Séminaire de philosophie et mathématiques

GERT H. MULLER

Nouvelles orientations en philosophie des mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1993, fascicule 4
« Nouvelles orientations en philosophie des mathématiques », , p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1993___4_A1_0>

Nouvelles orientations en philosophie des mathématiques

Gert H. Müller, Math. Inst. Univ. Heidelberg.

Ce que je considère comme nouvelles orientations en philosophie des mathématiques est : au lieu d'établir comme premier problème principal les fondations des maths, nous pouvons nous concentrer plutôt sur ce que nous apprenons et comprenons à partir des résultats de la logique mathématique (au sens large). L'aspect fondamental de la philosophie des mathématiques était d'obtenir - bien d'accord avec l'idéal grec de la science déductive - une seule théorie formulée dans un langage bien défini, avec des axiomes au départ et l'obtention de conséquences par des moyens purement logiques. Comme il est bien connu, une telle organisation des mathématiques modernes peut être donnée d'une façon particulièrement simple et formellement instructive. Diverses variantes sont analysées et comparées par rapport à leur force et leurs dépendances ou indépendances mutuelles. Comme il est bien connu dans la vie quotidienne, nous devons admettre quelques risques et nous n'obtiendrons jamais une sécurité absolue par démonstration. Cette vision triviale est précisée par une interprétation adéquate des fameux théorèmes de l'imcomplétude de K. Gödel ou par quelques résultats d'indépendance. On constate que même les théorèmes de Gödel doivent être démontrés quelque part ! Tout cela est bien compris et déjà décrit dans des livres et articles de lecture facile.

Cependant dans les derniers 60 ans, approximativement, une grande quantité de résultats nouveaux ont été trouvés, quelques-uns de caractère plus technique, et beaucoup qui exigent une réelle compréhension et interprétation. Le but de mon exposé est de faire une contribution en cette matière. Selon le temps disponible quelques-uns des points suivants seront développés en détail.

Quelque part, je ne me rappelle pas où, le Prof. R. Thom affirmait que les mathématiques s'occupent de NOMBRE et d'ESPACE; il ajoutait immédiatement que cette position doit être entendue avec beaucoup de ramifications, en tout cas cum grano magno salis ! Je suis d'accord avec sa description des mathématiques classiques, comme elles étaient entendues au 19ème siècle et comme elles le sont aujourd'hui dans la plupart des instituts mathématiques un peu partout.

Mais je considère que deux nouveaux sujets deviennent identifiables, qui ont la même profondeur dans leur contenu que les antérieurs, mais qui sont au moins aujourd'hui et peut-être encore demain de moindre importance dans les applications techniques visibles : ce sont l'INFINI (au sens propre) dès G. Cantor et le CODAGE dès K. Gödel.

Les deux sujets sont entrés en scène plus ou moins au tournant du siècle. L'abstraction et la complexité croissantes en analyse et topologie ont conduit à des résultats aussi surprenants que difficilement visualisables; en plus à la frontières des mathématiques des antinomies sont apparues. Le problème était comment les résoudre et obtenir un contrôle sur les outils logiques en mathématiques. D. Hilbert dès 1900 et L.E.J. Brouwer un peu plus tard ont senti la nécessité de s'occuper de ces problèmes.

Remarque : Je ne veux pas discuter l'intuitionisme aujourd'hui, mais il faut dire qu'après la création d'une théorie de l'infini actuel (c'est-à-dire de la théorie des ensembles), l'oeuvre de Brouwer était et est une entreprise gigantesque de développer les mathématiques et la logique sur la base exclusive de l'infini potentiel, et cela dès les fondements. Actuellement il y a un changement visible de l'intuitionisme vers les mathématiques constructives créées à partir de leurs fondements, avec le but idéal de fournir aux mathématiques appliquées une théorie des secteurs mathématiques qui conduisent à des résultats numériques (Erret Bishop). Les démarches utilisées pour les obtenir peuvent être arrangées d'une façon apte à la programmation. La source moderne principale des mathématiques intuitionnistes est une oeuvre en deux volumes de A. Troelstra et D. Van Dalen avec le titre "Introduction to Constructive Mathematices".

Dans la première partie de mon exposé je veux discuter le résultat principal de la théorie de la démonstration, établi à la moitié des années 80. On avait l'exigence radicale d'Hilbert d'une formalisaton complète des mathématiques et de la logique, c'est-à-dire d'un codage de ce que nous imaginons être les objets des mathématiques, les relations entre eux et comment obtenir des conséquences. Nous codons notre connaissance intuitive ou visualisée, en utilisant un langage formel et des règles de démonstrations applicables aux formules du langage. Naturellement, après avoir présenté par exemple la théorie des nombres au moyen d'un système formel, nous avons besoin d'un décodage pour obtenir ce que nous désirons connaître. Hélas, déjà dans le cas non trivial le plus simple, par exemple l'arithmétique de Peano, nous ne pouvons coder ce que nous tentons de caractériser : le modèle standard, qui consiste exactement de O, O', O'',O''',...

Vous vous rappelez la croyance d'Hilbert (affirmée avec beaucoup de présomption) que, après avoir transformé chaque dérivation formelle, par exemple de l'arithmétique de Peano, en arbre fini (incidemment, par division binaire), il devrait être possible de démontrer d'une façon simple (par exemple par induction), qu'aucun de ces arbres ne se termine avec le sommet $\ulcorner 0=1 \urcorner$. Cette croyance semblait assez raisonnable, mais K. Gödel l'a réfuté, ce qui était considéré comme un résultat surprenant. D'autre part G. Gentzen a démontré le projet d'Hilbert en utilisant une extension bien modeste de l'arithmétique de Peano.

