PAUL DUBREIL

# Généralisations et généralisation

*Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1983, fascicule 4
« Généralisations et généralisation », , p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983___4_A1_0>

SM S PHILO - MATH

# GENERALISATIONS et GENERALISATION

Paul DUBREIL

---

> L'esprit de la Géométrie moderne est d'élever toujours les vérités, soit anciennes, soit nouvelles, à la plus grande généralité qu'il se puisse.
>
> FONTENELLE, Histoire de l'Académie des Sciences - 1704 .

## 1. Introduction

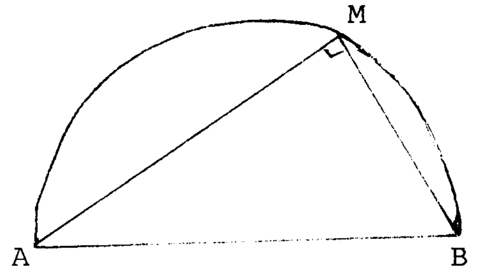
Aujourd'hui encore, aucun mathématicien ne conteste ouvertement que, si les résultats doivent être les plus forts possibles pour les hypothèses énoncées, les hypothèses doivent être les plus faibles possibles pour les résultats obtenus.

Cependant, à plusieurs reprises depuis vingt ou trente ans, on a pu entendre déprécier, parfois sévèrement, des travaux consacrés à des structures prétendues pauvres, c'est-à-dire définies par des axiomes faibles. Je voudrais montrer que de tels jugements sont le plus souvent démentis par les faits, c'est-à-dire par la découverte de résultats nombreux et solides, parfois inattendus ou même surprenants.

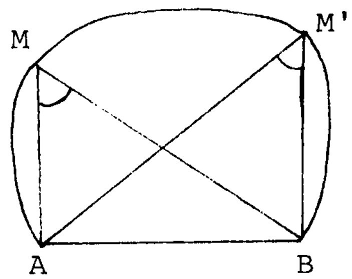
Nous étudierons d'abord trois exemples, de types bien différents.

## 2. Un théorème de Géométrie.

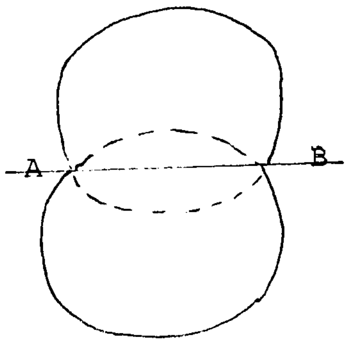
Vers l'an 600 avant notre ère, THALÈS, revenu en Grèce après avoir étudié en Egypte, établit que, si M est un point d'un demi-cercle de diamètre AB , l'angle AMB est droit. Sa joie est si grande qu'il offre un sacrifice aux Muses.



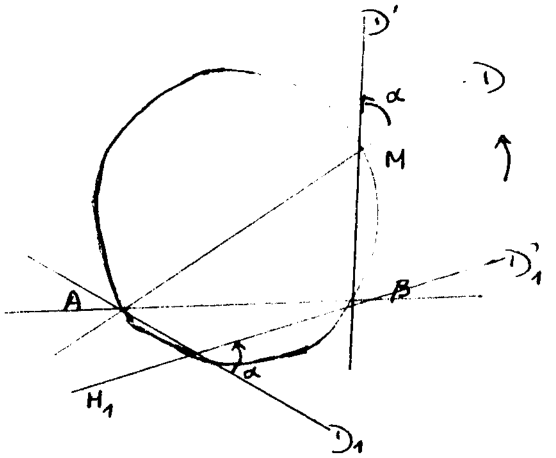

Dans les Eléments d'Euclide, trois siècles plus tard, ce résultat (livre III, proposition XXXI), n'est plus qu'un corollaire d'un énoncé plus général : si M et M' sont deux points d'un arc de cercle limité aux points A et B , les angles AMB , AM'B sont égaux.




La réciproque est absente, et le terme de "lieu" n'est pas employé (bien que la notion ait été connue de Platon qui vécut de -428 à -347 ou 348). Il figure au contraire dans la Géométrie d'Hadamard (1898), mais c'est à peu près la seule différence avec Euclide : "le lieu géométrique des points situés d'un même côté d'une droite et d'où l'on voit un segment donné de cette droite sous un angle donné est un arc de cercle terminé aux extrémités du segment" (n° 77, p.69). Cet énoncé est suivi, comme dans Euclide, d'un corollaire relatif à l'angle droit, mais qui, lui, est énoncé pour tout le plan : "le lieu des points d'où l'on voit un segment de droite donné sous un angle droit est la circonférence qui a ce segment pour diamètre". Si l'on veut revenir de cet énoncé au cas d'un angle aigu (ou obtus), on obtient comme lieu la réunion de deux arcs de cercles symétriques par rapport à AB, généralisation peu satisfaisante !




Comme chacun sait, tout s'arrange si, au lieu de considérer les angles commes des "parts de tarte plus ou moins copieuses", on fait appel à la notion d'angle orienté, angle aigu, affecté d'un signe après orientation

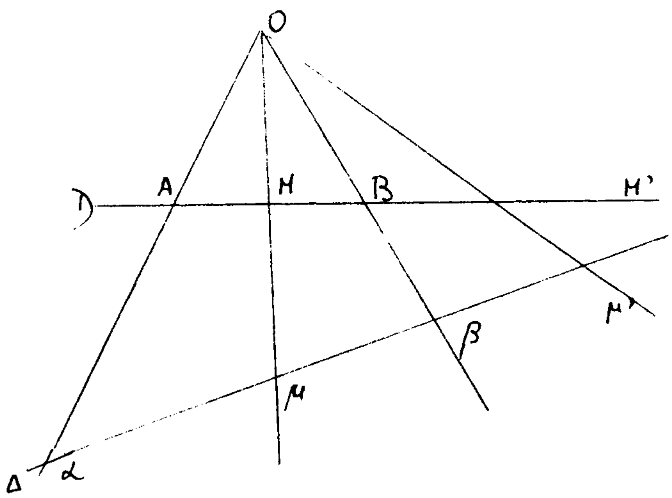



du plan, amenant la <u>première</u> droite D (issue de A) sur la deuxième D' (issue de B) : le lieu est alors un cercle passant par A et B . Hadamard n'omet pas cet énoncé, mais le donne sous une forme curieuse :

" n° 82 <u>bis</u>. L'énoncé du n° 77 peut... être remplacé par le suivant : le lieu des sommets des angles égaux et <u>de même sens</u> "(sans autre précision)" dont les côtés, <u>prolongés s'il y a lieu</u>, passent par deux points donnés, est une circonférence passant par ces deux points". Que signifie au juste ce <u>bis</u> ? Enoncé facultatif, pas tout à fait conforme au programme ? addition in extremis à la suite d'un scrupule personnel ou d'une suggestion venant de Darboux, directeur, ou de Tannery, autre auteur, de la collection ? L'addition, en tous cas, s'imposait à cause d'une autre généralisation, terminée en 1853 : toutes les propriétés précédentes ne sont qu'un cas particulier d'un <u>résultat valable pour toutes les coniques</u>.

