

SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

CLAUDE BARDOS

Historique sommaire de l'équation de Kortweg et de Vires. Un exemple de l'interaction entre les mathématiques pures et appliquées

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1983, fascicule 13

« Historique sommaire de l'équation de Kortweg et de Vires. Un exemple de l'interaction entre les mathématiques pures et appliquées », , p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983__13_A1_0

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Historique sommaire de l'équation de Kortweg et de Vires. Un exemple de l'interaction entre les mathématiques pures et appliquées.

par C. Bardos. ⁽¹⁾.

I. Introduction.

Le but de cet exposé est de montrer comment travaillent certains mathématiciens appliqués en insistant sur un des aspects les plus importants et les plus motivants : les mathématiques appliquées sont une sorte de carrefour où interagissent plusieurs disciplines : celles que l'on rencontre le plus sont : l'analyse mathématique classique dans son ensemble, la physique et les sciences de l'ingénieur, l'analyse numérique, tant comme réflexion théorique que comme utilisation des ordinateurs, la biologie, la météorologie, l'économie et bien d'autres encore. Ce qui est frappant c'est que l'interaction s'effectue en général dans les deux sens. Par exemple, les mathématiques fournissent l'outil opérationnel pour décrire les problèmes physiques, mais inversement les problèmes physiques conduisent à développer la mathématique et à en comprendre de nouveaux aspects. Cette double interaction est encore plus systématique pour ce qui concerne l'utilisation des calculateurs. Il est bien évident que la première utilisation des calculateurs a été de résoudre des problèmes appliqués mais très vite est apparue l'idée suivante : il pouvait être utile d'avoir recours aux calculateurs électroniques pour comprendre des problèmes théoriques fondamentaux et dégager des conjectures à démontrer, le calculateur est aussi devenu un outil expérimental pour la mathématique. Les mots "très vite est apparue" réfèrent en particulier à un paragraphe d'un rapport de Von Neuman écrit en 1946 intitulé "On the principle of large scale Computing Machines". (Ce rapport a suivi la mise au point de la première machine électronique et a servi de base à la réalisation de la génération suivante). Von Neumann écrit (je résume).

⁽¹⁾ Université Paris-Nord Avenue J.B. Clément 93430 VILLETANEUSE et Ecole Normale Supérieure 45 Rue d'Ulm 75005 PARIS.

"Les méthodes analytiques dont on dispose actuellement semblent inappropriées pour les problèmes soulevés par les équations aux dérivées partielles non linéaires . Cependant les calculateurs à haute vitesse pourront nous fournir les suggestions heuristiques qui sont nécessaires dans tous les domaines des mathématiques pour réaliser de "vrais progrès", et on peut espérer obtenir ainsi des avancées théoriques importantes".

Pour essayer d'exposer ces différentes démarches et les nombreuses interactions qui existent entre elles, je propose de faire l'historique d'une des équations de la physique mathématique. Plusieurs exemples se prêtent bien à cette demande (en particulier les équations de Navier Stokes ou les équations elliptiques non linéaires en relation avec la mécanique des solides et les surfaces minimales), mais il m'a semblé que l'on pouvait obtenir l'exposé le plus significatif en regardant l'historique de l'équation de Kortweg et De Vries.

II. Apparition et début de l'histoire de l'équation de Kortweg et De Vries.

L'histoire commence en 1834 et on en trouve une synthèse remarquable dans un article de Zabusky publié dans le Journal of Computational Physics en 1981 [6] ⁽¹⁾.

Scott Russel était un ingénieur naval et il observa (en 1834) que l'on pouvait créer à la surface de l'eau d'un canal une onde solitaire régulière se propageant à vitesse constante. Il en fit une description délicate dans les Proceedings of the Royal Society of Edinburgh [3]. Il raconte que :

⁽¹⁾ Contrairement aux documents d'histoire des mathématiques que j'ai eu l'occasion de consulter et qui commencent en général à Pythagore pour s'arrêter au mieux à Hilbert, je vais décrire un phénomène scientifique qui a commencé en 1834 et sur lequel travaillent actuellement un grand nombre de mathématiciens.

