

SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

GERHARD HEINZMANN

Poincaré et le concept de prédictivité

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1985, fascicule 8
« Poincaré et le concept de prédictivité », , p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1985__8_A1_0

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures,
1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique
l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute
utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.
Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Poincaré et le concept de prédicativité*

Gerhard Heinzmann⁺

I. Des antinomies au pragmatisme philosophique de Poincaré. - II. La première définition (P1) de la prédicativité. - III. La deuxième définition (P2) et son rapport avec P1.

I. Dans ces Principles of Mathematics Russell détermine le concept de classe à l'aide de fonctions propositionnelles: les éléments qui rendent vrais une fonction propositionnelle forment une classe:

$$(1) \quad \forall X(X \in E \leftrightarrow \varphi(X)).$$

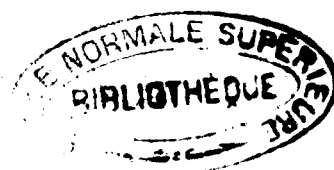
Remarquons que E est un nom propre pour un objet abstrait et n'est par conséquent pas éliminable par une configuration du type prédicat/individu. La formule (1) n'est pas une définition nominale de E, bien que celle-ci soit le seul type de définition recevable par le programme réductionniste du logicisme. Mais - il est bien connu - le caractère non-nominale n'est pas le seul défaut de la compréhension naïve: elle induit pour $\varphi(X) \Leftrightarrow X \notin X$ l'antonomie logique qui porte le nom de Russell.

Selon Poincaré les antinomies sont une conséquence nécessaire de la méthode erronée du réalisme conceptuel qui fait une usurpation de l'intuition à l'égard des entités abstraites. Pour expliciter cette thèse, je me propose d'examiner l'interprétation de Poincaré du concept de la définition explicite d'un ensemble.

De telles définitions se font d'après les derniers écrits de Poincaré selon deux processus: " soit par genus proximum et differentiam

*Ce texte, lu le 9 décembre 1985 au Séminaire de Philosophie et Mathématiques organisé par Maurice Caveing, Maurice Loi et René Thom à l'École Normale Supérieure, Paris, est un abrégé de mon livre Entre intuition et Analyse. Poincaré et le concept de prédicativité, Paris (A. Blanchard) 1985.

⁺ Fachbereich 5.1, Philosophie, Universität des Saarlandes, D-6600 Saarbrücken.



specificam soit par construction"¹. Ces deux méthodes correspondent à la dispute entre réalistes et nominalistes, reprise par Poincaré en termes de 'cantoriens' et 'pragmatistes', qui défendent les uns un point de vue de la compréhension, les autres un point de vue de l'extension: Poincaré range les 'logiciens' - ils appartiennent à l'école de Peano-Russell, mais également à l'école de Hilbert - du côté des cantoriens, tandis qu'il prend lui-même position pour les pragmatistes.

Les pragmatistes ne sont pas des réalistes. Ils prohibent, pour ainsi dire, de lire l'arbre porphyrien de haut en bas, c'est-à-dire de considérer le "genre...antérieur à l'espèce"² et de s'arrêter à un niveau abstrait. Ainsi, une définition qui ne définit "non pas un individu, mais un genre tout entier"³ est incomplète; car

l'individuation ne découle pas logiquement de l'unité abstraite:

"La connaissance du genre ne...fait pas connaître tous ses individus, elle...donne seulement la possibilité de les construire tous, ou plutôt d'en construire autant que vous voudrez. Ils n'existeront qu'après qu'ils auront été construits, c'est-à-dire après qu'ils auront été définis."⁴

Si le vocabulaire de Poincaré est traditionnel, le sens qu'il lui donne l'est moins: l'extension et l'intension n'apparaissent plus comme métaprédicats de prédicats. Car de définir un genre à l'aide d'un prédicat - comme procèdent les adhérents du point de vue de la compréhension - semble être eo ipso un mode intensionnel. Par contre, l'extension ne concerne pas un prédicat, mais un mode de construction.