Remontons à la fin de l'antiquité grecque, au début du IV$^e$ siècle de notre ère, époque à laquelle PAPPUS écrit, à Alexandrie, un traité intitulé "Collection mathématique". Ses prédécesseurs avaient étudié la division harmonique. Pappus montre que pour quatre points alignés quelconque M, M', A, B, le rapport

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$$



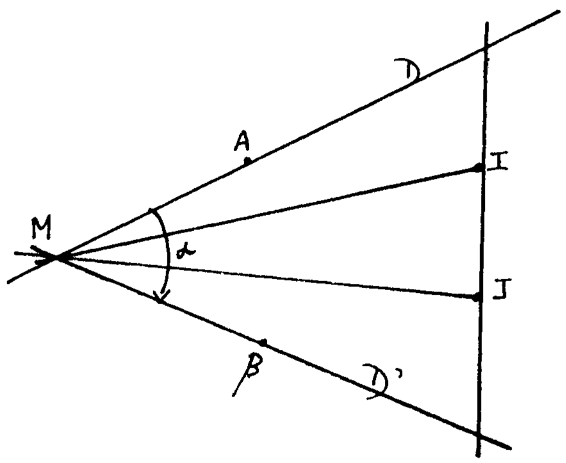

est <u>projectif</u> :

$$\frac{\overline{\mu\alpha}}{\overline{\mu\beta}} : \frac{\overline{\mu'\alpha}}{\overline{\mu'\beta}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$$

Chasles (1793-1880) lui a donné le nom de <u>rapport anharmonique</u> auquel on préfère maintenant (à la suite des géomètres italiens) le nom de <u>birapport</u>. La propriété de Pappus permet de parler aussi bien du birapport des quatre droites OM, OM', OA, OB

Or, un théorème de DESARGUES (1593-1662) sur un quadrilatère inscrit dans une conique et coupé par une transversale, inspire à CHASLES (1793-1880) ce théorème : $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ , $A_4$ étant quatre points d'un plan, trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés, le lieu des points M du plan tels que le birapport des droites $MA_1$ , $MA_2$ , $MA_3$ , $MA_4$ ait une valeur donné $\rho$ est une conique passant par $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ , $A_4$ . Ce théorème est démontré plus directement dans DUPORCQ, Premiers principes de Géométrie moderne, p.26 .

D'après Descartes, Desarques avait déjà coutume de considérer des droites parallèles comme "concourant à l'infini". Chasles et Poncelet (1788-1867) emboîtent le pas et Poncelet va plus loin. Fait prisonnier par les Russes en 1812, il occupe ses loisirs forcés "dans les geôles de Saratov" à faire intensément de la Géométrie, sans avoir à sa disposition le moindre document. Revenu en France, il publie son Traité des "Propriétés projectives des figures" où il utilise brillamment aussi bien "les éléments imaginaires" que les "éléments à l'infini". Cependant, une formule lui échappe : elle ne sera trouvée qu'en 1853 par Laguerre, âgé seulement de 19 ans et candidat à Polytechnique. Elle exprime le birapport $\rho$ du faisceau formé par deux droites D, D' se coupant en M et les isotropes MI , MJ de ce point (I, J points cycliques), en fonction de l'angle orienté $\alpha$ de D et D' :




$$\rho = e^{2i\alpha}$$

Si alors M varie de façon que $\alpha$ reste contant, son lieu, comme on l'a vu, une conique passant par I, J, A et B , c'est-à-dire un cercle passant par A et B .

Si l'extension aux coniques a pu se faire, c'est grâce, notamment, à l'invention des "imaginaires" par les algébristes italiens du XVI$^e$ siècle : CARDANO, FERRARI, TARTAGLIA. Le sommet, finalement, a été atteint, mais l'ascension a duré .... é' siècles et demi ! Et les réactions du milieu mathématique furent, plus d'une fois, assez fraîches ! Dans la préface de son deuxième volume, Poncelet parle du "singulier accueil" qui fût fait aux Mémoires de Géométrie qu'il présentait à l'Académie et qui étaient devenus pour lui "la source d'amères déceptions". Arago avait été particulièrement hostile. Quant à Chasles, il déclare dans son "Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie" (Note XXVI, p.368) : "le mot imaginaire exprime un être de raison sans existence, mais auquel on peut cependant supposer certaines propriétés dont on se sert momentanément comme d'auxiliaires et auquel on applique les mêmes raisonnements qu'à un objet réel et palpable" (!). Dupin , heureusement, avait vu plus clair et ses encouragements ne manquèrent pas à Poncelet !

## 3. Applications continues et Topologie.

Désignons par $f(x)$ une fonction réelle d'une variable réelle, définie sur un intervalle $(a,b)$. Dans la première moitié du XIX$^{e}$ siècle, on a cru longtemps que la continuité de $f$ entraîne à peu de choses près l'existence d'une dérivée, disons à l'exception de points isolés. Cependant, LOBATCHEVSKI (1792-1856) et RIEMANN (1826-1866) auraient pensé le contraire et BOLZANO (1781-1848) aurait donné un exemple de fonction continue sans dérivée ... mais cet exemple ne fût publié qu'en 1920 ... Le contre-exemple de WEIERSTRASS, $\sum_n b^n \cos(\Pi a^n x)$ (a entier impair $\geqslant 3$ , $o < b < 1$ , $ab > 1 + \frac{3\Pi}{2}$ ) , fût publié en 1872 ; il figure dans de nombreux traités.

