Paul Krée

# Produits tensoriels topologiques multiples

*Séminaire Paul Krée*, tome 2 (1975-1976), exp. n° 3, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A3_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 3, 19 p.



# PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES MULTIPLES

par Paul KRÉE

Les produits tensoriels hilbertiens apparaissent dans les travaux de F. J. MURRAY et J. Von NEUMANN, 1936-1937. L'extension de ces idées aux espaces de Banach a été effectuée par R. SCHATTEN [9]. L'étude générale des topologies localement convexes sur des produits tensoriels d'espaces vectoriels est due à A. GROTHENDIECK ; c'est la théorie des p. t. t. ou produits tensoriels topologiques. Cette théorie est vaste et difficile (voir [2]). Quelques aspects de cette théorie, utiles en dimension infinie, sont exposés ci-après. Comme il s'agit d'introduire des e. l. c. s. de polynômes, ou de formes extérieures, la présentation concerne les produits tensoriels de plusieurs e. l. c. s. Les e. v. considérés sont relatifs au corps de base $\Lambda = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$. On a aussi présenté les produits tensoriels d'e. b. c. s., c'est-à-dire d'espaces bornologiques convexes séparés, ce qui nécessite quelques commentaires.

On rappelle l'intérêt des bornologies : elles conduisent naturellement à une formulation duale de la théorie des e. l. c. s., elles permettent une étude plus naturelle et plus complète des e. l. c. s., elles permettent d'apporter des formulations plus simples et des résultats plus complets concernant la dualité des e. l. c. s. [5] ... La bornologie apparaissant ainsi comme un complément à la théorie des e. l. c. s., un langage adapté et non concurrenciel est introduit ci-après : codual, cocomplet, conucléaire ... En analyse de dimension finie, les considérations bornologiques peuvent être évitées sans trop d'artifices. Comme la formulation bornologique se présente naturellement en analyse de dimension infinie [6], on a préféré ne pas la cacher (bien qu'on aurait pu le faire !).

## 1. Produit tensoriel.

Tous les espaces vectoriels considérés sont supposés tous réels ou tous complexes. Un produit tensoriel $(T, \varphi)$ des $n$ espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ est le couple formé par un espace vectoriel $T$ et par une application multilinéaire $\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \to T$ ayant la propriété suivante.

(1.1) Propriété universelle du produit tensoriel. - Pour tout e. v. $G$ et toute application multilinéaire $m$ de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans $G$, il existe une seule application linéaire $\tilde{m}$ de $T$ dans $G$ telle que $m = \tilde{m}\varphi$.

Il en résulte que $\operatorname{Im}\varphi$ engendre $T$ et que le produit tensoriel est "unique". En fait, si $(T, \varphi)$ et $(T', \varphi')$ sont deux produits tensoriels des $E_i$, il existe un isomorphisme $u$ de $T$ sur $T'$ tel que $\varphi' = \varphi u$ et $\varphi = u^{-1}\varphi'$. On pose $T = E_1 \otimes \dots \otimes E_n$. Un produit tensoriel peut être construit en prenant un quotient de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\prod E_j$, nulles en dehors des parties finies de $\prod E_j$. L'image de $(e_1, \dots, e_n)$ par $\varphi$ est notée $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$. Si tous les $E_j$ sont identiques à un e. v. $E$, on pose $T = \bigotimes_n E$. Vu (1.1), pour tout espace vectoriel $G$ il y a une bijection entre l'espace $\mathcal{L}({}^n E, G)$ des applications $n$-linéaires de $E$ dans $G$ et l'espace $\mathcal{L}(\bigotimes_n E, G)$ des applications linéaires de $\bigotimes_n E$ dans $G$. Dans le cas particulier où $G$ est le corps de base $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ces deux dernières notations sont remplacées par $\mathcal{L}({}^n E)$ et $(\bigotimes_n E)^*$.

Il est toujours convenu que $\bigotimes_n E = \Lambda$ si $n = 0$.

(1.2) Rappels (voir dans le séminaire 1974/75, l'exposé 7). - Le groupe symétrique $G_n$ admet une représentation linéaire $\sigma \to U_\sigma$ à valeurs dans $\bigotimes_n E$; $U_\sigma$ appliquant $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ sur $x_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes x_{\sigma n}$. Un tenseur $t \in \bigotimes_n E$ est dit symétrique (resp. antisymétrique) si $U_\sigma t = t$ (resp. $= \varepsilon_\sigma t$) pour tout $\sigma$. L'espace de ces tenseurs est noté $\odot_n E$ (resp. $\Lambda_n E$). Les projecteurs $(n!)^{-1} \sum U_\sigma$ et $(n!)^{-1} \sum \varepsilon_\sigma U_\sigma$ ont pour images $\odot_n E$ et $\Lambda_n E$. Pour tout e. v. $G$, il y a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(\odot_n E, G)$ et l'espace $\mathcal{L}_s({}^n E, G)$ des applications $n$-linéaires symétriques : $E \times \dots \times E \to G$. On pose $\mathcal{L}_s({}^n E) = \mathcal{L}_s({}^n E, \Lambda)$.

(1.3) PROPOSITION. - Soit $E - E'$ un couple d'e. v. en dualité séparante. La forme bilinéaire de dualité entre $\bigotimes_n E$ et $\bigotimes_n E'$ induit une dualité séparante entre $\odot E$ et $\odot E'$, et de même entre $\Lambda_n E$ et $\Lambda_n E'$.

En effet, soit $t \in \odot_n E$ tel que $\langle t, \theta \rangle = 0$ pour tout $\theta \in \odot_n E'$. Il s'agit de montrer que $t$ est nul. Or le transposé de l'isomorphisme $U_\sigma$ de $\bigotimes_n E$ est l'isomorphisme $U_{\sigma^{-1}}$ de $\bigotimes_n E'$; donc le transposé de l'endomorphisme Sym de $\bigotimes_n E$ est la symétrisation dans $\bigotimes_n E'$. Pour tout $\theta' \in \bigotimes_n E'$, on a

$$\langle t, \theta' \rangle = \langle \mathrm{Sym}\, t, \theta' \rangle = \langle t, \mathrm{Sym}\, \theta' \rangle = 0 .$$

Donc $t = 0$.

