhension, ou, selon Troelstra, comme un principe d'énumération.

Les conséquences du Schéma de Kripke sont considérables, par exemple, on peut réduire les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ à des fonctions de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. En mathématiques classiques cet énoncé est trivial : chaque ensemble possède une fonction caractéristique. Mais en mathématiques intuitionnistes la présence d'une fonction caractéristique entraîne la décidabilité de l'ensemble :

$$\forall x\ (x \in A \longleftrightarrow f(x) \neq 0)$$

$$\frac{\forall x\ (f(x) = 0 \vee f(x) \neq 0)}{\forall x\ (x \in A \vee x \notin A).}$$

En utilisant le Schéma de Kripke on obtient $\forall x \exists f (x \in A \longleftrightarrow \exists y\ f(y) \neq 0)$; maintenant appliquons l'axiome du choix.

$\exists g\ \forall x (x \in A \longleftrightarrow \exists y (g(x,y) \neq 0))$

Alors $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ représente l'ensemble A.

Ceux qui connaissent les théorèmes de Gödel peuvent regarder cette théorie avec méfiance, parce qu'il y a un parallélisme superficiel entre le prédicat de démonstrabilité de Gödel, Prov. (n,A), et le prédicat $\vdash_n$ A.

Cependant, avec des méthodes de la théorie des modèles, j'ai démontré que la théorie du sujet créatif, n'est pas contradictoire et, en plus, que la théorie du sujet créatif est une extension conservative de la théorie du Schéma de Kripke, [Van Dalen , 1978 a].

Maintenant continuons à considérer le concept fondamental de "démonstration". Il n'y pas a ez de précisions de Brouwer au sujet de la démonstration mathématique. Cependant nous pouvons dire qu'une démonstration, pour Brouwer, était une construction. Ce thème a été élaboré par Heyting et plus tard par Kreisel. Ils ont donné une interprétation systématique des connecteurs logiques, comme suit :

$\wedge$: a est une démonstration de $A \wedge B$ ssi $(a)_1$ est une démonstration de A et $(a)_2$ est une démonstration de B

$\vee$: a est une démonstration de $A \vee B$ ssi $(a)_1 = o$ et $(a)_2$ est une démonstration de A ou $(a)_1 \neq o$ et $(a)_2$ est une démonstration de B,

$\rightarrow$: a est une démonstration de $A \rightarrow B$ ssi $(a)_1$ est une construction qui transforme chaque dém. b de A en une dém. de B, et $(a)_2$ établit ce fait.

où il y a une bijection $\langle a,b\rangle$ des couples de constructions sur les constructions et des projections $(a)_1$, $(a)_2$, telles que

$\langle (a)_1 , (a)_2\rangle = a \quad (\langle a,b\rangle)_1 = a \quad (\langle a,b\rangle)_2 = b$

$\exists$: a est une démonstration de $\exists x\, A(x)$ ssi $(a)_1$ est une démonstration de $A((a)_2)$

$\forall$: a est une démonstration de $\forall x\, A(x)$ ssi $(a)_1$ est une construction qui transforme chaque b en une dém. de A(b), et $(a)_2$ établit ce fait.

Tout cela est l'interprétation de la démonstrabilité.

Remarquons que la clause " et $(a)_2$ étalbit ce fait " est justifiée. On peut la comparer avec le problème de "Correctness of Programs" : on y construit un programme pour calculer quelque chose, mais il reste la tâche d'établir la justesse. Cependant cette clause, proposée par Kreisel, est un sujet de discorde. On peut défendre le point de vue que cette clause est superflue. En tous cas dans l'application pratique elle n'est pas très importante.