Du point de vue de la généralité, la formule des accroissements finis

$$f(x+h) - f(x) = h\, f'(x + \theta h) \qquad (o < \theta < 1)$$

montre de quelle façon une fonction dérivable est continue : dans un intervalle où la dérivée est bornée : $|f'| \leqslant A$ , on a constamment :

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant A\,|h| \qquad (A > o)$$

En retenant seulement cette inégalité, LIPSCHITZ a défini une sorte de continuité forte qui est une hypothèse commode pour la démonstration de l'existence de solutions pour des équations différentielles telles que

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x,y)$$

("Méthode de Cauchy-Lipschitz, Cours d'Algèbre, t.2).

HÖLDER a remplacé la condition de LIPSCHITZ par la condition plus faible

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant A\,|h|^{\lambda}, \qquad (A > o,\ o < \lambda < 1)$$

utilisée systématiquement par LICHTENSTEIN (Vorlesungen über Klassen nicht linearer Intégralgleichungen und Integrodifferential gleichungen, Springer, 1931, p.53 et 63).

Comme on le voit, le progrès a consisté ici, d'abord à séparer la continuité et la différentiabilité, puis à introduire des notions intermédiaires, la continuité au sens de Lipschitz et la continuité au sens de Hölder.

Mais l'étude des fonctions de plusieurs variables, celle de familles de fonctions, la considération d'ensembles de dimension infinie ont amené finalement à considérer une <u>application</u> $f$ d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ (c'est-à-dire une loi associant à tout élément $x$ de $E$ un élément $y$ de $F$) et à préciser ce qu'il faut supposer sur <u>l'ensemble de départ</u> $E$ et sur <u>l'ensemble d'arrivée</u> $F$ pour définir la continuité de l'application $f$, étudier les propriétés de <u>l'image</u> $f(E)$ de $E$ dans $F$,... Comme vous le savez, on suppose que $E$ et $F$ sont des espaces topologiques, excusez-moi d'écrire la définition, dont j'aurai besoin ; un espace topologique est un ensemble $E$ dans lequel on a défini une famille de parties appelées <u>ouverts</u> vérifiant les axiomes suivants :

($E$ et $\emptyset$ sont ouverts) ;

T
1. Toute réunion d'ouverts est un ouvert ;
2. Toute intersection <u>finie</u> d'ouverts est un ouvert ;

ou, sous forme <u>duale</u> en appelant <u>fermé</u> tout complémentaire d'un ouvert :

$$T' \left\{ \begin{array}{l} (\emptyset \text{ et } E \text{ sont fermés}) \ ; \\ 1.\ \text{Toute intersection de fermés est un fermé} \ ; \\ 2.\ \text{Toute réunion } \underline{\text{finie}} \text{ de fermés est un fermé.} \end{array} \right.$$

A partie de là, nous dévidons le magnifique écheveau de la Topologie générale devant nos étudiants émerveillés.

Emerveillés ? pas toujours ! Je me souviens avoir interrogé, à Polytechnique, sur un programme qui comportait la Topologie générale et les Distributions, et avoir eu un patient qui, après avoir été tout à fait convenable sur les Distributions, se montrait anormalement nul en Topologie. Lui en demandant la cause, j'ai obtenu cette réponse : "La Topologie, monsieur, cela ne me parle pas !". Il venait d'une petite taupe de province où on n'avait jamais parlé d'ouverts ou de fermés, même dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$ et il faisait des complexes par rapport à ses camarades plus favorisés. J'aurais souhaité lui parler de la formation progressive de la Topologie, de Bolzano à Bourbaki ! mais je n'avais pas le temps de retracer une si longue histoire. Alors, j'ai invoqué (en moi-même) les mânes d'E.H. MOORE, mathématicien américain trop eu connu en France, auteur d'une <u>Introduction to a form on general Analysis</u> (AMS. Coll. Publ. n°2, 1910 !), et, bondissant vers un niveau de généralité plus élevé que celui de la Topologie générale, j'ai prié mon polytechnicien de considérer, dans un ensemble E , une <u>famille de MOORE</u> c'est-à-dire un ensemble de parties vérifiant le système d'axiomes :

$$T'_M \left\{ \begin{array}{l} (E \in \mathfrak{F}) \\ \text{Pour toute sous-famille } \Phi \text{ de } \mathfrak{F} \ , \\ \bigcap_{X \in \Phi} X \in \mathfrak{F} \end{array} \right.$$

Les parties F qui sont éléments de $\mathfrak{F}$ sont appelées <u>fermés</u> (au sens de Moore) ou M-fermés. Les exemples ne manquent pas.

En géométrie élémentaire (dans le plan ou l'espace), les parties convexes (P est convexe si, quels que soient deux points a,b appartenant à P, tout point m du segment ab appartient à P) forment visiblement une famille de MOORE ;

en algèbre, les parties stables d'un ensemble muni de lois de composition, les sous-groupes (éventuellement permis) d'un groupe (muni d'opérateurs), en particulier les sous-espaces d'un espace vectoriel, les idéaux d'un anneau, sont des familles de Moore.

D'une façon générale, les conditions $T'_M$ entraînent immédiatement que toute partie X de E est contenue dans un plus petit M-fermé $\overline{X}$ , à savoir l'intersection de tous les M-fermés contenant X (exemples : polygone de sustentation, sous-groupe engendré par une partie de groupe, etc.) . Les exemples précédents montrent qu'une réunion de parties M-fermées n'a pas en général cette propriégé qui cependant, en topologie, va figurer dans le système d'axiomes T' pour les réunions finies. Il faut en effet que ce système d'axiomes soit en accord avec la topologie "élémentaire" sur $\mathbb{R}$ ou (mieux) sur $\mathbb{R}^2$ dans laquelle un ensemble de points est dit fermé s'il contient ses points d'accumulation (1). Un ensemble $\{x\}$ réduit à un point n'a pas de point d'accumulation, donc est fermé ; de même un ensemble fini de points. Mais si l'on imposait que toute réunion de fermés est un fermé, tout ensemble, considéré comme réunion de ses points, serait fermé. Mon polytechnicien a paru satisfait, mais peut être moins par les explications elles-mêmes que par le fait d'avoir eu des "explications sur mesure".

Ainsi, les espaces topologiques sont cas particuliers des ensembles munis d'une famille de MOORE. Mais ils comprennent eux-mêmes des cas particuliers importants :

les espaces séparés, ou de Hausdorff (axiome supplémentaire : si x et y sont deux points distincts, il existe un voisinage $V_x$ de x et un voisinage $V_y$ de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$ .