(1.4) Produit tensoriel d'applications linéaires. - Le produit tensoriel

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_n$$

de $n$ applications linéaires $u_j : E_j \to F_j$ applique $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ sur

$$u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n) .$$

En particulier, si toutes les applications $u_j$ sont identiques à $u : E \to F$, on obtient $\bigotimes_n u : \bigotimes_n E \to \bigotimes_n F$. La restriction de cette application à $\odot_n E$ a son image dans $\odot_n F$; cette restriction est notée $\odot_n u$. On définit de même $\Lambda_n u$.

Par transposition de $\odot_n u$, on obtient

$$(\odot_n F)^* = \mathcal{L}_s({}^nF) \xrightarrow{{}^t(\odot_n u)} (\odot E)^* = \mathcal{L}_s({}^nE) .$$

Dans le cas particulier où il existe des dualités séparantes $E - E'$ et $F - F'$, et où $u$ est faiblement continue pour ces dualités, alors ${}^t(\odot_n u)$ envoie

$$\odot_n E' \quad \text{dans} \quad \odot_n E' ;$$

et cette restriction coincide avec $\odot_n u'$ .

## 2. Polynômes.

(2.1) DÉFINITION. - <u>Soit</u> $\ell \geq 0$ . <u>Soient</u> E <u>et</u> G <u>deux e. l. c. s.</u> . <u>L'espace</u> $\mathcal{P}({}^\ell E , G)$ <u>des polynômes homogènes de degré</u> $\ell$ <u>sur</u> E <u>à valeurs dans</u> G <u>est</u> <u>l'espace des applications</u>

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} E &\to G \\ e &\to A(e , \dots , e) , \end{aligned}$$

A <u>décrivant</u> $\mathcal{L}_s({}^\ell E , G)$ . <u>L'application</u> (1.6) <u>est notée</u> $\hat{A}$ .

D'où une application chapeau

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s({}^\ell E , G) &\to \mathcal{P}({}^\ell E , G) \\ A &\to \hat{A} \end{aligned}$$

On pose encore $\mathcal{P}({}^\ell E) = \mathcal{P}({}^\ell E , \Lambda)$ .

(2.3) <u>Définition de</u> $\mathcal{P}({}^{\leq \ell}E , G)$ . - C'est l'espace des fonctions $Q = \sum_{i=0}^{\ell} Q_i$ sur E , à valeurs dans G , $Q_i$ étant homogène de degré i .

(2.4) <u>La décomposition</u> $Q = \sum Q_i$ <u>est unique</u>. - En effet, il suffit de montrer par différence que si le polynôme $\sum_{i=0}^{\ell} Q_i$ est nul, chaque $Q_i$ est nul. Ceci est clair pour $\ell = 0$ . Montrons la propriété par récurrence sur $\ell$ , en raisonnant par l'absurde. En effet, supposons $\sum_{i=0}^{\ell} Q_i$ nul et $Q_\ell$ non nul . Il existe $e \neq 0$ tel que $Q_\ell(e) \neq 0$ . On obtient une contradiction en faisant $\lambda$ grand dans la relation $\sum^\ell Q_i(\lambda e) = 0$ .

(2.5) LEMME. - <u>Soit</u> A <u>une application</u> $\ell$-<u>linéaire symétrique de</u> $E \times \dots \times E$ <u>dans</u> G . <u>Alors quels que soient</u> x <u>et</u> y <u>dans</u> E

$$(2.6) \qquad \hat{A}(x + y) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} A(x^{\ell-k} , y^k)$$

<u>avec</u> $A(x^{\ell-k} , y^k) = A(x , \dots , x , y , \dots , y)$ , <u>où la lettre</u> x <u>est répétée</u> $(\ell-k)$ <u>fois</u>, y <u>étant répétée</u> k <u>fois</u>.

En effet, $\hat{A}(x + y) = A(x + y , \dots , x + y)$ .

En développant le deuxième membre, on obtient $2^\ell$ termes, le terme $A(x^{\ell-k} , y^k)$ apparaissant $\binom{\ell}{k}$ fois, vu la symétrie de A .

La formule (2.6) montre, en considérant y fixé, que le translaté d'un polynôme homogène est un polynôme.

(2.7) Identité de polarisation. - Soit $\hat{A}$ un polynôme homogène de degré $\ell \neq 0$.

(a) Alors, pour tout $a \in E$, le polynôme

$$\Delta_a = \frac{1}{2}(\hat{A}(x + a) - \hat{A}(x - a))$$

est un polynôme de degré $\ell - 1$.

(b) Quels que soient $a_1, \dots, a_\ell \in E$, on a

(2.8) $A(a_1,\dots,a_n) = \frac{1}{\ell!} \Delta_{a_1} \cdots \Delta_{a_\ell} \hat{A} = \frac{1}{2^\ell \ell!} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1, j=1\dots\ell} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\ell \hat{A}(\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_\ell a_\ell)$.

(c) L'application chapeau réalise une bijection linéaire entre $\mathcal{L}_s(^\ell E, G)$ et $\mathcal{P}(^\ell E, G)$.

En effet, vu (1.10), il vient

$$\hat{A}(x \pm a_1) = A(x^\ell) \pm \ell A(x^{\ell-1}, a_1) + \binom{\ell}{2} \dots$$

D'où, par soustraction,

$$(\Delta_{a_1} \hat{A})(x) = \ell A(x^{\ell-1}, a_1) + \binom{\ell}{2} \dots$$

D'où, en recommençant,

$$(\Delta_{a_2} \Delta_{a_1} \hat{A})(x) = \ell(\ell - 1) A(x^{\ell-1}, a_2, a_1) + \dots$$

et finalement

$$\Delta_{a_\ell} \dots \Delta_{a_1} \hat{A} = \ell! A(a_\ell, \dots, a_2, a_1).$$

L'application $A \to \hat{A}$ est surjective par définition. L'identité de polarisation (2.8) montre qu'elle est injective.

(2.9) Définition de l'espace $P(^\ell E, G)$ des polynômes continus. - C'est le sous-espace de $\mathcal{P}(^\ell E, G)$ formé par les polynômes définissant des applications continues de $E$ dans $G$. On définit de même $P(^{\leq\ell}E, G)$.