L'interprétation passe sous silence la question : "Qu'est ce que c'est une construction ?" . Naturellement ce fait est en accord avec les vues intuitionnistes : il n'existe pas une caractérisation ou description définitive du concept "Construction". Malheureusement en l'état actuel du domaine de la théorie des démonstrations ce n'est pas satisfaisant. Malgré les efforts de Kreisel, Troelstra, Goodman et récemment Beeson, on n'a pas trouvé la codification adéquate et en rapport avec l'esprit de l'intuitionnisme. Le but de la théorie des constructions et démonstrations est une analyse et une réduction de la notion "construction". Par exemple, " a est une démonstration de A " est conceptuellement une relation simple et directe, qu'on peut décider pour soi -même. "On reconnait une démonstration quand on en vit une". Quand on en doute, ce n'est pas une démonstration. On voit le point critique de cette interprétation : pour l'implication il s'agit d'une condition imprédicative. Pour expliquer " a est une démonstration de $A \to B$ " on a besoin de la quantification sur toutes les démonstrations. La solution de cette difficulté n'est pas évidente. On peut accepter ce cas d'imprédicativité comme innocent, ou on peut chercher une solution hiérarchique, cf.(Troelstra 1969), (Beeson 1979), (Goodman 1970).

Cependant nous appliquons la notion intuitive de démonstration pour étudier l'axiome du choix.

Si on a une démonstation p de $\forall n \, \exists a \; A(n,a)$, où a appartient à une classe quelconque, la BHK-interprétation nous montre que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, p(n) est une démonstration de $\exists a \; A(n,a)$. Et alors, $(p(n))_1$ est une démonstration de $A(n,(p(n))_2)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire $\lambda n.(p(n))_2 = f$ est une fonction de choix. La définition de la relation " - est démonstration de - " dit que $\lambda n. \, (p(n))_1$ est une démonstration de $\forall n \; A(n_2 \, f(n))$, et $<\lambda n.(p(n))_1 \, , \, \lambda n.(p(n))_2>$ est une démonstration de $\exists f \, \forall n (n,f(n))$.

Enfin, $\lambda p.<\lambda n.(p(n))_1 \, , \, \lambda n.(p(n))_2>$ est une démonstration

$$\text{de } \forall n \, \exists a \; A(n,a) \longrightarrow \exists f \, \forall n \; A(n, \, f(n)).$$

Ce raisonnement semble si simple qu'on pourrait espérer démontrer l'axiome du choix en général. Mais le contre-exemple suivant réfute cela :

$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \qquad (r < n)$. est vrai, une application de l'axiome du choix entraîne :

$$\exists f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \forall r \in \mathbb{R}\ (f(r) < n).$$

Selon le théorème célèbre de Brouwer toutes les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues. Alors f est continue, c'est-à-dire constante. Contradiction.

Le paradoxe n'est qu'apparent. La proposition $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists n \in N$ $(r < n)$ sans abréviations est $\forall r\ (r \in \mathbb{R} \to \exists n(n \in \mathbb{N} \wedge r < n))$. Ce qui implique que le nombre naturel n dépend, non pas seulement de r, mais aussi de la démonstration de $r \in \mathbb{R}$.
Cette démonstration n'est pas autre chose qu'une suite de Cauchy.
Maintenant le paradoxe disparait.

Les conséquences les plus remarquables sont sans doute

1. Chaque fonction réelle, définie sur $[0,1]$, est uniformément continue (Brouwer, 1924).
2. Le continu ($\mathbb{R}$) n'est pas décomposable (super-connected), c'est-à-dire : $\mathbb{R} = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset \to A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ (Brouwer 1926).
3. On ne peut ordonner le continu (Brouwer 1950)
4. Principe d'uniformité : $\forall X \in \mathbb{N}\ \ \exists x \in \mathbb{N}\ A(X,x) \to \exists x\ \forall X A(X,x)$

Ce principe, mentionné en dernière place est une conséquence du schéma de Kripke, du principe de continuité faible, WC, et de l'axiome du choix, AC - NF, (Van Dalen 1977).