---

(1) Rappelons que, dans le plan $\mathbb{R}^2$ , I est point d'accumulation d'un ensemble A si tout cercle de centre I contient au moins un point de A différent de I (donc une infinité de points de A) .

N.B. un voisinage de x est une partie contenant un ouvert contenant x).
Ces espaces séparés comprennent à leur tour comme cas particulier les espaces métriques (à chaque couple de points, (x,y) est associé un nombre réel $d(x,y) \geqslant o$ vérifiant les axiomes de la distance :

$$d_{xy} = o \quad \text{ssi (si et seulement si) x et y coïncident}$$

$$d_{yx} = d_{xy}$$

$$d_{xz} \leqslant d_{xy} + d_{yz} \qquad (\forall x,\ y,\ z \in t)$$

(inégalité du triangle) Exemple : $\mathbb{R}^n$ avec la distance euclidienne.

Mais je tiens à signaler qu'en remplaçant l'inégalité du triangle par la condition plus forte

$$d_{xy} \leqslant \mathrm{Max}(d_{xy}\ ,\ d_{yz})$$

on définit des espaces appelés ultramétriques qui ont des propriétés inattendues. Tout triangle $\{x,y,z\}$ est isocèle (dans le cas contraire, on aurait, avec des notations convenables, $d_{xy} < d_{yz} < d_{zx}$ et l'inégalité ultramétrique serait en défaut). Il en résulte aussitôt que dans une "boule" de centre O et de rayon R (> o), (ensemble des points ne vérifiant $d_{om} < R$), tout point A est centre. La Théorie des nombres fournit des exemples d'espaces ultramétriques et la topologie ultramétrique y rend de grands services.

La théorie des Ensembles et la Topologie viennent de nous fournir une échelle de notions présentant des niveaux de généralité différents : avec une précision parfaite, la présentation, disons même la conception axiomatique, fournit au mathématicien un jeu d'outils efficace. Bien entendu, l'ordre chronologique dans lequel ces notions fondamentales sont apparues est bien différent de celui que nous avons suivi, il se rapproche plutôt de l'ordre opposé. Après les travaux préparatoires particulièrement importants de CANTOR et de FRÉCHET , KURATOWSKI définit en 1933 un espace topologique par les propriétés de l'application $X \longrightarrow \overline{X}$ et HAUSDORFF donne en 1935 , dans la troisième édition de son Einleitung in die Mengenlehre les axiomes T' et T . En 1951, BOURBAKI, mettant l'accent sur les ouverts (système T) éclaircit tout particulièrement tout ce qui touche à la compacité.

Il faut bien dire que cette prénétration de l'axiomatique n'a pas soulevé un enthousiasme général. Au Congrès international de Philosophie des Sciences (Paris 1949), Denjoy, Président de la section de Philosophie mathématique, écrit dans son rapport : "En 1905, M. FRECHET ouvrit la voie à la Topologie générale. Rien de ce qui s'est fait depuis cette époque dans les mathématiques modernes ne saurait nous paraître véritablement neuf..."

Précisément à ce Congrès, Jean DIEUDONNE avait fait une communication intitulée : "L'axiomatique dans les Mathématiques modernes". On y trouve cette phrase particulièrement typique : "...lorsqu'il manie des êtres mathématiques, le mathématicien n'a pas à se soucier d'autre chose que des propriétés de ces êtres exprimés par les axiomes de la théorie où ils interviennent". Autrement dit, la "nature" de ces êtres, exprimée par un mot de caractère plus ou moins "intuitif" ou "concret" n'a aucune importance. C'est la position d'Emmy Noether, d'Hilbert et même, dès 1830, d'un algébriste anglais (trop peu connu) : Peacock !

Réaction de Denjoy : "M. DIEUDONNE semble croire que l'emploi généralisé, survenu il y a vingt cinq ans, de la méthode axiomatique, établit une coupure entre un âge mathématique nouveau et les temps indéfiniment antérieurs..." La polémique, on le voit, a été assez vive... et il faut bien admettre, du simple point de vue historique, que l'apparition de méthodes, nouvelles par leur précision et leur niveau de généralité, n'a pas toujours reçu une approbation unanime.

## 4. Groupes et Demi-groupes.

Présentie par Vandermonde (1735-1796) et Lagrange (1736-1813), la notion de groupe (de substitutions) a été véritablement introduite et utilisée par Galois. A vrai dire, la hâte et la tension nerveuse avec lesquelles il a écrit la lettre à Auguste Chevalier font qu'il semble avoir gardé pour lui sa définition d'un groupe : "On appelle groupe un système (mot souvent utilisé à cette époque pour ensemble) de permutations telles que..." (Ecrits et mémoires mathématiques, p.79). D'ailleurs, à propos de la décomposition d'un groupe G en classes (à droite) par rapport à un sous-groupe H :

$$G = H + HS + HS' + \ldots$$

il écrit : "G se partage en groupes" (J. de Lionville, 1846).

Malgré ce flottement, un groupe était bien, pour lui, un ensemble G de substitutions stable pour la composition : $\alpha \in G$ et $\beta \in G \Rightarrow \beta_o\alpha \in G$ . Il résulte aussitôt de la décomposition d'une substitution $\sigma$ en cycles qu'une puissance $\sigma^n$ de $\sigma$ est l'identité (n = p.p.c.m. des ordres des cycles) donc aussi que $\sigma$ admet l'inverse $\sigma^{n-1}$ (1).

Lorsque Sophus LIE entreprend de passer des équations algébriques aux équations différentielles, ce qui exige de remplacer les substitutions par des "transformations" (applications différentiables bijectives ou tout au moins injectives), il donne, comme Galois, cette définition (Théorie des Transformations gruppen, t.1, p.3 ; Leipzig, 1888) : "Un ensemble (eine Schaar) fini ou infini de transformation qui appartient à l'ensemble". Comme il le constate explicitement par la suite, cela n'implique pas que l'ensemble en question contient l'inverse de chacune des transformations qui en font partie. Alors, LIE prévient que ce sera une "hypothèse supplémentaire". Ce fût aussi l'attitude de KLEIN dans son cours : Einleitimg in die höhere Geometrie (été 1893, Göettingen ; p.3) (2).