(2.10) PROPOSITION. - Soit $L_s(^\ell E, G)$ le sous-espace de $\mathcal{L}_s(^\ell E, G)$ formé par les applications multilinéaires continues de $E \times \dots \times E$ ($\ell$ fois) dans $G$. Alors l'application chapeau réalise un isomorphisme de l'espace vectoriel

$$L_s(^\ell E, G) \text{ sur } P(^\ell E, G).$$

En effet, soit $Q \in L_s(^\ell E, G)$. Alors $\hat{Q}$ est continu car c'est la composée de l'application diagonale $E \to E \times \dots \times E$ avec $Q$. Réciproquement, soit

$$Q \in \mathcal{L}_s(^\ell E, G)$$

tel que $\hat{Q}$ soit continu. Il s'agit de montrer que $Q$ est continu en tout point $(a_1, \dots, a_\ell) = a$ de $E \times \dots \times E$. Soit $h = (h_1, \dots, h_\ell)$ un accroissement de $a$. Vu l'identité de polarisation, l'accroissement correspondant de $Q$ est

$$\Delta Q = 2^{-\ell}(\ell!)\ \Sigma_{\varepsilon_j}\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\ell [\hat{Q}(\varepsilon_1(a_1 + h_1) + \cdots + \varepsilon_\ell(a_\ell + h_\ell)) - \hat{Q}(\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_\ell a_\ell)] .$$

Le polynôme $\hat{Q}$ étant continu aux $2^\ell$ points $\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_\ell a_\ell$, pour tout voisinage ouvert disqué $V$ de l'origine de $G$, il existe un disque ouvert $U$ de $E$ tel que ( $\lambda$ étant fixé $> 0$ ),

$$k \in U \Longrightarrow \hat{Q}(\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_\ell a_\ell + k) - \hat{Q}(\Sigma a_j \varepsilon_j) \in \lambda V .$$

Si les $h_i$ appartiennent à $\ell^{-1} U$, il vient

$$\Delta Q \in 2^{-\ell}(\ell!)^{-1} \Sigma_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\ell} \lambda V \subset \lambda(\ell!)^{-1} V .$$

Il suffit de prendre $\lambda = \ell!$.

(2.11) DÉFINITION <u>de l'espace</u> $P_{cyl}({}^\ell E, G)$ <u>des polynômes cylindriques continus</u>. – <u>C'est le sous-espace des</u> $\hat{Q} \in P({}^\ell E, G)$ <u>admettant une factorisation</u>

$$E \xrightarrow{s_i} E_i \xrightarrow{R} G ,$$

<u>où</u> $s_i$ <u>est la surjection canonique de</u> $E$ <u>sur son quotient par un sous-espace fermé</u> $V_i$ <u>de codimension finie et</u> $R \in P({}^\ell E_i, G)$.

(2.12) PROPOSITION. – <u>Soit</u> $\hat{Q} \in P({}^\ell E, G)$. <u>Alors</u> $\hat{Q}$ <u>est cylindrique si, et seulement si,</u> $\hat{Q} \in (\odot E'_i) \otimes G$.

En effet, si $\hat{Q}$ est cylindrique, alors $\hat{Q} = R\, s_i$ avec $R \in (\odot E'_i) \otimes G$. Comme la transposée de $s_i$ est l'injection $s'_i : E'_i \hookrightarrow E'$ et que

$$\odot s'_i : \odot E'_i \hookrightarrow \odot E' ,$$

on a $\hat{Q} \in (\odot E') \otimes G$. Réciproquement, si $\hat{Q} \in (\odot E') \otimes G$, il existe un sous-espace $E'_i$ de dimension finie de $E'$ tel que $\hat{Q} \in (\odot E'_i) \otimes G$.

(2.13) <u>Notations</u>. – Notant $L_{s\,cyl}({}^\ell E, G) = (\odot E') \otimes G$, on a le schéma

$$\begin{array}{ccccc} L_{s\,cyl}({}^\ell E, G) & \hookrightarrow & L_s({}^\ell E, G) & \hookrightarrow & \mathcal{L}_s({}^\ell E, G) \\ \| \simeq & & \| \simeq & & \| \simeq \\ P_{cyl}({}^\ell E, G) & \hookrightarrow & P({}^\ell E, G) & \hookrightarrow & \mathcal{P}({}^\ell E, G) \end{array}$$

D'où déjà trois types de polynômes homogènes de degré $\ell$ sur $E$, à valeurs dans $G$, correspondant à trois types de formes multilinéaires symétriques. Ces trois types coincident en dimension finie. On va en fait introduire par la suite beaucoup d'autres types de polynômes.

(2.14) <u>Attention</u>. – Soient $E$ et $G$ normés et $\hat{Q} \in P({}^\ell E, G)$. Il ne faut pas confondre la norme du polynôme $\hat{Q}$ et la norme de la forme multilinéaire associée $Q$ :

$$\|\hat{Q}\| = \sup\{\|Q(x)\| ; \|x\| \le 1\}$$

$$\|Q\| = \sup\{\|Q(x_1, \dots, x_h)\| ; \|x_j\| \le 1\} .$$

D'ailleurs l'identité de polarisation montre que

$$\|\hat{Q}\| \leq \|Q\| \leq \frac{\ell^\ell}{\ell!}\|\hat{Q}\| \text{ .}$$

## 3. Semi-normes $\ell$-tensorielles.

Un espace semi-normé $(E , p)$ est un couple formé par un e. v. $E$ et par une semi-norme $p$ sur $E$. On suppose fixé un nombre entier $\ell \geq 0$.

(3.1) DÉFINITION d'une semi-norme $\ell$-tensorielle. – Une semi-norme $\ell$-tensorielle est la donnée pour toute suite $(E_i , p_i)$ de $\ell$ espaces semi-normés, d'une semi-norme $\alpha(p) = \alpha(p_1 , \dots , p_\ell)$ sur $\bigotimes_i E_i$, de façon que les conditions suivantes soient satisfaites

(i) Si l'on a une autre suite $(F_i , q_i)$ de $\ell$ espaces semi-normés, et pour tout $i$ une application linéaire continue $u_i : E_i \to F_i$ ; alors $u = \bigotimes u_i$ est continue de $(\bigotimes E_i , \alpha(p))$ dans $(\bigotimes_i F_i , \alpha(q))$ et $\|u\| \leq \|u_1\| \cdots \|u_\ell\|$.

(ii) Notant $u$ la norme usuelle $\lambda \to |\lambda|$ sur $\Lambda$, on a $\alpha(u , \dots , u) = |u|$.