L'importance du travail de Gentzen résidait dans sa méthode de démonstration, qui en effet - après quelques démarches essentielles de G. Takeuti, W.A. Howard et S. Feferman - allait être perfectionnée par l'école de K. Schütte, pour obtenir une démonstration de consistance de ce qu'on appelle Δ^1-analyse + barre induction. Qu'est-ce que ce système, et quelle est l'importance du résultat obtenu par rapport au rêve original d'Hilbert ? (Je voudrais traiter cette question d'un point de vue épistémologique).

Dans la deuxième partie j'ai l'intention de revenir au sujet de codage, à partir d'une position différente. Grâce au projet d'Hilbert et les travaux de logiciens de Peano jusqu'à P. Bernays, nous avons une image claire de théories totalement formalisées et ensuite, grâce à K. Gödel, de leur codage en arithmétique, et cela, admettons, en termes de fonctions et prédicats récursifs. Une théorie T est accompagnée de l'ensemble récursivement énumérable T_P pour T arbitraire n'est pas récursif en général. Laissant de côté des théories artificiellement construites, il arrive que tous ces ensembles de nombres T_P sont du même degré de complexité, qui est le plus haut. Donc ce type de codage ne différencie pas,par exemple,entre l'arithmétique de Peano et la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, deux théories qui sont sûrement très différentes.

La prochaine démarche utilisera le théorème de Löwenheim-Skolem, selon lequel (en supposant la consistance) chaque théorie strictement formalisée T a un modèle M_B, qui est au plus dénombrable (excluant ici le cas des modèles finis). La démonstration de ce théorème se réalise en utilisant dans le code de formalisation l'énumérabilité récursive de l'ensemble (des nombres) des axiomes. M_B étant dénombrable, il peut être mis en correspondance biunivoque avec les nombres naturels; les concepts primitifs de T sont alors comme la réplique des prédicats et des fonctions dans la théorie des nombres. Nous pouvons nous demander comment ces répliques peuvent être exprimées en termes d'addition et multiplication, de toute façon on a ainsi le modèle de Bernays M_B de T. Mais, dans les cas convenables, les répliques mentionnées (exprimées en termes arithmétiques) sont toutes de nouveau de la même complexité (elles sont des formules Δ^0) indépendemment des théories T considérées. Ainsi les modèles dénombrables des théories dont on dispose grâce au théorème de complétude de Gödel, sont tous de la même complexité arithmétique.

La situation change totalement si (pour des extensions de la théorie des nombres, par exemple pour des sous-systèmes de l'analyse) la dérivabilité par induction transfinie est utilisée. Ceci nous ramène à la version de Gentzen-Schütte de la théorie des démonstrations; dans ce cas la compléxité de la théorie permet de distinguer clairement entre les extension de la théorie des nombres.

La question d'intérêt philosophique est : jusqu'à quel point un codage et ce qui reste comme indiscernables par rapport au codage représente fidèlement la situation.

Dans la troisième partie je parlerai d'un procédé épistémologique, à savoir comment élargir un corps donné de connaissances à l'aide d'un nouveau concept (par exemple d'un prédicat), qui n'était pas définissable auparavant, tout en préservant ce corps sans modification. C'est le procédé général du <u>forcing</u>. Ce que nous devons faire est d'étendre un monde connu (<u>connu</u> - il s'agit des lois de Zermelo-Fraenkel, <u>monde</u> - il s'agit du modèle des ensembles constructibles de Gödel) à un autre monde (qui obéit <u>aussi</u> aux lois mentionnées) mais équipé d'un prédicat ("un <u>nouvel</u> entendement, qui n'était pas définissable antérieurement"), qui interagit avec les anciens objets. La méthode du <u>forcing</u> entendue comme cas idéal (purement) méthodique ressemble au procédé d'apprendre l'usage des concepts abstraits. (Sans entrer dans les technicités mathématiques, j'essayerai de développer tout cela avec quelques détails).

Finalement j'aimerais discuter un phénomène de la théorie des ensembles, où l'infini et des considérations épistémologiques sont entrelacés. Le fond technique est le suivant : les axiomes de la théorie des ensembles, par exemple dans la forme maintenant classique de Zermel-Fraenkel, peuvent être remplacés de façon équivalente comme suit :

1) <u>Des axiomes élémentaires</u>, qui garantissent les opérations habituelles de l'arithmétique récursive primitive (exprimées en termes ensemblistes). Il faut constater que dans cette partie du système axiomatique nous n'avons <u>pas</u> les schémas axiomatiques de la compréhension (pour la logique avec quantificateurs toute entière) ni du remplacement, ni les axiomes de la réunion et des parties et spécialement pas l'axiome de l'infini. On pourrait interpréter cette partie du système axiomatique comme la <u>partie combinatoire</u> purement <u>finitaire</u>.

2) Les schémas d'axiomes de la <u>réflexion</u>; leur idée est une stratégie que l'être humain a utilisé dès son enfance avec multiples répétitions, en effet, les jouets sont de petits modèles de quelque réalité, et inversement la réalité est "entendue" à travers des modèles accessibles. Ces axiomes expriment essentiellement les deux démarches de nos essais de nous familiariser avec quelques parties de la réalité ou d'en acquérir des connaissances. Dans mon exposé j'expliquerai la formulation suivante des principes de la réflexion.

PR : Pour chaque formule φ, si elle est valide dans l'univers des ensembles, alors il y a des ensembles qui la reflètent et sont des modèles de φ .

CR : Pour chaque formule φ, il y a des ensembles qui la reflètent et se comportent par rapport à φ exactement comme l'univers des ensembles.

3) Les faits : PR ou CR, chacun avec les axiomes élémentaires, sont équivalents à la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel; en plus l'idée de la réflexion permet des extensions substantielles de la théorie des ensembles.