1 Poincaré 1912, p. 89.

2 Poincaré 1906, p. 317.

3 Poincaré 1912, p. 89.

4 Poincaré 1912, p. 91.

En se limitant à définir un ensemble en tant qu'entité abstraite, on se prive de l'aspect constructif de la définition, lequel - pour les cantoriciens - est une "restriction artificielle".

Mais, pour le pragmatiste, une définition directe formée selon la méthode inversée des cantoriciens peut être 'corrigée' en la complétant par une deuxième partie qui remplace l'hypostase d'une entité abstraite servant en tant que référence du genre: il faut "sous-entendre l'ensemble des individus qui satisfont à la définition"⁵. Puisque la généralité est du point de vue de l'extension une universalité individuelle ou numérique, il est nécessaire qu'on énonce cette seconde partie de la définition, sans quoi une proposition au sujet de tous les objets d'un ensemble "n'aurait aucun sens" et "l'objet serait impensable"⁶. L'expression 'aucun sens' prend dans un article de 1912 même une valeur philosophique. Pour les pragmatistes, le sens d'une définition, c'est-à-dire l'existence des instances de vérifications, devient alors avec la non-contradiction le critère d'admissibilité d'une définition. Il introduit, pour ainsi dire, une restriction 'par le bas'. Voici maintenant la présentation d'une définition complète selon les pragmatistes:

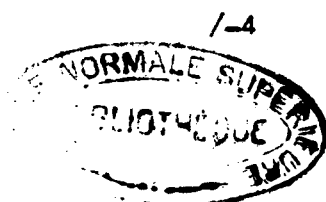
"La première partie de la définition, commune à tous les éléments de l'ensemble, nous apprendra à les distinguer des éléments qui sont étrangers à cet ensemble; ce sera la définition de l'ensemble du genre; mais ce genre ne préexiste pas ici à ses éléments; la seconde partie nous apprendra à distinguer les uns des autres des différents éléments de l'ensemble; ce sera l'indication de la *differentia specifica*."⁷

Si le pragmatisme de Poincaré a toujours été associé à une philosophie utilitaire ou à une philosophie pragmatique en ce sens qu'un technicien utilise des résultats tout en attendant la démonstration de leur non-contradiction, il deviendra plus tard, avec les formulations de 1912, un intuitionnisme de principe: les considérations de non-contradiction

⁵ Poincaré 1912, p. 89.

⁶ Cf. Poincaré 1909b, p. 27.

⁷ Poincaré 1909b, p. 27.



ne sont plus suffisantes si l'on ne peut indiquer en même temps un processus de vérification, c'est-à-dire un modèle concret, une construction qui repose sur l'intuition.

Cependant, par rapport à Brouwer, on pourrait étendre la dénomination 'semi-intuitionnisme' à la philosophie poincarésienne: l'adjonction 'semi' marquerait alors la manière particulière dont elle conçoit la relation entre intuition et langage. Ce dernier est pour Brouwer qu'un moyen auxiliaire, tandis que Poincaré donne à l'identification pragmatique de l'ontologie à l'épistémologie une tournure langagière: pour le pragmatiste un individu "n'existe que quand il est pensé... d'un sujet pensant" et quand il est susceptible d'être défini "en un nombre fini de mots". Et un concept qui n'en est pas susceptible n'est pas admis parce qu'il ne peut être pensé ⁸. Il semble alors cohérent de dire avec Heyting que la définissabilité en un nombre fini de mots signifie (dans un sens textuel: 'est un signe pour') la constructibilité finie ⁹. Tous les éléments d'un genre doivent bénéficier d'une constructibilité finie. Cette interprétation trouve ~~une~~ ~~une~~ confirmation lorsque Poincaré infirme une affirmation de Schoenflies qui dissocie justement la définissabilité finie de la construction. L'ensemble des fonctions constantes en est l'exemple:

"Quand on dit 'une fonction constante', remarque Poincaré, on a une formule d'un nombre fini de mots et qui s'applique à une infinité de fonctions; mais qui ne les définit pas... Il n'est donc pas exact de dire que cette formule définit en un nombre fini de mots un ensemble de fonctions". ¹⁰

⁸ Poincaré 1912, p. 94.

⁹ Heyting 1934, p. 4.