(3.2) Propriété d'associativité. – Pour tout $\ell \geq 0$, soit $\alpha_\ell$ une semi-norme $\ell$-tensorielle. On dit que les $\alpha_\ell$ définissent une semi-norme si la propriété d'associativité suivante est vérifiée : quels que soient $\ell$ et $m \geq 0$, quelle que soit la suite $(E_j , p_j)$ d'espaces semi-normés $j = 1 \dots \ell + m$, on a

$$\alpha_{\ell+m}(p_1 , \dots , p_{\ell+m}) = \alpha_2[\alpha_\ell(p_1 , \dots , p_\ell) , \alpha_m(p_{\ell+1} , \dots , p_{\ell+m})] \text{ .}$$

(3.3) PROPOSITION. – Soit $\alpha$ une semi-norme $\ell$-tensorielle, et soit $(E_j , p_j)$ une suite de $\ell$ espaces semi-normés.

(a) Pour tout tenseur décomposable $x = \bigotimes x_j = x_1 \otimes \dots \otimes x_\ell$, on a

$$\|x\|_\alpha = \|x_1\| \times \dots \times \|x_\ell\| \text{ .}$$

(b) Pour tout tenseur $t \in \bigotimes E_j$, on a l'encadrement suivant de $\|t\|_\alpha$

(3.4) $$\|t\|_\varepsilon \leq \|t\|_\alpha \leq \|t\|_\pi$$

où l'on a posé

(3.5) $$\|t\|_\varepsilon = \sup\{|\langle t , x_1' \otimes \dots \otimes x_\ell' \rangle| \ ; \ \|x_1'\| \leq 1 , \dots , \|x_\ell'\| \leq 1\}$$

(3.6) $$\|t\|_\pi = \inf\{\textstyle\sum_{k=1}^N \|x_1^k\| \cdots \|x_\ell^k\| \ ; \text{ avec } t = \sum_{k=1}^N x_1^k \otimes \dots \otimes x_\ell^k\} \text{ .}$$

Démonstration. – Pour tout $i$ $(1 \leq i \leq \ell)$, on considère l'application

$$\lambda_i \to \lambda_i \, x_i$$

de $\Lambda$ dans $E_i$. Par application de (3.1.i), on obtient

(*) $$\|\bigotimes x_j\| \leq \|x_1\| \times \dots \times \|x_\ell\| \text{ .}$$

Pour tout $i$, soit $x_i' \in E_i'$ telle que $\|x_i'\| = 1$ et $\langle x_i' , x_i \rangle = \|x_i\|$. Appliquant l'axiome (3.1.i) à l'application $x_1' \otimes \dots \otimes x_\ell' = \bigotimes_i x_i'$ de $\bigotimes E_i$ dans

$\Lambda$ , on obtient en utilisant (3.1.ii)

$$|\langle \bigotimes x_i' , \bigotimes x_i\rangle| = \|x_1\| \times \dots \times \|x_n\| \leq \|\bigotimes x_i'\| \, \|\bigotimes x_i\|_\alpha$$

avec $\|\bigotimes x_i'\| \leq \|x_1'\| \times \dots \times \|x_n'\| \leq 1$ .

D'où l'inégalité inverse de (*). Prouvons (3.4). L'inégalité de droite résulte de (a). L'inégalité de gauche se prouve en considérant encore l'application linéaire $\bigotimes x_i'$ de $\bigotimes E_i$ dans $\Lambda$ , avec $\|x_i'\| \leq 1$ .

(3.7) <u>Les semi-normes</u> $\varepsilon$ <u>et</u> $\pi$ . — Pour toute suite $(E_j , p_j)$ de $\ell$ espaces semi-normés et pour tout $t \in \bigotimes E_j$ , on définit $\|t\|_\varepsilon$ et $\|t\|_\pi$ . On vérifie qu'on obtient ainsi des semi-normes $\ell$-tensorielles. De toutes les semi-normes $\ell$-tensorielles, $\varepsilon$ est donc la plus petite, et $\pi$ est la plus grande.

(3.8) <u>Les semi-normes 2-tensorielles de S. CHEVET et P. SAPHAR</u>. - Ces semi-normes définies dans [1], [8], dépendent d'un paramètre réel $p \geqslant 1$ . Il serait intéressant de généraliser ces semi-normes pour $\ell > 2$ et $p$ quelconque $\geqslant 1$ .

(3.9) <u>Les normes hilbertiennes sur les produits tensoriels d'espaces de Hilbert</u> (voir dans le séminaire de 1974/75, l'exposé 7).

(3.10) <u>Propriétés des semi-normes $\ell$-tensorielles</u>. - Soit $(E_i , p_i)_i$ une suite de $\ell$ espaces semi-normés $(1 \leq i \leq \ell)$ , et soit $\alpha$ une semi-norme $\ell$-tensorielle.

(a) <u>Si les</u> $p_i$ <u>sont des normes, alors</u> $\alpha(p_1 , \dots , p_\ell)$ <u>est une norme sur</u> $\bigotimes E_i$. En effet, soit $t \in \bigotimes E_i$ tel que $|t|_\alpha = 0$ . Vu (3.4), il vient $|t|_\varepsilon = 0$ . Donc $\langle t , \theta\rangle = 0$ , pour tout $\theta \in \bigotimes E_i'$ . Vu (1.3), il vient $t = 0$ .

(b) <u>L'application</u> $\alpha : p_1 \times \dots \times p_\ell \to \alpha(p_1 , \dots , p_\ell)$ <u>est positivement homogène par rapport à chaque</u> $p_i$ . Soit $I_i$ l'identité de $E_i$ . Soit

$$\alpha = \alpha(p_1 , \dots , p_\ell) \quad \text{et} \quad \alpha' = \alpha(\lambda p_1 , p_2 , \dots , p_\ell) .$$

Alors $T = \lambda I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_\ell$ est continue de $(\bigotimes E_i , \alpha)$ dans $(\bigotimes E_i , \alpha')$, et de norme au plus égale à $\lambda . 1 \dots = \lambda$ . D'où $\alpha' t \leq \lambda(\alpha t)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout tenseur $t$ . L'inégalité inverse s'obtient en remplaçant $\lambda$ par $\lambda^{-1}$ et $p_1$ par $\lambda p_1$ . D'où

$$\forall \lambda > 0 , \quad \alpha(\lambda p_1 , p_2 , \dots , p_\ell) = \lambda\alpha(p_1 , \dots , p_\ell) .$$

(c) <u>L'application</u> $\alpha$ <u>est croissante</u> :

$$p_1 \leq p_1' \Longrightarrow \alpha(p_1 , p_2 , \dots , p_\ell) \leq \alpha(p_1' , \dots , p_\ell) .$$

Ceci se démontre par un raisonnement analogue.