---

(1) Tout cela est confirmé par SERRET (Algèbre Sup. 3°éd., 1866 ; t.2 ; n° 142) qui, à la suite de Cauchy, remplace le mot groupe par "système de substitutions conjuguées" ou "système conjugué". Dans son Traite des Substitutions (1870, Livre II, Chap.I, §1), JORDAN, avec la même définition revient au terme de groupe, mais propose aussi celui de faisceau.

(2) "Nous disons qu'un ensemble ("Inbegriff") d'opérations est un groupe quand, avec deux d'entre-elles, leur combinaison est aussi dans l'ensemble. Prenant comme exemple l'ensemble des "substitutions linéaires" à n variables à déterminant non nul (en particulier, avec $n = 1$ , $x' = x + 1$), il remarque qu'il peut arriver qu'aucune puissance ne soit égale à l'identité et conclut que, si l'on peut avoir cette propriété dans un groupe infini, il faut en faire une hypothèse, formulée explicitement.

KRONECKER semble être le premier à avoir énoncé, en 1870, une définition générale des groupes (Auseinandersetzung liniger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen, Oeuvres, t.1, p.275) : il fait mention explicitement de l'associativité (et de la commutativité). Puis BURNSIDE, dans sa Théorie of Groups of finite order,(1ère édition 1897 ; 2° ed. 1911), considère des "groupes d'opérations" pouvant être "effectuées successivement" et mentionne, lui aussi, l'associativité. Signalons aussi qu'il écrit, dans la préface de la première édition (p.VIII) : "Cayley's dictum that a group is defined by means of the laws of combination of its symbols" would imply that, in dealing puraly with the theory of groups, no more concrete mode of representation should be used than is absolutely necessary".

Mais c'est au début de notre siècle qu'apparaissent les différentes définitions axiomatiques que nous utilisons aujourd'hui. Elles sont publiées notamment par L.E. Dickson (Amer - Trans- , 6 , 1905) et E.V. Huntington (ibidem), qui se préoccupent de l'indépendance des axiomes de chaque système et mettent en première ligne l'associativité de la loi de composition (en notation multiplicative : $x(yz) = (xy)z \ , \ \forall x,y,z \in G$).

A partir de là, la théorie des groupes va se développer rapidement, avec les grands noms de FROBENIUS, SCHUR et, en Grande Bretagne de BURNSIDE. En France, dès 1904, J.A. de SEGUIER, encouragé par Hermite et visiblement influencé par Burnside, publie ses Elements de la Théorie des Groupes abstraits. On insiste aujourd'hui sur le fait qu'après avoir défini un groupe (abstrait) par le système d'axiomes usuel, il introduit la notion de semi-groupe : ensemble muni d'une loi de composition associative et vérifiant en outre la règle de simplification :

$$ax = bx \Rightarrow a = b \quad , \qquad ya = yb \Rightarrow a = b \quad :$$

après quoi il montre aisément que tout semi-groupe fini est un groupe. Il envisage aussi le cas où l'on a seulement l'associativité mais il donne malencontreusement le nom de corps à la structure correspondante, appelée maintenant demi-groupe (Halbgruppe en allemand, Semigroup en anglais, qu'on retraduit aussi par semi-groupe en français).

A part un court travail de Dickson en 1905 (Trans. A.M.S., 1905, p.205), cette théorie à peine née sommeille profondément jusqu'aux interventions décisives, en URSS, de SUSCHKEWITSCH (de 1928 à 1940) et de MALCEV. Puis elle se développe de plus en plus vigoureusement, en dépit du manque de bienveillance qui lui a été témoigné, pendant bien des années, par le monde de mathématique (1).

La constructions des fractions, effectuée dès l'Antiquité, consiste essentiellement à plonger le semi-groupe multiplicatif abélien $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{o\}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Q}^*$ des rationnels non nul (et c'est l'exemple le plus simple de "problème universel"). Comme Karl HOFMANN l'a souligné récemment, Sophus LIE, dans son "premier théorème", effectue avec l'aide de la méthode infinitésimale, le plongement d'un demi-groupe de transformations (qu'il appelle "groupe" sans que c'en soit un ! voir plus haut) dans un groupe (véritable).

A la suite d'un travail erroné de SUSCHKEWITSCH, MALCEV a pris sous son aspect algébrique le problème du plongement d'un demi-groupe (non nécessairement abélien) dans un groupe et donné au système infini de conditions, nécessaire et suffisant, pour que ce plongement soit possible : la première est la règle de simplification, la deuxième la condition

$$Z \qquad \left.\begin{aligned} ax &= a'x' \\ bx &= b'x' \\ ay &= a'y' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow by = b'y'$$

etc.

Dans le mme ordre d'idée, et sous l'influence de travaux d'Artin, Prüfer, van der Waerden, j'ai caractérisé en 1941 (Mémoires de l'Académie des Sciences) les homomorphismes envoyant un demi-groupe donné sur un groupe : cela se fait au moyen des congruences associées mais, plutôt que d'en parler, je voudrais aborder la question la plus fondamentale qu'on puisse se poser en Algèbre : y-a-t-il, dans cette

(1) Je me bornerai à citer cette boutade qui circulait aux Etats-Unis il y a douze ou quinze ans : "Semi groups Theory ? a field for semimathematicians".

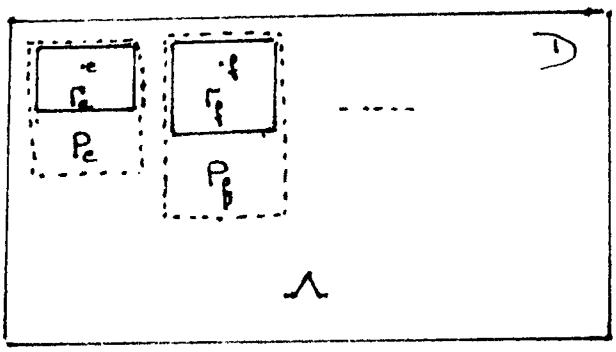
Théorie des Demi-groupes, des théorèmes de structure d'un haut degré de généralité ? Examinons ceux qui s'obtiennent en étudiant les sous-groupes (éventuels) d'un demi-groupe D (1).