Cette onde fut créée par l'arrêt brutal d'une péniche tirée par deux chevaux et que lui-même l'a suivie à cheval à une vitesse de 8 à 9 miles à l'heure durant deux miles, jusqu'à ce que les méandres du canal détruisent sa forme.

L'étape scientifique suivante consista à expliquer mathématiquement ce phénomène. La première idée consista à utiliser les équations de la mécanique des fluides incompressibles (dues à Navier et à Stokes). On obtient un système dont les inconnues sont la vitesse du fluide $u(x,y,z,t)$ et la hauteur du niveau d'eau $h(x,y,z,t)$. Pour se rapprocher de l'observation de Scott Russel on suppose que le canal est unidimensionnel, à fond plat et peu profond. On obtient ainsi les équations :

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + uu_x + gh_x = 0$$

h désigne la hauteur d'eau et u la vitesse. La première équation exprime la conservation de la masse d'eau et la seconde n'est autre qu'une version continue de la relation $\vec{f} = m\vec{\gamma}$ (g désigne l'accélération de la pesanteur). Ensuite on fait une analyse dimensionnelle du système (1) en introduisant des paramètres liés à l'amplitude de l'onde ; ceci conduit à un développement asymptotique dont le terme principal est une inconnue $w(x,t)$ destinée à satisfaire l'équation :

$$(2) \quad w_c(x,t) = \frac{c}{2} \frac{1}{ch^2 \frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct)}$$

La dérivation de l'équation (2) fut faite en 1895 par Kortweg et De Vries et elle porte le nom de ses auteurs. Kortweg et De Vries observèrent immédiatement que l'équation (2) admet des solutions ondes solitaires :

$$(3) \quad w_c(x,t) = \frac{c}{2} \frac{1}{ch \frac{2\sqrt{c}}{2} (x-ct)}$$

qui correspondent bien au phénomène observé par Scott Russell. En particulier on remarque que l'onde est d'autant plus grande que sa vitesse est plus élevée (cf fig.1).

Il est intéressant de remarquer comment intuitivement les deux termes

$w \frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x^3}$ opèrent de manière contradictoire pour générer une onde solitaire : l'équation $\frac{\partial w}{\partial t} + 6w \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ sert à décrire des phénomènes

produisant des chocs, par exemple des vagues qui se brisent selon la figure 2, tandis que l'équation $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$ sert à décrire des phénomènes qui se dispersent selon la figure 3. Aussi c'est la compétition entre ces deux effets qui conduit à l'existence d'une onde à forme constante. Une question essentielle laissée en suspend par Kortweg et de Vries est l'extraordinaire stabilité du phénomène, observé par Scott Russel. Ceci fut expliqué que dans le courant des années 60. On va essayer de décrire cette démarche.

Au cours des années 1950, suivant les idées de Von Neumann, Fermi, Pasta et Ulam utilisent le MANIAC de Los Alamos pour étudier le comportement asymptotique (pour des grandes valeurs du temps) d'un système couplé de 64 équations différentielles ordinaires non linéaires qui décrivait le mouvement de 64 masses reliées par des ressorts non linéaires (la force de rappel du ressort est une fonction non linéaire de l'élongation du ressort). La motivation de ce problème était la suivante : les équations servaient de modèle à la propagation de l'énergie dans les différentes fréquences d'un cristal en vibration. La conjecture naturelle était que l'énergie se répartit de manière égale entre toute les fréquences (un tel phénomène est appelé thermalisation). Les calculs faits par Fermi Pasta et Ulam montrèrent que la thermalisation ne se produisait pas et que au contraire on obtenait des solutions périodiques, ou presque périodique. Ceci fut expliqué mathématiquement beaucoup plus tard par les travaux de Kolmogorov Arnold et Moser sur les systèmes hamiltoniens.