Donnons une interprétation géométrique des semi-normes $\pi$ .

(3.11) PROPOSITION. - <u>Pour</u> $i = 1 \dots n$ , <u>soit</u> $U_i$ <u>un disque absorbant de l'e. v.</u> $E_i$ , <u>et soit</u> $j_i$ <u>la jauge de</u> $U_i$ . <u>Alors</u> $\pi(j_1 , \dots , j_n)$ <u>est la jauge du disque absorbant</u> $\Gamma(\bigotimes U_i)$ .

Pour simplifier l'écriture de la preuve, on suppose $n = 2$, et on pose $E_1 = E$, $E_2 = F$, $U_1 = U$, $U_2 = V$. Il est clair que $\Gamma(U \otimes V)$ est un disque absorbant de $E \otimes F$. Soit

$$A = \{t \in E \otimes F \ ; \ |t|_\pi < 1\} \qquad B = \{t \ ; \ |t|_\pi \leq 1\} .$$

Il s'agit de montrer que $A \subset \Gamma(U \otimes V) \subset B$. Si l'on suppose d'abord

$$t \in \Gamma(U \otimes V) ,$$

alors

$$t = \sum \lambda_i \, x_i \otimes y_i \quad \text{avec} \quad \sum |\lambda_i| \leq 1 , \quad |x_i| \leq 1 , \quad |y_i| \leq 1 .$$

Alors

$$|t|_\pi \leq \sum |\lambda_i| \, |x_i \otimes y_i|_\pi \leq \sum |\lambda_i| \, |x_i| \, |y_i| \leq 1 .$$

Donc $t \in B$. Réciproquement, soit $t \in A$. Donc

$$t = \sum x_i \otimes y_i , \qquad \sum (x_i) \, (y_i) < 1 .$$

On fait une partition de $I$ en quatre parties :

$I_1 = \{i \ ; \ |x_i| \, |y_i| \neq 0\}$

$I_2 = \{i \ ; \ |x_i| = 0 \ ; \ |y_i| \neq 0\}$

$I_3 = \{i \ ; \ |x_i| \neq 0 \ ; \ |y_i| = 0\}$

$I_4 = \{i \ ; \ |x_i| = |y_i| = 0\}$.

Alors

$$t = \sum_{i \in I_1} [(|x_i| + \varepsilon)(|y_i| + \varepsilon)] \frac{x_i}{|x_i| + \varepsilon} \otimes \frac{y_i}{|y_i| + \varepsilon}$$

$$+ \sum_{i \in I_2} [\varepsilon(|y_i| + \varepsilon)] \frac{x_i}{\varepsilon} \otimes \frac{y_i}{|y_i| + \varepsilon} + \sum_{i \in I_3} [(|x_i| + \varepsilon)\varepsilon] \frac{x_i}{|x_i| + \varepsilon} \otimes \frac{y_i}{\varepsilon} + \sum_{i \in I_4} [\varepsilon^2] \frac{x_i}{\varepsilon} \otimes \frac{y_i}{\varepsilon} .$$

Or tous les tenseurs décomposables, apparaissant au 2e membre, appartiennent à $U \otimes V$ ; et la somme des coefficients de pondération (écrits entre crochets) est $< 1$ pour $\varepsilon$ suffisamment petit. Par conséquent, $t \in \Gamma(U \otimes V)$.

(3.12) PROPRIÉTÉ <u>de la norme</u> $\pi$ <u>dans le cas où</u> $E$ <u>et</u> $F$ <u>sont des espaces normés</u>. - <u>Soit</u> $G$ <u>un e. v. n. quelconque</u>, <u>soit</u> $b$ <u>une application bilinéaire</u> $E \times F \to G$, <u>et soit</u> $\tilde{b}$ <u>l'application linéaire associée</u> : $E \otimes F \to G$. <u>Alors</u> $\tilde{b}$ <u>est continue si, et seulement si,</u> $b$ <u>est continue et l'application</u> $b \to \tilde{b}$ <u>est une isométrie de</u> $B(E, F ; G)$ <u>sur</u> $L(E \otimes_\pi F, G)$.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"] & G \\ E \otimes F \arrow[ur, "\tilde{b}"] & \end{tikzcd}$$

En effet,

$$\|b\| = \sup\{\|b(x , y)\| \ , \ \|x\| \text{ et } \|y\| \leq 1\} = \sup\{\|\tilde{b}(x \otimes y)\| \ ; \ \|x\| \text{ et } \|y\| \leq 1\}$$
$$= \sup\{\|\tilde{b}(t)\| \ , \ t \in E \otimes F \ , \ \|x\| \text{ et } \|y\| \leq 1\} = \|\tilde{b}\| \ .$$

Ceci s'applique d'ailleurs à l'application bilinéaire canonique $\beta$ de $E \times F$ dans $E \otimes F$ et à $G = E \otimes F$. Donc $\|\beta\| = 1$.

## 4. Topologies et bornologies.

On rappelle que la notion de disque dans un e. v. donne lieu à deux notions duales, la notion d'e. l. c. s. et la notion d'e. b. c. s. ou d'espace bornologique convexe séparé.

(4.1) En ce qui concerne les e. l. c. s., une famille fondamentale $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur l'e. l. c. s. $E$ désigne toute famille de semi-normes sur $E$ telles que les semi-boules $B_i(0 , r_j) = \{x , r_i(x) < r_j\}$ centrées en l'origine de $E$, avec $i \in I$, et $r_j > 0$, forment un système fondamental de voisinages disqués de l'origine. Ce système est alors invariant par homothétie.

Noter que cette définition n'est pas celle de [3]. Une famille de semi-normes est fondamentale (pour une certaine topologie) si, et seulement si, elle est filtrante croissante et si, pour tout $x \neq 0$ dans $E$, il existe $i$ tel que $p_i(x) \neq 0$.

Si $(p_i)_{i\in I}$ et $(p_j)_{j\in J}$ définissent la même topologie localement convexe sur $E$, ces deux familles sont équivalentes :

- pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ et $k > 0$, $p_i < kp_j$,
- et symétriquement.