Si G est un sous-groupe d'un demi-groupe D, son élément-unité e est un idempotent ($e^2 = e$) de D. Inversement, à tout idempotent e est associé un plus grand sous-groupe $\Gamma_e$ de D admettant e comme élément neutre. De plus, pour tout idempotent $f \neq e$, $\Gamma_e$ et $\Gamma_f$ sont disjoints ainsi que leurs radicaux $\rho_e$, $\rho_f$ :

$$\Gamma_e \cap \Gamma_f = \emptyset \qquad \rho_e \cap \rho_f = \emptyset$$

(où $\rho_e = \{r,\ r \in D\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } r^n \in \Gamma_e\}$. Enfin, d'après un théorème sur les demi-groupes cycliques rencontré pour la première fois, à propos d'ensembles de matrices par FROBENIUS (1895), le complémentaire $\Lambda = D - \bigcup_{e \in E} \rho_e$, E désignant l'ensemble des idempotents, ne contient que des éléments apériodiques ($a^\lambda = a^\mu$ seulement si $\lambda = \mu$) : est donc vide ou infini.

Ce qui précède donne déjà un aspect de la structure d'un demi-groupe D admettant des idempotents e, f, ... :



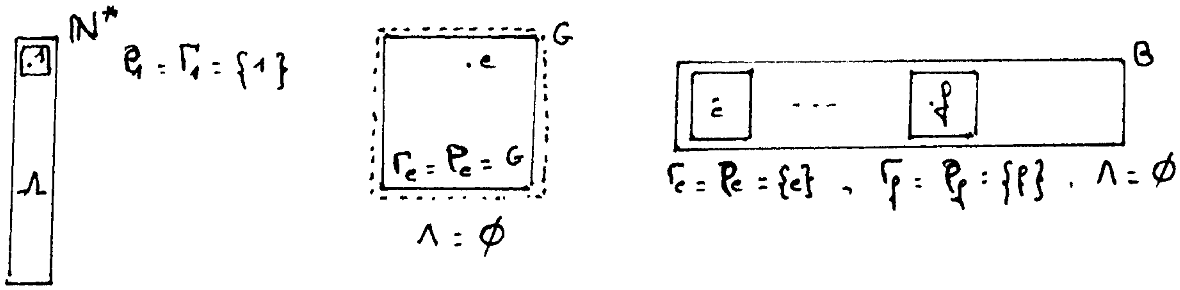
(1) Etude entreprise en 1943 par Stefan SCHWARZ, poursuivie par A. D. WALLACE (1953) et KIMURA (1954) : cf. A.H. CLIFFORD & S.G. PRESTON, Algebraic Theory of Semi-groups, chap.I, § 7.

Si D admet un élément-unité 1, on a $\rho_1 = \Gamma_1$ , mais il peut y avoir d'autres idempotents, e, pour lesquels $\rho_e = \Gamma_e$ .

Un autre fait important est que l'ensemble E des idempotents est un <u>ensemble ordonné</u> par la relation

$$e \leqslant f \qquad \text{si} \qquad ef = e = fe .$$

On a pu se demander comment un théorème général sur les demi)groupes pourrait s'appliquer à des cas particuliers aussi divers que $(\mathbb{N}^*, .)$, un groupe, une bande B ($x^2 = x$ , $\forall x \in B$ : cas particulier, les demi-treillis pour lesquels on a en outre la commutativité). Effectivement, on obtient, dans chacun de ces trois cas, que des trivialités :




Mais prenons pour D le demi-groupe multiplicatif sous-jacent à l'anneau $A = \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} = \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$, où nous désignons chaque classe $\bar{x}$ modulo 12 par son représentant x vérifiant $0 \leqslant x \leqslant 11$. L'ensemble des idempotents est

$$E = \{0, 4, 9, 1\}$$

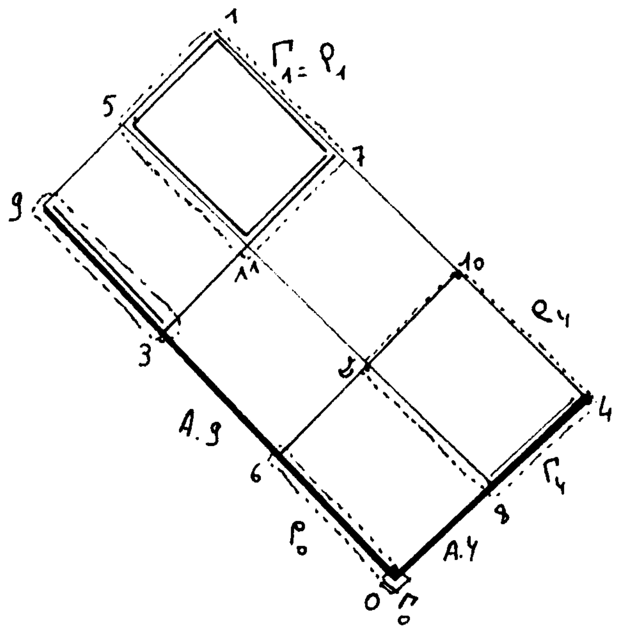
avec $4.9 = 0$ (orthogonalité) et $4 + 9 = 1$ (complémentarité). En tant qu'ensemble ordonné, E est un <u>treillis de Boole</u>. On obtient aisément :

$$\Gamma_0 = \{0\} \quad , \quad \Gamma_4 = \{4,8\} \quad ,$$
$$\rho_0 = \{0,6\} \quad \rho_4 = \Gamma_4 \quad \{2,10\} \quad \Gamma_9 = \rho_9 \quad \{9,3\}$$
$$\Gamma_1 = \rho_1 = \{1,5,7,11\}$$

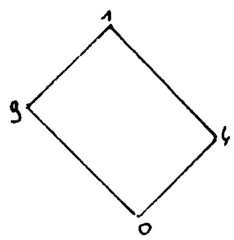
De plus, pour tout élément x de A , on a :

$$x = x.1 = x.4 + x.9 \quad ;$$

A est la somme des idéaux principaux A.4 , A.9 et cette somme est directe en raison de l'orthogonalité 4.9. = 0 ; (c'est la "décomposition de Peirce") : cette structure se représente par le schéma suivant :




avec le treillis de Boole d'ordre 4 :




Si on remplace 12 par un entier quelconque

$$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \quad , \quad (p_i \text{ , nombres premiers distincts})$$

E est un treillis de Boole à r idempotents primitifs (ou atomiques, c'est-à-dire immédiatement supérieurs à 0), donc de cardinal $2^r$ et représentable par un hypercube à r dimensions. De plus, si deux idempotents e,f sont comparables, $e \leq f$ , le groupe $\Gamma_e$ est isomorphe à un sous-groupe de $\Gamma_f$ (alors que $\Gamma_e \cap \Gamma_f = \emptyset$) et on a :

$$O(\Gamma_e) \mid O(\Gamma_f) \quad ; \quad \text{en particulier} \quad O(\Gamma_e) \mid O(\Gamma_1) \quad (\forall e \in E) \quad (1).$$

(1) Stefan SCHWARZ a obtenu récemment , dans cette voie des résultats beaucoup plus complets ... et inédits !