¹⁰ Poincaré 1909a, p. 114/115.

Puisque la définition d'un ensemble nécessite la 'connaissance' de tous ses individus, la définition d'un ensemble infini au sens actuel dans une même formule comportant un nombre fini de mots est impossible:

Du point de vue de l'extension, l'infini est un devenir et jamais une totalité close. Borel donnera avec sa distinction entre l'ensemble dénombrable et son sous-ensemble effectivement énumérable une première précision de la conception vague du 'on pourra énumérer' de Poincaré: pour Borel, un ensemble est seulement admissible, s'il est effectivement énumérable, c'est-à-dire, si on peut indiquer "au moyen d'un nombre fini de mots, un procédé sûr pour attribuer sans ambiguïté un rang déterminé à chacun de ses éléments"¹¹. Nous savons aujourd'hui que la restriction sur le seul concept de récursivité générale qui est sans doute visé par Borel, ne conduit malheureusement pas très loin: généralement, un prédicat défini sur les nombre naturels à l'aide des quantificateurs non-restreints n'appartient déjà plus à la classe des prédicats récursifs. Ceci et le fait d'une possible interprétation constructive de l'arithmétique élémentaire classique suggèrent à élargir le pragmatisme au sens de Poincaré: il semble souhaitable d'admettre la totalité des nombres naturels et de différencier les prédicats récursivement non-décidables selon la complexité de leur non-décidabilité.

II. Passons maintenant à la tâche de faire valoir l'interprétation de la philosophie pragmatique pour la genèse des définitions poincaréiennes de la prédictivité.

C'était Russell qui a introduit en premier les termes 'prédicatif' et 'non-prédicatif'¹² pour fixer la différence de deux sortes de fonctions propositionnelles: celles qui déterminent et celles qui - comme $\varphi(X) \subseteq X \neq X$ - ne déterminent pas une classe. Il appelle les premières 'prédicatives' et les deuxièmes 'non-prédicatives'. Pour parer au phénomène des définitions

¹¹ Borel 1908 a, p. 446/447.

¹² Russell 1906a, p. 34.

non-prédicatives Russell propose deux manières de réagir: ou bien on adopte la théorie que les fonctions déterminent - au moins en règle général - des classes et, par la suite, on indique un principe pour exclure les définitions non-prédicatives; - ce type de solution sera plus tard représenté par la théorie ramifiée des types -; ou bien on préfère une solution radicale et on renonce à toute classe en tant qu'entité. A cette exigence obéit la 'no-classes-theory' qui, d'abord, trouve les faveurs de Russell.

En ce moment, Poincaré semble donc pouvoir triompher de Russell qui doit soumettre son illusion 'platonicienne' au 'rasoir' d'Ockham: si les positions du pragmatiste et du cantorien sont alternatives, les antinomies obligent de restreindre l'universalité de la variable sur les individus qui seuls sont encore à considérer comme des entités. Par contre, les classes ne constituent que des 'façons de parler'.

Poincaré voit la faute immédiate des définitions non-prédicatives dans un cercle vicieux. Voici sa première définition de la prédicativité:

P1: La définition d'un ensemble est prédicative, si elle peut être formée "sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même. Sans quoi la définition de E contiendrait un cercle vicieux; on ne peut pas définir E par l'ensemble E lui-même"¹³

- une formulation qui mène directement au célèbre principe du cercle vicieux de Russell:

"Tout ce qui contient une variable apparente ne doit pas être une... des valeurs possible de cette variable"¹⁴. "Le cas important de ce principe peut être énoncé moins exactement comme suit: 'Tout ce qui enveloppe tous ne peut pas être un de ces tous' "¹⁵.

Ce principe est célèbre, puisque Russell a réussi de développer une théorie qui le respecte: la théorie ramifiée des types. Chez Poincaré on ne trouve rien de comparable: il croit que sa théorie sous-jacente d'un pragmatisme

¹³ Poincaré 1906, p. 307.

¹⁴ Russell 1906b, p. 640.