(4.2) Le système projectif des espaces normés $E_i = E/p_i^{-1}(0)$. - Soit $(p_i)$ une famille fondamentale de l'e. l. c. s. $E$. Par passage au quotient par $p_i^{-1}(0)$, $p_i$ définit une norme sur $E/p_i^{-1}(0)$. L'e. v. n. obtenu est noté $E_i$, et l'on a des surjections continues $E \twoheadrightarrow E_i$. On écrit $p_i \ll p_j$ s'il existe $k$ tel que $p_i \leq kp_j$. Alors $p_i^{-1}(0) \supset p_j^{-1}(0)$ ; d'où une surjection $E_j \twoheadrightarrow E_i$. Comme $\gg$ est filtrant croissant, on obtient un système projectif d'e. v. n. $(E_i)_i$. De plus, l'e. l. c. s. $E$ apparait comme la limite projective des e. v. n. $E_i$. Un borné d'un e. l. c. s. $E$ est toute partie qui est absorbée par tout voisinage de l'origine.

Dans la théorie des bornologies vectorielles [4] [5], qui est évoquée ci-après, le mot "borné" est employé dans un sens différent.

(4.3) Définition d'une base de disques bornés. - Soit $E$ un e. v. . Une base de disques bornés sur $E$ est, par définition, une famille $D = (d_\alpha)_{\alpha\in I}$ de disques $d_\alpha$ de $E$, la famille $D$ ayant les propriétés suivantes :

(i) $\forall \alpha$ et $\beta \in I$, $\exists \gamma \in I$, $d_\gamma \supset d_\alpha \cup d_\beta$,

(ii) Aucune droite de $E$ n'est contenue dans un $d_\alpha$,

(iii) $D$ est invariant par homothétie,

(iv) Si $E[d_\alpha]$ désigne le sous-espace de $E$ engendré par $d_\alpha$, on a

$$E = \bigcup_\alpha E[d_\alpha] .$$

Par la suite, $E[d_\alpha]$ est normé par la jauge de $d_\alpha$.

(4.4) LEMME. - <u>Si</u> $B$ <u>est un disque complet de l'e. l. c. s.</u> $E$, <u>alors</u> $E[B]$ <u>est complet</u>.

En effet, soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy de $E[B]$. Il existe un entier $k > 0$ tel que $(u_n)_n \subset kB$. Donc le filtre de base $(u_n)_n$ converge pour la topologie $t$ de $E$ vers un point $x_0 \in kB$. Il reste à montrer que $(u_n)_n$ converge vers $x_0$ pour la topologie $t_B$ de l'espace normé $E[B]$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $u_p - u_q \in \varepsilon B$ pour $p$ et $q \geq N$. Donc $x_p \in x_N + \varepsilon B$ pour tout $p \geq N$. Comme $x_N + \varepsilon B$ est fermé pour $t$, on a $x_0 \in x_N + \varepsilon B$. Donc $x_p \in x_N + \varepsilon B \in x_0 + 2\varepsilon B$ pour $p \geq N$.

(4.5) <u>Structure d'espace bornologique convexe séparé</u> (e. b. c. s.). - <u>L'e. v.</u> $E$ <u>est muni d'une base de disques bornés. Une partie de</u> $E$ <u>est dite bornée si elle est contenue dans un</u> $d_\alpha$. <u>Deux bases de disques bornés sur</u> $E$ <u>sont dites équivalentes si elles définissent la même famille de bornés</u> ; <u>on dit</u> "<u>la même bornologie</u>", <u>ou bien</u> "<u>la même structure d'e. b. c. s. sur</u> $E$ ". <u>Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que tout élément de chacune des bases soit contenu dans un élément de l'autre base</u>.

<u>L'e. b. c. s. E est dit cocomplet</u> s'il existe une base $(d_\alpha)$ de disques bornés telle que les e. v. n. $E[d_\alpha]$ soient tous complets. On peut expliciter les propriétés de la famille des bornés d'un e. b. c. s., et obtenir ainsi le point de départ d'une théorie indépendante des e. b. c. s. . Le point de départ choisi ici est moins intrinsèque, mais il est plus commode pour les applications à la théorie des e. l. c. s. .

<u>La catégorie des e. b. c. s.</u> a pour objets les e. b. c. s. . Ses morphismes sont les applications linéaires $\ell : G_1 \to G_2$ qui sont bornées, c'est-à-dire qui transforment tout borné de $G_1$ en un borné de $G_2$. Le codual $G^\times$ de l'e. b. c. s. $G$ est l'espace des formes linéaires bornées sur $G$ ; $G^\times$ a une structure naturelle d'e. l. c. s. puisqu'il peut être muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $G$.

L'e. b. c. s. $G$ est dit coréflexif s'il est en dualité séparante avec $G^\times$ et s'il coincide avec le dual de l'e. l. c. s. $G^\times$, ce dual étant muni de la bornologie équicontinue, c'est-à-dire de la famille des parties équicontinues du dual de $G^\times$.

(4.6) <u>L'e. l. c. s.</u> $\underset{\sim}{T}G$. - Soit $G$ un e. b. c. s. . L'e. l. c. s. $\underset{\sim}{T}G$ est l'e. l. c. s. obtenu en munissant l'e. v. $G$ de la topologie localement convexe limite inductive des topologies des e. v. n. $G[D_i]$ . Un système fondamental des voisinages de l'origine est formé par les disques bornivores. Un tel disque coupe donc chaque $G(D_i)$ selon un voisinage de l'origine. Par la suite $G$ est systématiquement muni de cette topologie localement convexe.

(4.7) Le système inductif des $E[B]$ ; les e. l. c. s. bornologiques. - Soit $E$ un e. l. c. s. . Munissant $E$ de la famille de ses parties bornées, on obtient un e. b. c. s. noté $BE$ . Pour tout disque borné $B$ , on a une injection continue du sous-espace $E[B]$ muni de la jauge de $B$ dans $E$ . Si $B'$ est un autre disque borné tel qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $B \subset \lambda B'$ , on a une injection continue

$$E[B] \to E[B'] .$$

D'où un système inductif d'e. v. n. ; et la topologie $t$ de $E$ est moins fine que la topologie $\varinjlim$ des topologies de $E$ . D'où une situation duale de (4.2), mais ici $t \neq \varinjlim$ en général. L'e. l. c. s. $E$ est dit bornologique si $t = \varinjlim$ .

Soit $\lambda$ une application linéaire définie sur un e. l. c. s. $E$ , à valeurs dans un e. l. c. s. $G$ . Vu la propriété universelle des topologies localement convexes limites inductives, si $E$ est bornologique, $\lambda$ est continue si, et seulement si, elle est bornée, ou si sa restriction à chaque $E_B$ est continue, ce qui est techniquement assez facile à vérifier en général. C'est ce qui fait l'intérêt pratique de la notion d'e. l. c. s. bornologique.