Une des différence fondamentale entre le modèle de Fermi Pasta et Ulam et l'équation de Kortweg et de Vries est la suivante :

Le F.P.U. met en jeu un système de 64 équations différentielles ordinaires tandis que KDV est une équation aux dérivées partielles. Mais pour calculer numériquement sa solution la seule méthode consiste à la discrétiser. C'est-à-dire à remplacer la fonction $u(x,t)$ par une suite de valeur $u(i,n)$ qui approchent la valeur de la fonction au point

$ih, n \Delta t$, (h est le pas d'espace et Δt le pas de temps). Ensuite on remplace la dérivée par une différence en écrivant par exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \approx \frac{u(i+1, n) - u(i, n)}{2h}$$

On procède de même pour les dérivées d'ordre plus élevé. On obtient ainsi comme approximation d'un phénomène continu, un phénomène discret et donc un système d'équations différentielles non linéaires.

En 1965 Kruskal, Miura et Zabusky remarquèrent une grande analogie entre le F.P.U. et le système obtenu en discrétisant K. dV Ils entreprirent de faire des calculs numériques sur une I.B.M. 36050 et observèrent les résultats suivants :

(1) Dans le cas où les données initiales sont périodiques en espace, la solution reste périodique en espace mais est par rapport au temps une fonction presque périodique.

(2) Dans le cadre de fonction tendant vers zéro à $\pm\infty$ on a une remarquable stabilité des ondes solitaires. Si on part d'une solution composée de plusieurs ondes solitaires, les plus lents étant à l'avant, on voit les plus rapides rattraper les plus lents, pendant un certain temps ils sont mélangés, ensuite les plus rapides émergent et la solution se décompose à nouveau en une somme d'ondes solitaires. Cette remarquable stabilité, value aux ondes solitaires le nom de soliton (cf fig. 4).

Bien entendu les observations de Kruskal Miura et Zabusky étaient numériques et ne contenaient pas l'amorce d'une démonstration. Une méthode de démonstration fut proposée par Lax en 1968. A l'aide d'un opérateur différentiel $H(t)$ défini par :

$$H(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + w(x, t),$$

Lax montra qu'il existait un changement d'inconnues qui transformait l'équation de K.D.V. en une équation linéaire de la forme

$$\frac{d}{dt} U(\xi, t) = A(\xi) U(\xi, t)$$

dont les solutions pouvaient être calculer explicitement. Lax ainsi obtint en 1968 l'outil nécessaire pour que soient démontrés les résultats observés par Kruskal Miura et Zabusky. Il est maintenant particulièrement intéressant de décrire les retombés, tant en physique qu'en mathématiques de cette démarche.

III. Développement de la méthode en physique.

On a décrit un exemple qui possède d'intéressantes propriétés asymptotiques : solitons, solutions presque périodiques, il possède d'autre part une structure mathématique particulière : il est transformable en une équation linéaire, cette structure mathématique permet de comprendre et de démontrer les propriétés des solutions. Ceci en fait un exemple très particulier, mais depuis les années 60 on a découvert (ou construit) un grand nombre d'équations qui d'une part possèdent des propriétés mathématiques analogues, et d'autre part interviennent pour la description des problèmes physiques. Voici les plus célèbres :

L'équation de Sine Gordon $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \sin W$ qui intervient dans l'étude de la dislocation des cristaux, dans la propagation d'ondes dans des cristaux magnétiques et dans la description de l'effet Josephson,

L'équation de Boussinesq.

$$W_t + W_{xx} - 6(W^2)_{xx} - W_{xxxx} = 0$$

qui décrit des phénomènes d'ondes de surfaces se propageant en deux directions,

L'équation de Schrodinger non linéaire :

$$iW_t + W_{xx} + k|W|^2 W = 0$$

qui décrit en particulier les ondes de Langmuir dans les plasmas, la propagation de pulsation de chaleur dans les solides. Les solutions stationnaires autofocalisantes dans un faisceau laser et l'effet Ginzburg Landau.