¹⁵ Ibid.

constructif le met - disons naturellement - à l'abri des fautes de définitions. Pour lui, les antinomies ne sont que le signe de l'erreur des cantorians, à savoir de considérer une totalité comme une donnée indépendante de ses individus. Mais ceci constitue un procédé habituel et jusqu'à présent non suspect de la théorie des ensembles de Zermelo, utilisé par exemple dans la définition d'une intersection des éléments de l'ensemble des parties d'un ensemble M:

soit $B_i \subseteq M$ et $R \subseteq \mathcal{P}(M)$ tel que $\bigwedge B_i (B_i \in R \leftrightarrow \varphi(B_i))$;

$I \Leftrightarrow \bigcap B_i [B_i \in R]$, donc $I \in \mathcal{P}(M)$. On a:

$$\bigwedge (x (x \in I \leftrightarrow \bigwedge B_i (\varphi(B_i) \rightarrow x \in B_i))).$$

Pour déterminer I, il faut tester, si $\varphi(I)$ et donc déjà connaître I. La définition est alors non-prédicative selon P1.

Aussitôt après la publication de sa critique, Poincaré apprend l'inconvénient que devait provoquer une restriction aux définitions prédicatives (P1), non seulement pour la théorie des ensembles, mais surtout pour l'Analyse, donc pour les 'vraies mathématiques' qui cependant, selon Poincaré, sont restées hors de portée des difficultés concernant les fondements. Car, pour démontrer le théorème fondamental de l'algèbre selon lequel, dans les nombres complexes, une équation algébrique $F=0$ a toujours une racine, Cauchy utilise la définition proscribed d'une intersection ou d'un élément minimal d'un ensemble¹⁶: on montre que F atteint l'élément minimal qui ne peut être que zero; en symboles:

$$\forall E \bigwedge X (X \in E \leftrightarrow \bigwedge Y (\bigvee Z (Y = |F(Z)|) \rightarrow X \in Y))$$

(Y, X, Z sont des variables pour des ensembles de nombres rationnels possédant la propriété de Dedekind)

L'élément E est alors défini par rapport à toutes les valeurs Y de F dont il fait lui-même partie. La définition de E est non-prédicative au sens de P1.

¹⁶ Cf. Zermelo 1908, p. 117.

Dès lors, il semble bien qu'on ne peut rejeter " l'emploi des définitions non-prédicatives sans rejeter une démonstration admise par tous les mathématiciens"¹⁷. Mais, en vérité, on n'est nullement obligé d'admettre une telle conséquence funeste. Poincaré l'explique dans une mise au point de l'application de P1:

Premièrement, il suffit parfois de transcrire les définitions existantes pour voir que leur sens correspond à l'exigence de P1, c'est-à-dire il suffit de remplacer dans le cas concret la définition non-prédicative par une définition prédicative. Ceci est facile pour le théorème fondamental: on limite d'abord F aux valeurs rationnelles complexes. Le minimum E des valeurs Y' de $|F(X)|$ est alors en général non-rationnel (on ne montre qu'ensuite qu'il coïncide avec zéro) et ne fait donc pas partie de la totalité des valeurs Y' de $|F(X)|$.

Deuxièmement, et plus généralement, cet exemple donne une précision importante sur l'interprétation poincaréenne de P1 que nous désignerons par P1a :

P1a: Une définition d'un ensemble E qui utilise dans le définissant une totalité dont elle fait partie, est néanmoins prédicative, si E ne ne fait pas partie de cette totalité "en vertu de sa définition, mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de cette totalité et à celle de E"¹⁸.

Dans la modification précédente du théorème fondamental de l'algèbre, l'élément minimal E ne fait pas partie de la totalité des valeurs Y' en vertu de sa définition, puisqu'il est en général non-rationnel et puisque la démonstration montrant qu'il est égal à zéro, est postérieure à la fois à la définition des Y' et à celle de E.

¹⁷ Poincaré 1909a, p. 118.

¹⁸ Ibid., p. 119.

La prédictivité selon $P1a$ n'est pas une notion absolue, mais plutôt relative à l'univers considéré . Lorsque celui-ci est donné dans sa totalité extensive indépendamment de la définition en question, cette définition n' est plus circulaire même si elle contient un quantificateur portant sur la totalité à laquelle appartient le défini . Strictement parlant, elle n'est qu'une description équivalente du défini dont l'existence est déjà assurée.