(4.8) Exemple. - Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . L'e. l. c. s. $\mathcal{D}(\Omega)$ est défini usuellement comme limite inductive stricte des $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . Un borné de $\mathcal{D}(\Omega)$ est forcément contenu dans un $\mathcal{D}_K(\Omega)$ et y est borné. Par conséquent, $\mathcal{D}(\Omega)$ est bornologique.

La structure de l'e. l. c. s. $\mathcal{D}(\Omega)$ est un petit peu compliquée : c'est une limite inductive stricte. Par ailleurs, si l'e. v. $\mathcal{D}(\Omega)$ est muni de sa bornologie naturelle, la structure d'e. b. c. s. ainsi obtenue est extrêmement simple à décrire et suffit pour définir $\mathcal{D}'(\Omega)$ : c'est le codual de l'e. b. c. s. $\mathcal{D}(\Omega)$ . D'où une possibilité de donner une formulation bornologique de la théorie des distributions, cette nouvelle formulation étant un peu plus simple que la formulation usuelle.

(4.9) Topologie ultraforte sur un dual. - Soit $E$ un e. l. c. s. . Soit $E'$ son dual. Les parties équicontinues de $E'$ forment une bornologie appelée bornologie équicontinue. Cette bornologie admet pour base la famille des polaires absolus $V^0$ d'un système fondamental $\mathcal{V}$ de voisinages ouverts disqués de l'origine de $E$ . Notons que les $V^0$ sont faiblement fermés, donc faiblement complets. Vu le lemme (4.4), $E'[V^0]$ est un Banach pour tout $V \in \mathcal{V}$ . En transposant les surjections continues $E \to E(V)$ , on obtient vu (1.32) des injections continues des Banach $E'[V^0]$ dans $E'$ fort. Donc la topologie forte de $E'$ est moins fine que la topologie localement convexe, limite inductive des $E'[V^0]$. Cette topologie $\Xi$ est appelée est appelée la topologie ultraforte sur $E'$ .

(4.10). - Soit $V$ un voisinage de l'origine disqué de l'e. l. c. s. $E$ . Alors le dual de l'e. v. n. $E(V) = E/j_V^{-1}(0)$ s'identifie isométriquement au sous-espace $E'[V^0]$ de $E'$ engendré par le polaire de $V$ , muni de la jauge de $V^0$ .

En effet, si $j_V$ est la jauge de $V$ , en transposant la surjection canonique $E \to E(V)$ , il vient une injection canonique $E(V)' \hookrightarrow E'$ , et alors

$$E(V)' = \{\ell \in E' \ ; \ \|\ell\| = \sup \{ |\ell(x)| \ ; \ x \in V\} < \infty\} .$$

(4.11) PROPOSITION. - Soit $E$ un e. l. c. s. tel que $E$ coincide avec le codual de $E'$ , muni de la bornologie équicontinue. Alors les topologies forte $\theta$ et ultraforte $\Xi$ sur $E'$ coincident.

Démonstration. - Par hypothèse, on a $E = (E')^{\times} = (E' , \Xi)'$ . Par conséquent, $E$ est semi-réflexif. De plus, comme $\Xi$ est compatible avec la dualité de $E'$ avec $E$ , $\Xi$ est moins fine que la topologie de Mackey $\tau(E' , E) = \tau$ . Mais $\tau = \theta$ car $E$ est semi-réflexif. Comme $\Xi > \theta$ , on a finalement $\Xi = \theta$ .

(4.12) PROPOSITION. - Soit $E$ un e. l. c. s. complet qui est infra-Schwartz, c'est-à-dire tel que toute application linéaire continue de $E$ dans un Banach soit faiblement compacte. Il résulte de [5] page 117 que $E = (E')^{\times}$ . Il résulte alors de (4.11) que les topologies fortes et ultrafortes coincident sur $E'$.

(4.13) Produits tensoriels d'e. l. c. s. ou d'e. b. c. s. .

(a) Usuellement, on définit seulement les produits tensoriels topologiques de plusieurs e. l. c. s. . Par exemple, soient deux e. l. c. s. $E$ et $F$ dont les topologies sont définies respectivement par des familles fondamentales de semi-normes $(p_j)_{j\in J}$ et $(q_k)_{k\in K}$ . Alors sur $E \otimes F$ , la famille des semi-normes

$$\pi(p_j , q_k)$$

est fondamentale, et elle est remplacée par une famille équivalente lorsque les familles $(p_j)_j$ et $(q_k)_k$ sont remplacées par des familles équivalentes : ceci résulte de (3.11). La topologie localement convexe séparée, ainsi définie sur $E \otimes F$ , est notée $\pi$ . Le complété de l'e. l. c. s. $E \otimes_{\pi} F$ est noté $E \hat{\otimes} F$ . La topologie $\varepsilon$ est définie de même ; le complété de $E \otimes_{\varepsilon} F$ est noté $E \hat{\hat{\otimes}} F$ .

(b) On peut symétriquement définir des produits tensoriels bornologiques de plusieurs e.b.c.s. [4]. Par exemple, soient $E$ et $F$ deux e. b. c. s., et soient $(B_j)_{j\in J}$ et $(C_k)_{k\in K}$ deux cobases disqués des bornologies de $E$ et de $F$ . Pour tout couple $(j , k)$ , on a des injections canoniques

$$E_j \otimes F_k \subset E \otimes F \quad \text{avec} \quad E_j = E[B_j] \quad \text{et} \quad F_k = F[C_k] .$$

D'où une structure d'e. b. c. s. sur $E \otimes F$ si l'on introduit la bornologie "limite inductive" des $E_j \otimes_{\pi} F_k$ . Une autre structure d'e. b. c. s. sur $E \otimes F$

est obtenue en remplaçant $\pi$ par $\varepsilon$ .

(4.14) PROPOSITION. - Soient quatre e. l. c. s. et deux applications linéaires continues $\ell : E \to F$ et $m : G \to H$ . Il résulte de (1.19.i) que $\ell \otimes m$ est continue de $E \otimes_\pi G$ (resp. $E \otimes_\varepsilon G$) dans $F \otimes_\pi H$ (resp. $F \otimes_\varepsilon H$) .