D'abord on réduit les ensembles X à des fonctions de Kripke, $X \longmapsto f_X$ - avec $n \in X \longleftrightarrow \exists y\ f_X\ (\langle x,y\rangle) \neq 0$, alors on a $\forall f\ \exists x\ A(f,x)$
Par une application de WC - $\forall f\ \exists x\ A(f,x) \to \forall f \exists xy\ \forall g(\bar{f}y = \bar{g}y \to A(g,x))$ $(\bar{f}\ y = \langle f(0),\ f(1),\ \ldots,\ f(y-1)\rangle)$ - on obtient que pour chaque f il existe un segment initial, $\bar{f}\ y$, tel que toute extension g de ce segment satisfait $A(g,x)$ pour le même x .

Maintenant réalisons que chaque X peut être représenté par un nombre infini de fonctions de Kripke.

0	0	0	0	0	2	......	4 ε X	
3	3	3	1	3	3	......	3 ε X	
0	0	0	0	0	0	......	?	
0	0	5	7	0	0	......	1 ε X	
1	0	1	1	1	1	......	0 ε x	s'il contient un non-zéro

On peut déplacer le plan et ajouter des zéros

....			....							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	....
0	0	0	0	3	3	3	1	3	3	....
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	....
0	0	0	0	0	0	5	7	0	0	....
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	....

ici un segment initial de zéros de longueur 10.

Par conséquent cette fonction binaire est représentée, grâce au procédé de Cantor, par une fonction avec un segment initial de zéros, de longueur arbitraire.

Supposons que ∅ détermine le nombre n_0, alors chaque ensemble représenté par une fonction de Kripke à segment initial <00....0>, de longueur suffisante, satisfait $A(X, n_0)$ également.

Le principe d'uniformité affirme le caractère indéterminé des ensembles. Si l'on peut déterminer pour chaque ensemble X un nombre naturel (quelque chose de biendéterminé), on a une construction qui ajoute un nombre à un ensemble. Mais parce que les ensembles sont inséparables, c'est-à-dire, c'est à peu près impossible de distinguer les ensembles, il faut qu'on puisse assigner le même nombre a tous les ensembles. Dans un sens l'univers des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ est extra-ordinairement riche - du point de vue de la théorie (Troelstra, 1977 a).

Revenons aux fondements de l'intuitionnisme. Est-il nécessaire de souscrire à toutes les doctrines de Brouwer, afin de défendre une version des mathématiques intuitionnistes ? Non : On peut refuser le point de vue solipiste, en conservant la conception de mathématiques comme un agrégat des constructions mentales. Le point de vue intersubjectif est parfaitement tenable. Dans ce cas il y a un motif pour introduire une théorie du langage et, en particulier, une logique. Heyting, aussi bien que Brouwer ont avancé que la transmission des volitions par le langage est essentiellement inexacte. Il est impossible de codifier exactement les méthodes linguistiques de transmission, ou plutôt il est essentiellement impossible de codifier le raisonnement humain - selon Brouwer et Heyting ; donc la logique est essentiellement incomplète. Quel est le problème et le sens d'une logique intuitionniste ou constructive ? Un principe logique est un schéma qui affirme l'applicabilité des certaines constructions. Alors, pour un intuitionniste les lois de la logique de Heyting sont sans défaut, parce qu'elles symbolisent des schémas de constructions. Peut être doit on faire une exception pour la loi "ex falso" : $\perp \rightarrow A$ pour chaque A, mais cela est en dehors de notre sujet.

Naturellement il y a le problème de la sémantique de la logique intuitionniste. Comme j'ai indiqué, la sémantique naturelle est celle des constructions. D'ailleurs il y a des sémantiques plus ou moins artificielles de Kripke, de Beth et la sémantique topologique (de Tarski, Kuratowski et Stone). Ces sémantiques sont très élégantes et applicables aux problèmes mathématiques et métamathématiques, mais en général on doit appliquer des méthodes non-intuitionnistes dans cette théorie de modèles. Les résultats et les généralisations, cependant, sont intéressantes et esthétiques. La généralisation de la théorie des topos est naturellement bien connue à Paris.