L'équation de Born Infeld

$$W_{tt}(1+W_t^2) - 2W_x W_t W_{xt} - W_{xx}(1-W_t^2) = 0$$

qui fut obtenue par Born comme une modification non linéaire de l'équation de Maxwell, etc ...

Pour tous ces exemples le programme mis au point pour l'équation de K.d.V. peut être partiellement ou totalement adapté. On obtient successivement l'existence d'ondes solitaires, leur stabilité et le comportement asymptotique des solutions générales en faisant intervenir une linéarisation du type méthode inverse. On a ainsi des outils pour expliquer des phénomènes physiques.

IV. Intérêt mathématique.

Une des propriétés essentielle de l'équation de K.d.V. a été l'existence d'une transformation permettant de la linéariser et on a vu que cette propriété était vraie pour les autres équations, on peut donc essayer d'expliquer ce phénomène. Pour les équations différentielles ordinaires on dispose d'un théorème. Le théorème de Liouville permettant d'affirmer l'existence d'une linéarisation globale.

Plus précisément on considère un système différentiel à $2n$ degrés de libertés :

$$(4) \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q}(p,q) \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)$$

où (p,q) désigne un point de l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On dit que (4) est un système Hamiltonien. On dit que la fonction $(p,q) \rightarrow F(p,q)$ est une intégrale première, si pour toute solution de (4) on a $F(p(t),q(t)) = \text{cte}$. Alors s'il existe n intégrales premières linéairement indépendantes et en involution, le système (4) est globalement linéarisable. (On dit que deux intégrales premières E et F sont en involution si elles vérifient la relation :

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = 0$$

Il est très facile de voir que toute solution de K.d.V vérifie les relations

$$\frac{d}{dt} \int u(x,t) dx = \frac{d}{dt} \int u^2(x,t) dx = 0$$

On a donc deux intégrales premières triviales. Kruskal et ses collaborateurs trouvèrent ensuite deux autres invariants, puis une relation de récurrence permettant d'en construire une infinité. Ensuite en 1971 Zakharov et Fadeed découvrirent que l'on pouvait donner une formulation généralisée de la notion de système Hamiltonien et d'intégrale en involution, adaptée non pas à des équations différentielles ordinaires, mais à des équations aux dérivées partielles dont l'inconnue était donc une fonction. Ils remarquèrent que dans ce formalisme l'équation de K.d.V. était un système hamiltonien ayant une infinité d'intégrales premières en involution. La même remarque est valable pour les autres exemples cités aux § III. On a donc une conjecture : le théorème de Liouville se généralise aux équations aux dérivées partielles, et on a des exemples qui satisfont les hypothèses et les conclusions d'un tel théorème ; on a donc une motivation pour préciser l'énoncé et démontrer un tel théorème. (Ce qui actuellement n'est pas encore fait).

Pour terminer je voudrais montrer sommairement comment l'équation de K.d.V. qui a été introduite en mécanique des fluides joue maintenant un rôle grandissant en géométrie algébrique.

On part de deux constatations.

(1) le soliton

$$W(x,t) = \frac{c}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct)}$$

est une fonction régulière pour x réel mais pour $x = (ct + i(2k+1)\pi/2) = \sqrt{\frac{2}{c}}$

on a,

9

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct) = \cos^2(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$$

ainsi $W(x,t)$ se prolonge en une fonction méromorphe, à pôles doubles, dans le plan complexe.