Une telle définition est dans un certain sens 'stérile': elle n' introduit pas l'existence d'un nouvel élément. Inversement, dès qu'une définition d'une même forme (un quantificateur universel porte sur une totalité qui enveloppe le défini) implicite un postulat d'existence du défini, on la suspectera au point de vue pragmatique d'un vice formel de circularité, c'est-à-dire d'un vice devenu indépendant de sa ratio cognoscendi: l'antinomie effective

$P1$ semblait trop restrictive pour le maintien des résultats importants en Analyse. Maintenant par contre, Zermelo estime que $P1a$ est si libérale qu'elle permet même de justifier à l'encontre de son auteur des formations d'intersection refusées par lui. En effet, La transformation de la définition de l'élément minimal d'un ensemble de valeurs d'une fonction algébrique en une définition prédicative sous l'exploitation de $P1a$ se laisse transcrire pour l'élément minimal de sous-ensembles quel conques. Ainsi on peut paraphraser Poincaré pour l'exemple de l'intersection comme suit:

"Si nous envisageons un ensemble R d'ensembles B_i de M on peut démontrer que cet ensemble possède une partie commune I ; cette partie commune est définie après l'ensemble R ; et il n'y a pas de pétition de principe puisque I ne fait pas en général partie de R . Dans certains cas particuliers, il n'y a pas non plus de pétition de principe puisque I ne fait pas partie de R en vertu de sa définition, mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de R et à celle de I ." 19

19 Zermelo 1909, p. 193 ; j'ai adapté les symboles à l'exemple donné plus haut.

Les publications de Poincaré ne contiennent aucune réaction explicite à cet argument de Zermelo. Néanmoins, l'introduction d'une nouvelle définition de la prédictivité présentée à peine deux mois après la parution de l'article de Zermelo, pourrait être lu comme une confirmation implicite, relativisée pourtant par le fait que Poincaré maintient également P1.

Or, si la réaction historique de Poincaré à l'argument de Zermelo semble peu assurée, au moins du point de vue systématique sa position reste soutenable. Car la forme condition-

nelle de P1a- interprétée comme
P1a': ' Si dans une définition un quantificateur universel porte sur une totalité qui enveloppe le défini, mais qui existe indépendamment de ce défini, cette définition n'est pas circulaire.'

renvoie à la question de la vérité de l'antécédant, c'est-à-dire à la manière dont l'univers considéré est donné. Et c'est cette version pragmatiste de la question qui permet d'établir une nuance entre les deux exemples étudiés ci-dessus: d'une part, l'univers est un sous-ensemble de l'ensemble des parties des nombres rationnels complexes, d'autre part un sous-ensemble de l'ensemble des parties d'un ensemble (en principe) quelconque. Pour un pragmatiste cette différence doit être de taille, bien que pour la percevoir il faille dépasser le cadre textuel du 'finitisme' de Poincaré qui, tout en soutenant le caractère constructif des nombres entiers, conteste leur clôture . Or, tandis que, selon Borel, la transition des nombres rationnels aux réels exige - si on renonce à solliciter l'intuition géométrique - "que l'on admette la légitimité d'une

infinité dénombrable de choix successifs et arbitraires... [qu']
on ne peut évidemment pas effectuer tous, mais [pour laquelle]
on peut du moins indiquer une marche telle que, cette marche étant
fixée, on soit assuré que l'un quelconque des choix sera effec-
tué au bout d'un temps fini" ²⁰, une telle construction séquen-
tielle est impossible dans le cas général de la transition d'un ensemble
à l'ensemble de ses parties . Si l'on fait abstraction de la circonstance
qu'une conception 'close' des nombres naturels semble inévitable, ces deux
exemples reflètent à l'égard de leur 'vérification' les deux tendances op-
posées du pragmatisme constructif et du cantorisme: en effet,
seul le premier exemple permet une instance de vérification qui,
selon Poincaré, décide sur le 'sens' d'une définition . Car la
structure de cet exemple fait qu'il participe, certes, "de l'in-
fini, mais non parce qu'une des vérifications possibles en parti-
cipe elle-même, mais parce que les vérifications possibles sont
en nombre infini" ²¹. En d'autres termes, ces présuppositions
méthodologiques donnent la liberté de suspecter un cercle là où
on traite d'un ensemble en général, sans pour autant mettre l'ana-
lyse entière en cause. Dans ce sens l'argument de Zermelo n'est
pas impératif.