En plus, il y a des "sémantiques" non-standard de Kleene et de Gödel. Plus précisément, Kleene a proposé une interprétation fondée sur la théorie des fonctions récursives (Kleene 1952), (Troelstra 1973).

Sans traiter en détail la "réalisibilité" de Kleene, je veux signaler un résultat important et imprévu.

Depuis les innovations de Herbrand et Gëdel il y a une caractérisation du concept "algorithme" . La notion précise et formalisée d'algorithme est celle de fonction récursive. Les fonctions récursives peuvent être définies par des schémas ou par des machines de Turing, etc. On peut identifier les deux concepts : calculabilité algorithmique humaine et calculabilité par des fonctions récursives. Cette identification est la "thèse de Church" ou la "thèse de Turing". On ne peut pas formuler la thèse de Church en mathématiques classiques, parce qu'on ne peut formuler ce qu'est un algorithme. Au contraire, dans l'intuitionisme on peut formuler la thèse de Church parce que $\forall x \exists ! y$ signifie qu'il y a une construction transformant x dans y .

Alors la thèse de Church peut être formulé comme
$\forall x \exists y A(x,y) \rightarrow \exists e \forall x (\{e\} x\downarrow \wedge A(x, \{e\} x))$, (*) , ici $\{e\}$ est la fonction partiellement récursive codée, et $\{e\} x\downarrow$, pour chaque x, signifie que $\{e\}$ est totale.

La réalisibilité de Kleene nous permet d'établir la consistance de l'arithmétique et la thèse de Church.

Plus précisément, il y a plusieurs formulations de la thèse de Church, et actuellement c'est une routine métamathématique d'établir la consistance des théories intuitionnistes (constructives) et de la thèse de Church. Cela est d'une importance grave, parce que cela nous permet de considérer l'univers des fonctions de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui consiste des fonctions récursives. L'école constructive russe, part de ce point, mais ils utilisent un principe non valable intuitionnistiquement, le principe de Markov, qui dit en langage informel s'il est impossible qu'une machine de Turing ne termine pas un calcul, alors elle termine ce calcul.

En général : MP : $\forall x\ (A\,x \vee \neg A\,x) \rightarrow (\neg\neg\exists x\, A\,x \rightarrow \exists x\, A\,x)$.
Une"interprétation" semblable est la Dialectica interprétation de Gödel. Toutes les deux ne sont pas exactes, c'est-à-dire il y a des propositions valables dans cette interprétation, mais pas valables intuitionnistiquement. Cependant il y a des applications importantes dans les théories intuitionnistes.

Depuis les publications de Bishop il y a une autre école constructiviste mathématique. L'école de Bishop se considère comme une école vraiment mathématique - pas de folies métamathématiques. L'école de Bishop rejette les motivations Brouweriennes, et aussi les suites de choix. Dans un certain sens on peut considérer leur pratique comme sub-intuitionniste.

Ils fondent leurs mathématiques sur un concept de construction non-formalisée et, alors, ils n'ont pas besoin des suites de choix. On peut consulter le livre de Bishop pour apprécier la puissance et l'élégance de ses méthodes, (Bishop 1967).

Cependant on a proposé des systèmes pour codifier les mathématiques de Bishop et on a fait des recherches métamathématiques, notamment Feferman, Friedman et Beeson, cf. (Feferman 1979).

Avant de finir ce discours je veux mentionner une tendance plus ou moins récente. Le continu intutionniste a des propriétés qui présentent des invonvénients. Par exemple, on peut indiquer une fonction continue f, tel que $f(o) < o$ et $f(1) > o$, mais elle n'a pas un zéro entre 0 et 1. On pourrait dire que cela est un défaut de $\mathbb{R}$, alors il se pose la question : peut-on étendre $\mathbb{R}$ de telle façon que le résultat soit semblable au continu classique ?