(2) Pour essayer de se rapprocher du théorème de Liouville en dimension finie on peut chercher maintenant des solutions dépendant d'un nombre fini de degré de liberté : On montre alors (Calogero [1], Choudnovsky [2]) que si $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ sont N fonctions réelles de t .

$$W(x,t) = -2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{(x-x_j(t))^2}$$

est solution de K.d.V. pourvu que les points $x_j(t)$ soient solution du système différentiel ordinaire.

$$(6) \quad x_j(t) = 6 \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-2} \quad 1 < j < N$$

et restent sur la variété définie par la relation :

$$(7) \quad \sum_{k \neq j} (x_j - x_k)^{-3} = 0.$$

On montre que pour que le système (6) préserve la relation (7) sur un ensemble non vide il faut et il suffit que N soit de la forme $n(n+1)/2$ et pour cela on utilise une relation fonctionnelle compliquée :

$$(8) \quad \phi(x) \phi'(y) + \phi'(x) \phi(y) = \phi(x-y) (\phi'(x) + \phi'(y)) - \phi'(x-y) (\phi(y) - \phi(x))$$

Cette relation est valable non seulement pour $\phi(x) = x^{-2}$, mais aussi pour toute fonction elliptique. On introduit par exemple la fonction elliptique. On introduit par exemple la fonction elliptique P solution de l'équation différentielle $p'^2 = 4p^3 - g_e p - g_z$ et on montre que la fonction

$$W(x,t) = - \sum_{j=1}^N P((x-x_j(t))/2)$$

est solution de K.d.V. si et seulement si les points $x_j(t)$ sont solution du système différentiel ordinaire :

$$(9) \quad x_j = 3 \sum_{k \neq j} P((x_j - x_k)/2)$$

avec la condition supplémentaire.

$$(10) \sum_{k \neq j} P'((x_j - x_k)/2) = 0 \quad 1 < j < N$$

L'étude de l'équation de K.d.V. est alors reliée à l'analyse de la variété définie dans \mathbb{C}^n par (10), la première chose à montrer est que l'ensemble des points satisfaisant (10), invariants par (9) est une variété algébrique non vide. Cela a été prouvé pour $N \neq 3$ et obtient, dans ce cas, à l'aide du flot de K.d.V. une analyse complète de la variété invariante définie par (9) et (10).

Conclusion

J'ai essayé de mettre en évidence sur l'équation de K.d.V. un cheminement qui maintenant semble très fréquent.

- 1) Etude d'un phénomène physique "assez élémentaire".
- 2) Mise en équation de ce phénomène.
- 3) Etude élémentaire de l'équation.
- 4) Etude numérique de l'équation et mise en évidence de propriétés surprenantes.
- 5) Démonstration mathématique de ces propriétés.
- 6) Mise en évidence d'autres problèmes ayant les mêmes structures.
- 7) Compréhension mathématique "universelle" de cette structure.
- 8) Application à d'autres domaines des Mathématiques.

REFERENCES

Cette liste est très sommaire et concerne essentiellement les ouvrages cités dans ce texte. Une bibliographie extensive peut être trouvée dans [4] ou [6].

- [1] F. Calogero Solvable many body problems and related mathematical finding in Bifurcation Phenomena in Math. Physics and related topics. Ed. par C. Bardos et D. Bessis chez Reidel (Série C. Vol 54 1980)
- [2] D. Chudnovsky Riemann Monodromy Problem, Isomonodromy Deformation

- Equations and completely integrable systems in Bifurcation
Phenomena in Math. Physics and related topics Ed. par C. Bardos
et D. Bessis chez Reidel (Série C. Vol. 54 1980).
- [3] J. Scott Russel Report on Waves Proc. Roy Soc. Edinburg 319-320.
- [4] A.C. Scott, F.Y.F. Chu et D.W. Mc Laughlin, The Soliton : a new
concept in Applied Sciences, Proc. IEEE 61 (1973), 1443 - 1483.
- [5] N.Y. ZABUSKY Computational Synergetics and Mathematical innovation
Journ. of Comp. Physics Vol. 43; 2 (1981) 195-249.