Une remarque semblable s'impose à l'égard d'une ana-
lyse du reste très claire que donne Fraenkel en 1927 de la dis-
cussion entre Poincaré et Zermelo exposée ci-dessus. ²² Il y prend
position pour Zermelo; bien plus, il renforce son argument; car
la modification P1a de Poincaré ne lui semble pas seulement lé-
gitimer des procédés jusqu'ici jugés non-prédicatifs par Poincaré
lui-même, mais conduire à l'exclusion de l'élément non-prédicatif
dans les antinomies comme celle de Burali-Forti. Pour le voir,

²⁰ Borel 1908b, p. 16.

²¹ Poincaré 1912, p. 85.

²² Cf. Fraenkel 1927, pp. 26-34.



il suffit d'assimiler la formulation standard de cette antinomie à P1a de la manière suivante:

"Considérons d'abord l'ensemble de tous les nombres ordinaux (ordonnés d'après leur grandeur) comme un ensemble ordonné O et démontrons seulement ensuite que son type d'ordre est un nombre ordinal (c.-à-d. un type d'un ensemble bien ordonné) qui devrait donc lui-même appartenir à l'ensemble O comme élément." 23

On aurait par conséquent, et l'antinomie, et la prédicativité.

Cette argumentation de Fraenkel a sûrement contribué à faire négliger désormais P1a. Et pourtant, le pragmatiste ne la suivra guère puisqu'il ne disposera pas d'un procédé pour la construction de la totalité de la classe ordonné des nombres ordinaux.

L'analyse de Fraenkel est néanmoins précieuse, car elle délimite les positions ontologiques conciliables avec P1a : si un finitisme strict semble trop restreint pour être maintenu (l'univers deviendrait alors trop petit, des différences importantes disparaîtraient dans l'uniformité du complément), la position cantorienne d'autre part réintroduirait le cercle et serait trop large. En d'autres mots, si la prédicativité selon P1a dépend du mode dont l'univers est donné, elle restreint en contrepartie le choix philosophique de son interprétation.

23 Fraenkel 1927, p. 30.

III. Le problème de la prédicativité consiste à éviter un cercle vicieux en ajustant l'application des quantificateurs au mode d'existence de leur domaine. Ainsi toutes les variantes du premier concept de Poincaré ont en commun qu'elles interdisent la quantification *dans* un domaine dont les éléments ne peuvent pas être antérieurement indiqués dans leur totalité'

A partir de 1908 surgit parallèlement à cette analyse une autre idée qui conduira en 1909 à une 'nouvelle définition' (Poincaré, il est vrai, ne la désigne pas comme telle): maintenant il appelle

P2: une classification prédicative, si elle n'est pas bouleversée par l'introduction de nouveaux éléments²⁴.

Tandis que P1 mène à l'idée qu'une définition prédicative oblige à limiter la quantification non-restreinte à des ensembles qui sont à notre disposition au sens pragmatique (on est conduit à limiter les domaines infinis), P2 indique des conditions restrictives pour la quantification sans qu'il intervienne une restriction explicite du domaine: pour qu'une classification soit prédicative selon P2, il suffit que la quantification portant sur un domaine indéfini²⁵ dont dépend le définiendum, ne change pas la classification déjà déterminée de ses éléments. Si on prend l'antinomie de Russell comme exemple, l'introduction de E comme valeur du quantificateur universel oblige à changer la classification existante, car celle-ci devient contradictoire.

Reste le problème de l'équivalence extensive entre P1 et P2. Vont-elles exclure les mêmes définitions? Les différents exemples que j'ai examinés ne sont guère de nature à dissiper toute obscurité dans l'

²⁴ Cf. Poincaré 1909c, p. 122.