On a proposé diverses extensions, nombres réels négatifs, non oscillants, etc. pour modifier la condition de Cauchy, par exemple :

$$\forall k \neg\neg \exists n \forall p \, (|a_n - a_{n+p}| < 2^{-k}).$$

Récemment, Troelstra a systématisé ces extensions par la méthode de Dedekind, (Troelstra 1980).

Il introduit $\mathbb{R}^e$ comme

$S \subseteq Q$; c'est une coupure de Dedekind faible si

$\exists s (s \in S), \; \exists t (t \notin S)$

$\forall r \, s (s < r \wedge \neg\neg \, r \in S \rightarrow s \in S)$

$\forall s \in S \; \exists s' \in S \; (s < S')$

On obtient les nombres réels en ajoutant

$$\forall r \, s \, (r < s \longrightarrow r \in S \quad s \notin S).$$

Les coupures faibles déterminent les nombres réels étendus ($\mathbb{R}^e$).

$\mathbb{R}^e$ a des propriétés remarquables.

Par exemple :

(i) Chaque fonction de $\mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}$ est constante sous l'hypothèse WC du continu faible, ou sous la thèse de Church.

(ii) Sous l'hypothèse d'Uniformité (UP), chaque recouvrement dénombrable de $[0,1] \subseteq R^e$ contient un sous-recouvrement d'un élément.

(iii) Sous l'hypothèse de WC chaque espace de Banach séparable avec norme dans $\mathbb{R}$ est réflexif.

BIBLIOGRAPHIE

M. Beeson

1979 A Theory of Constructions and Proofs. Department of Mathem. Utrecht, preprint no.134

E. Bishop

1967 Foundations of Constructive Mathematics. New-York.

L.E.J. Brouwer

1905 Leven, Kunst en Mystiek. Delft.

1907 Over de Grondslagen der Wiskunde. (Sur les fondements de mathématique). Collected Works I, pp 11-101.

1924 Beweis dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist.Cf. Collection Works, Vol.I, pp.286-290

1948 Consciousness, Philosophy and Mathematics. Proc. 10^{th} Intern. Congress of Philosophy, Amsterdam pp 1235-1249.

1950 Sur la possibilité d'ordonner le continu. C.R.Ac. Sci. Paris. pp 349-350.

1952 b Historical background, principles and methods of intuitionism. South African Journal of Science pp 139-146.

D. Van Dalen

1977 The use of Kripke's Schema as a reduction Principle. Journal of Symbol Logic, pp 238-240.

1978 Brouwer : the genesis of his intuitionism. Dialectica. pp 291-303.

1978 a An interpretation of intuitionistic analysis. Ann. Math. Logic. pp 1-43.

S. Feferman

1979 Constructive theories of functions and classes. Logic Colloqium' 78 (eds. M. Boffa, D. van Dalen, K. McAloon) pp 159-224, Amsterdam.

N. Goodman

1970 A theory of constructions equivalent to arithmetic. Intuitionism and Proof Theory, (eds. A. Kins, J. Myhill, R.E. Vesley) pp 100-120. Noth-Holland Publ. Co., Amsterdam.

S.C. Kleene

1952 Introduction to Metamathematics. North-Holland. Publ. Co., Amsterdam.

A.S. Troelstra

1969 Principles of Intuitionism. Springer Lecture Notes 95.

1973 Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis. (ed.) Springer Lecture Notes 344.

1977 Choice Sequences. Oxford University Press.

1977 a Axioms for intuitionistic mathematics incompatible with classical logic. in Logic, Foundations of Mathematics and Computability theory. Reidel, Dordrecht pp 59-84.

1980 Intuitionistic extensions of the reals. Nieuw Archief voor Wiskunde. pp 63-113 .