Pourquoi me serais-je interdit de repousser les limites de validité de telles propriétés ? Voici les principales étapes d'une première recherche (Fragmented Rings, Proc. R. Soc. Edingargh, 78A, p. 273-283 , 1978) .

1°) Le théorème suivant, assez proche de résultats classiques (N. JACOBSON, Structure of Rings, Coll. Publ. 37, 1956, ch.III, § 7 , p. 48). A étant un anneau avec élément-unité, 1, mais non nécessairement commutatif, et E l'ensemble de ses idempotents, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - E est fini et les idempotents commutent ;

2 - A admet la décomposition directe

$$(1) \qquad A = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$$

où les $I_\lambda$ sont les idéaux bilatères principaux engendrés par les idempotents primitifs ;

3 - E est fini et ses idempotents primitifs sont orthogonaux.

En raison de la décomposition (1), un tel anneau est dit <u>fragmenté de longueur n</u> .

2°) On établit qu'un tel anneau possède effectivement la structure (booléenne) décrite plus haut ;

3°) <u>Cas particulier</u> : celui d'un <u>anneau quasi-noethérien</u> , c'est-à-dire dans lequel

$$(0) = P_1^{\sigma_1} \cap \dots \cap P_h^{\sigma_h} \qquad (\sigma_i \geqslant 1)$$

où les $P_i$ sont des idéaux complètement premiers ($xy \in P_i \Rightarrow x \in P_i$ ou $y \in P_i$). Un tel anneau est fragmenté de longueur $n \leqslant h$ ; l'égalité a lieu si les $P_i$ sont premiers entre eux deux à deux ; dans le cas contraire,

$n$ est le nombre de classes de l'ensemble $\{P_1, \ldots, P_h\}$ modulo $\mathcal{C}$, fermature transitive de la relation "non premiers entre eux". Ce cas comprend visiblement celui des anneaux commutatifs noethériens.

Pour gagner encore en généralité, on peut envisager d'une part de se débarrasser de l'hypothèse de finitude faite sur E, d'autre part de passer des anneaux aux demi-groupes. J'ai réalisé la deuxième généralisation avant la première (Semigroups and Rings, ibidem, p. 257-264) pour m'apercevoir finalement qu'elles pouvaient se faire d'un seul coup (Quelques coups d'oeil sur la Théorie des Demi-groupes, 106° - Congrès nat. des Sociétés Savantes, 1981, Sciences, fasc. V ; C.T.H.S., 3 et 5 bd. Pasteur, 75 015 Paris). A priori, le rôle important joué, dans ce qui précède par la décomposition en somme directe, l'abondance des signes $\oplus$ ou $+$, exigeaient pas mal d'optimisme. Voici, dans ses grandes lignes, le déroulement de l'aventure.

Soit $L$ un idéal à gauche, non nul, du demi-groupe $D$ : $DL \subseteq L$, $(o) \subset L \subsetneq D$ et, d'autre part, un ensemble $\{L_i, i \in I\}$ d'idéaux à gauche vérifiant $(O) \subset L_i \subset L$ (strictement). Considérons une application $\rho$ de $L$ dans le produit cartésien (ensembliste) des $L_i$ :

$$\rho : \quad L \longrightarrow \bigtimes_{i \in I} L_i \qquad (\mathrm{card}\ I \geqslant 2)$$

et désignons par $x_i$ la composante de $\rho(x)$, $x \in L$, dans $L_i$ : $\rho(x) = (\ldots, x_i, \ldots)_{i \in I}$. Nous dirons que $L$ admet la décomposition en pseudosomme

$$L \overset{\rho}{\approx} \bigoplus_{i \in I} L_i$$

("$L$ est décomposé par $\rho$ en pseudosomme des $L_i$") si :

$\rho$ est une <u>bijection</u> vérifiant les deux conditions

A si $x \in L_i$, on a $x_i = x$ et $x_j = o$ pour $j \neq i$ ;

B si $c \in L$, on a, pour tout $s \in D$, $(sc)_i = sc_i$.

Supposons alors que $L$ soit l'<u>idéal principal à gauche</u> engendré par un idempotent $e$ : $L = De$ . S'il admet une décomposition en pseudosomme

$$De \overset{\rho}{\approx} \bigoplus_{i \in I} L_i$$

on constate que les composantes $e_i$ de $e$ sont des idempotents <u>orthogonaux</u> et que, pour tout $x \in L$ , on a $x_i = xe_i$ , d'où $L_i = D e_i$ ($\forall i \in I$). De plus, si $e$ commute avec chaque idempotent $f \geqslant e_i$ ($\forall i \in I$), on a : $e = \bigvee_{i \in I} e_i$ (dans l'ensemble ordonné $E$), (borne supérieure remplaçant la somme du cas classique).

Il faut maintenant établir la réciproque, en partant d'un ensemble $\{e_i , i \in I\}$ d'idempotents (non nuls) deux à deux orthogonaux, et admettant dans $E$ une borne supérieure $\bigvee_{i \in I} e_i = e$ , donc montrer qu'on a une décomposition en pseudosomme .

$$De \overset{\rho}{\approx} \bigoplus_{i \in I} D e_i$$

La définition de $\rho$ est claire : si $x \in D e$ , $\rho(x) = (\ldots x_i \ldots)_{i \in I}$ où $x_i = x e_i$ : les conditions A et B sont bien satisfaites. Reste à montrer que $\rho$ est une <u>bijection</u>, ce qui se réduit dans le cas classique à

$$x = x e = x(e_1 + \ldots + e_n) = x e_1 + \ldots + x e_n$$

d'où $D e = \sum_{i=1}^{n} D e_i$ , cette somme étant directe puisque l'orthogonalité des $e_i$ entraîne aussitôt $D e_i \cap \sum_{j \neq i} D e_j = (o)$ .