²⁵ Un domaine est appelé 'indéfini', si on peut lui ajouter un élément non-exprimable par les moyens de définitions préalablement fixés.

application des règles de prédictivité. Ceci d'autant plus que la portée réelle de $P1a'$ dépend -comme nous l'avons vu - du concept sous-jacent de constructivité.

Au lieu de poursuivre la discussion sur la constructivité ab ovo, nous présupposons pour la fin la totalité actuelle et prédictive des nombres naturels: c'est la condition nécessaire d'un développement des mathématiques dépassant l'arithmétique élémentaire. Cette décision mettra quelque lumière sur la relation entre $P1$ et $P2$.

Si on présuppose donc un langage du 2^e ordre permettant des quantifications sur des ensembles de nombres naturels, l'exigence de $P1a$, qu'une définition prédictive ne doit utiliser que des quantificateurs portant sur des ensembles déjà à notre disposition, conduit - comme l'a démontré Feferman²⁶ - à une théorie exclusive des types, et l'idée intuitive de $\bar{P}2$: que les définitions doivent être invariantes par rapport à un élargissement du domaine de leurs quantificateurs du 2^e ordre, nous mène à une théorie cumulative des types. On montre ensuite que, dans les deux cas, les ensembles prédictivement définissables sont les mêmes: cet univers se compose exactement de la totalité des ensembles hyperarithmétiques qui sont une extension des ensembles appartenant à la hiérarchie arithmétique de la classe des prédicats différenciée selon la complexité de leur non-décidabilité et qui se trouve^{nt} d'autre part au bas de l'échelle de la hiérarchie analytique qu'on obtient, si on passe du 1^{er} au 2^e ordre.

Ainsi, par l'équivalence en question, se confirme au niveau des systèmes formels l'idée intuitive de Poincaré. Par contre, si l'univers hyperarithmétique est vraiment une description adéquate de l'idée de prédictivité, est une autre question dont le traitement demanderait une autre conférence d'un caractère plus technique.

26 Cf. Feferman 1964.

Bibliographie

Borel, Emile

- 1908a Les paradoxes de la théorie des ensembles. Ann. scientifiques de l'ENS 44 (3^e série 25), pp. 443-448.
- 1908b Sur les principes de la théorie des ensembles. Atti int. dei Matematici, Roma, vol II, pp. 15-17.

Faferman, Solomon

- 1964 Systems of Predicative Analysis. The Journal of Symbolic Logic 29, pp. 1-30.

Fraenkel, Adolf Abraham

- 1927 Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Leipzig/Berlin.

Heyting, Arend

- 1934 Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie, Berlin.

Poincaré, Jules Henri

- 1906 Les mathématiques et la logique. Rev. méta. et mor. 14, pp. 294-317.
- 1909a Réflexions sur les deux notes précédentes. Acta mathematica 32, pp. 195-200; cité d'après la réimpression dans Poincaré, Oeuvres, t. XI, pp. 114-119.
- 1909b La logique de l'infini. Rev. méta. et mor. 17, pp. 461-482; cité d'après la réimpression dans Poincaré, Dernières pensées, Paris 1963, pp. 7-31.
- 1909c Ober transfinite Zahlen. Dans H. Poincaré, Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, Leipzig/Berlin 1910, 5. Vortrag, pp. 43-48; cité d'après la réimpression dans Poincaré, Oeuvres, t. XI, pp. 120-124.
- 1912 La logique de l'infini. Scientia 12, pp. 1-11; cité d'après la réimpression dans Poincaré, Dernières pensées, Paris 1963, pp. 84-96.

Russell, Bertrand Arthur William

- 1906a On some Difficulties on the Theory of Transfinite Numbers and Order Types. Proc. of the London Math. Soc., 2nd ser., 4 (1907) (issued 1906), pp. 29-53.
- 1906b Les paradoxes de la logique. Rev. méta. et mor. 14, pp. 627-650.

Zermelo, Ernst Frierich Ferdinand

- 1908 Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. Mathematische Annalen 65, pp. 107-128.
- 1909 Sur les ensembles finis et le principe de l'induction. Acta mathematica 32, pp. 185-193.