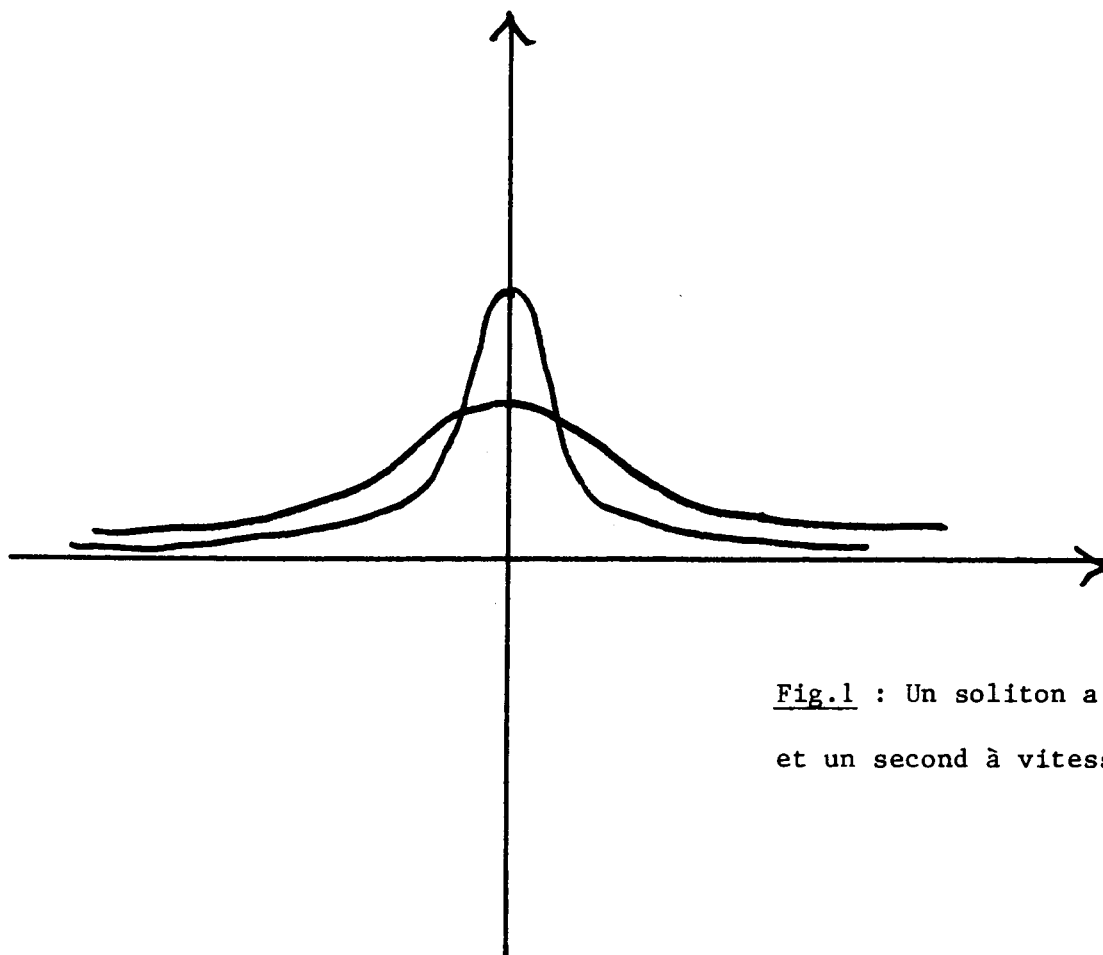


Fig.1 : Un soliton a grande vitesse
et un second à vitesse plus faible.