L'addition n'existant plus dans notre demi-groupe, que pouvons-nous faire ? autrement dit, par quoi remplacer <u>l'hypothèse</u> du cas classique, à savoir que $D$ est demi-groupe multiplicatif sous-jacent à un anneau ? La logique la plus élémentaire vient à notre secours : les hypothèses d'une réciproque sont les conclusions de la proposition directe : celles-ci ne seraient-elles pas incomplètes ?

Effectivement, supposer, dans la proposition directe, que $\rho$ est <u>surjective</u>, entraîne que :

$$\forall (\ldots x_i \ldots)_{i\varepsilon I} \subset \bigtimes_{i\varepsilon I} D e_i \,,\; (\exists x \,\varepsilon\, D e) \text{ tel que } x e_i = x_i \quad (\forall i \,\varepsilon\, I)$$

C'est une propriété <u>multiplicative</u> des idempotents $e_i$ qui s'écrit :

$$(\mathfrak{I}) \qquad \bigcap_{i\,\varepsilon\, I} x_i \,.\, e_i \neq \emptyset \qquad \text{où} \quad x_i \,.\, e_i = \{t, t\varepsilon D \,;\, te_i = x_i\},$$

résiduel à gauche de $x_i$ par $e_i$ . Dans la réciproque, (I) prise comme hypothèse, nous assurera que $\rho$ est surjective. (Dans le cas classique, il est clair que la somme $x e_1 + \ldots + x e_n$ appartient à $\bigcap_{i\,\varepsilon\, I} x_i \,.\, e_i$).

D'autre part, supposer que $\rho$ est <u>injective</u> entraîne que les égalités $x e_i = y e_i$ ( $i \,\varepsilon\, I$) impliquent $x e = y e$ (où $e = \bigvee_{i\varepsilon I} e_i$) , ce qui est encore une propriété multiplicative, la "weak left distributurty", WLD , ainsi appelée parce que, dans le cas classique, elle est une conséquence de la distributivité à gauche appliquée à $e = e_1 + \ldots + e_n$ . Prise comme hypothèse dans la réciproque, WLD entraîne l'injectivité de $\rho$ . Cette condition WLD généralise d'ailleurs aussi une règle de simplification à droite limitée aux $e_i$ (ou même à au moins un d'entre eux).

Sur cette base, la théorie générale va se développer sans encombres, mais deux faits encore méritent d'être signalés dans cette étude des techniques de généralisation.

Dans le "cas classique", on suppose que les idempotents commutent entre eux ce qui entraîne (dans l'anneau A) qu'ils appartiennent au centre C (c'est-à-dire commutent avec tout élément de A). Dans un demi-groupe D , les deux propriétés se dissocient (1) et on est amené à prendre l'hypothèse la plus forte : $E \subseteq C$ .

D'autre part, la finitude de D, dans le cas classique entraînait (avec la commutation des idempotents) qu'il était un treillis atomique. Supprimant la première hypothèse, nous ne pouvons que conserver la seconde .

On arrive ainsi à définir un demi-groupe fragmenté "correctement", c'est-à-dire de façon à :

1°) établir les propriétés de structure analogues à celles du cas classique ;

2°) constater que le retour au cas classique par spécialisation se fait parfaitement ;

3°) montrer par un exemple (où on a d'ailleurs encore card $E < \infty$) qu'il existe bien des demi-groupes fragmentés qui ne sont pas sous-jacents à un anneau. (Pour le détail des développements, voir mes trois articles déjà cités).

## 5. La Généralisation en Mathématiques.

Nos trois exemples étaient empruntés à la Géométrie, à l'Analyse et la Topologie, et enfin à l'Algèbre. Ne serait-il pas plus important de dire que le premier retraçait l'évolution d'un théorème, que le deuxième concernait un enchaînement de notions fondamentales, plus ou moins générales, que le troisième portait sur des résultats qui, si j'ose dire, finissent par "sauter" d'une théorie à une autre.

---

(1) Un autre exemple de telle dissociation est celle de la propriété : nombres premiers entre eux (voir par exemple mon exposé : les Méthodes modernes en Algèbre, Congrès International de Philosophie des Sciences, Paris, 1949 ; Philosophie mathématique, p. 64).

Bien entendu, d'autres exemples, non moins typiques, auraient pu être donnés : Théorème de Jordan-Hôlder, définitions de l'intégrale, décomposition d'un nombre en facteurs premiers et théorie des idéaux .... pour ne citer que ceux-là ;

A mes yeux, généraliser un problème, c'est d'une part, en affaiblissant les hypothèses, étendre le domaine d'application de la solution ; c'est d'autre part, en réduisant ce problème à l'essentiel, avoir quelque chance de faciliter sa solution. Dans ces conditions, comment la tendance à la généralisation ne serait-elle pas un des ferments les plus actifs du développement des mathématiques ? Elle a même pu apparaître comme une véritable nécessité, à Fontenelle déjà, puis, près de deux siècles plus tard à Ernst Mach qui fait, de "l'Economie de Pensée" le grand principe de toute Science (1) .

Quant à l'opposition qu'ont rencontrée certaines généralisations, elle me paraît avoir révélé, en fait, leur caractère de véritable nouveauté ! Et on voit bien de quelle façon le temps a tranché de telles querelles. Cependant, je reconnais volontiers, en particulier du point de vue pédagogique, que les théories générales sont présentées parfois de façon trop abrupte et qu'il s'impose, au départ, de faire un effort pour bien orienter la réflexion de l'auditeur ou du lecteur.

La tendance à la généralisation est un besoin impérieux de notre esprit. Son exercice fait appel aussi bien à l'imagination et à la subtilité qu'à la critique et à la rigueur logique. Le développement de 1'axiomatique l'a vigoureusement stimulé, mais il a montré aussi la possibilité et l'intérêt de "l'opération inverse", la particularisation dont nous avons vu un exemple avec les espaces ultramétriques. Finalement, ce qui me paraît merveilleusement fécond, c'est ce mouvement continuel de la pensée entre idées générales et cas particuliers, cette oscillation de 1'espritentre^ diff éjnsnjh.p n î \7c*j*vrx_Ji -traction et de généralité qui, les uns comme les autres, offrent leurs problèmes et opposent leurs difficultés.

(1) "J'ai déjà exposé mon opinion sur la nature de toute science, qui est de la considérer comme une économie de pensée".