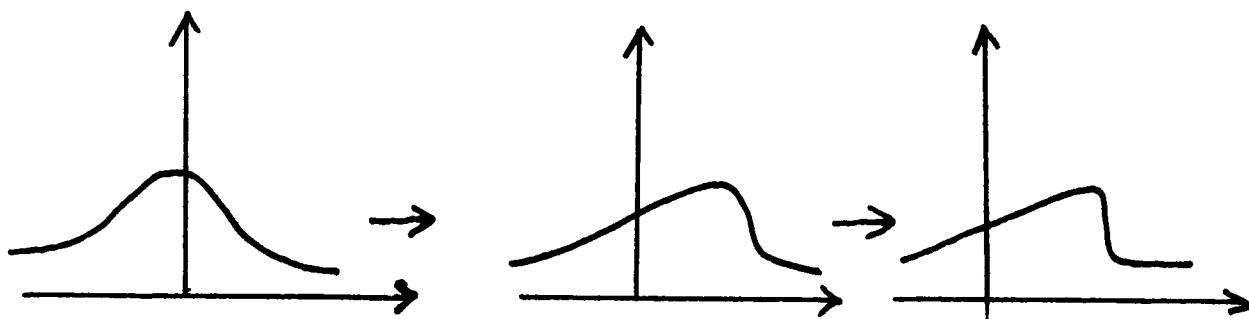


Fig. 2 : L'évolution d'une onde selon l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

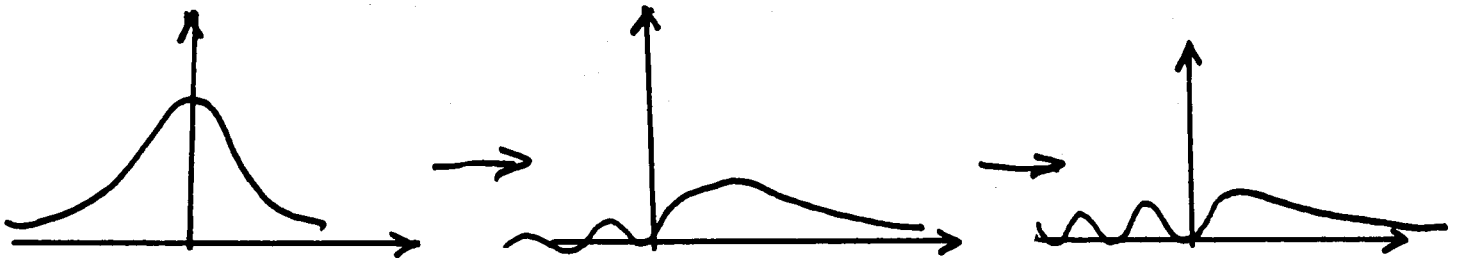


Fig. 3 : La dispersion d'une onde selon l'équation $\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0$.

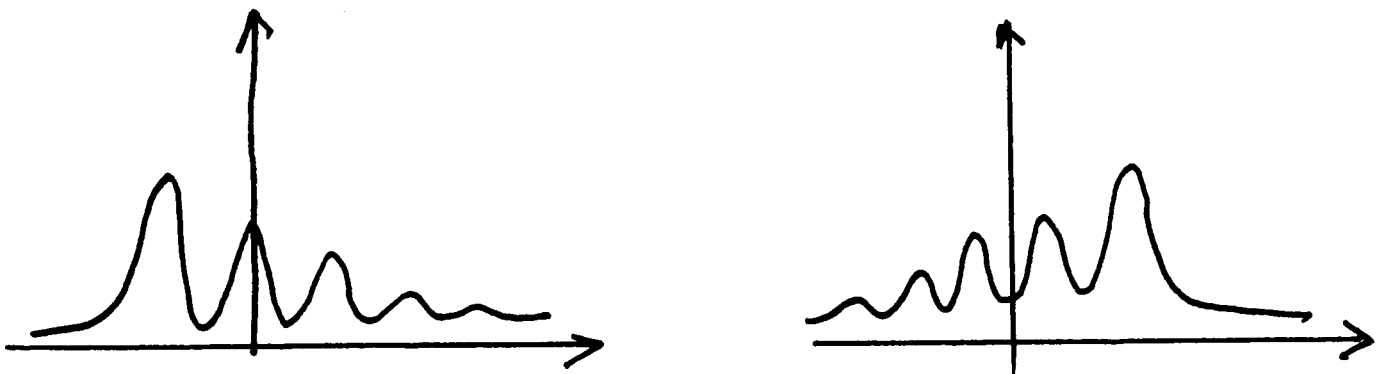


Fig. 4 : Famille des solitons avant et après l'interaction.