## 5. Etude de la topologie $\pi$ sur un produit tensoriel d'e. l. c. s.

(5.1) PROPOSITION. - Soient $n$ e. l. c. s. $E_i$ , $1 \leq i \leq n$ . La topologie $\pi$ sur $\bigotimes E_i$ a la propriété universelle suivante : pour tout e. l. c. s. $G$ , l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{L}(E_1, \ldots, E_n ; G)$ sur $\mathfrak{L}(\bigotimes E_i , G)$ applique bijectivement $L(E_1, \ldots, E_n ; G)$ sur $L(\bigotimes_\pi E_i , G)$ . De plus, cette bijection applique les parties équicontinues de $L(E_1, \ldots, E_n ; G)$ sur celles de $L(\bigotimes_\pi E_i , G)$ .

En effet, soit $H$ une partie équicontinue de $L(E_1, \ldots, E_n ; G)$ . Pour tout voisinage disqué $W$ de l'origine dans $G$ , il existe pour tout $i$ , un voisinage disqué $U_i$ de l'origine de $E_i$ tel que $h(U_1, \ldots, U_n) \subset W$ pour tout $h \in H$ .

$$(*) \qquad \tilde{h}(\Gamma(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n)) \subset W \text{ pour tout } \tilde{h} \in \tilde{H} .$$

Réciproquement, soit $\tilde{H}$ une partie équicontinue de $L(\bigotimes_\pi E_i , G)$ . Pour tout voisinage disqué $W$ de l'origine dans $G$ , il existe un voisinage de l'origine de $\bigotimes_\pi E_i$ , que l'on peut supposer du type $\Gamma(\bigotimes U_i)$ tel que (*). A fortiori,

$$\tilde{h}(\bigotimes U_i) \subset W ,$$

pour tout $\tilde{h}$ de $\tilde{H}$ . Donc $h(U_1 \times \cdots \times U_n) \subset W$ pour tout $h \in H$ .

(5.2) COROLLAIRE.

(a) Il existe une seule topologie localement convexe sur $\bigotimes E_i$ ayant la propriété universelle indiquée : c'est la topologie $\pi$ .

(b) La topologie $\pi$ est la topologie localement convexe la plus fine sur $\bigotimes E_i$, rendant continue l'application multilinéaire canonique $\pi E_i \to \bigotimes E_i$ .

(a) En effet, soit $t$ une topologie localement convexe sur $\bigotimes E_i$ ayant la propriété universelle. Comme l'application identique de $\bigotimes_t E_i$ est continue, l'application multilinéaire canonique $\beta_1$ de $\pi E_i$ dans $\bigotimes_t E_i$ est continue :

$$\begin{tikzcd} \pi E_i \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ \bigotimes_\pi E_i \arrow[r, "J"] & \bigotimes_t E_i \end{tikzcd}$$

De même, $\pi$ ayant la propriété universelle, $\beta$ est continue. Appliquant la propriété universelle à $G = \bigotimes_t E_i$ , l'application identique $J$ est continue, ce qui signifie que $\pi$ est plus fine que $t$ . Permutant les rôles de $t$ et $\pi$ dans le raisonnement, il apparait que $t$ est plus fine que $\pi$ et $t = \pi$ .

(b) résulte aussi de la propriété universelle. En effet, soit $t'$ localement convexe séparée sur $\bigotimes E_i$ telle que $\pi E_i \to \bigotimes_{t'} E_i$ soit continue. Alors

$$\bigotimes_\pi E_i \to \bigotimes_{t'} E_i$$

est continue, et $t' \subset \pi$. Comme $\pi E_i \to \bigotimes_\pi E_i$ est continue, $\pi$ est bien la topologie localement convexe la plus fine rendant continue $\pi E_i \to \bigotimes E_i$.

Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. De préférence à $E \otimes F$, on considère son complété pour la norme $\pi$, noté $E \hat{\otimes}_\pi F$ ou $E \hat{\otimes} F$. Ce complété admet une description simple.

(5.3) PROPOSITION.

(a) Tout élément $u$ de $E \hat{\otimes} F$ s'écrit sous forme d'une série normalement convergente

$$u = \sum \lambda_i e_i \otimes f_i$$

avec $\lim e_i = 0$, $\lim f_i = 0$, $\sum |\lambda_i| < \infty$.

(b) Réciproquement, toute série du genre

$$u = \sum \lambda_i e_i \otimes f_i$$

avec $\sup |e_i| < \infty$, $\sup |f_i| < \infty$, $\sum |\lambda_i| < \infty$ converge normalement dans $E \hat{\otimes} F$.

Démonstration.

(a) Si $u \in E \hat{\otimes} F$, alors pour tout $n$, il existe $u_n$ dans $E \otimes F$ tel que

$$\|u - u_n\|_\pi \leq \frac{1}{n^2} 2^{-n-1}.$$

D'où

$$\|u_n - u_{n+1}\|_\pi \leq \frac{1}{n^2} 2^{-n-1} + \frac{1}{(n+1)^2} 2^{-n-2} < \frac{1}{n^2} 2^{-n}.$$

D'après la formule explicitant la norme $\pi$, on peut écrire

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{m=1}^{r(n)} \lambda_{nm} x_{nm} \otimes y_{nm}$$

$$\|x_{nm}\| < \frac{1}{n} ; \quad \|y_{nm}\| < \frac{1}{n} ; \quad \sum_{m=1}^{r(n)} |\lambda_{nm}| < \frac{1}{2n}.$$

Posons

$$u_1 = \sum_{m=1}^{r(0)} \lambda_{0m} x_{0m} \otimes y_{0m}.$$

Alors

$$u = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} - u_n = \sum_{n=0\ldots\infty, m=1\ldots r(n)} \lambda_{nm} x_{nm} \otimes y_{nm}.$$

La suite des sommes partielles de cette série est une suite de Cauchy qui converge normalement et dont une sous-suite converge vers $u$. Donc cette série est normalement convergente, et sa somme est $u$. Réciproquement, la série donnée est normalement convergente dans $E \hat{\otimes}_\pi F$.

(5.4) THÉORÈME. - Soit $(\Omega, \tau, \mu)$ un espace mesuré, $\mu \geq 0$. Si $E$ est un espace de Banach, on a $L^1_\mu(\Omega , E)$ isométrique à $L^1_\mu(\Omega) \hat{\otimes} E$.

Soit $S(\Omega)$ l'espace des combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices de parties mesurables de $\Omega$. Soit $S(\Omega , E)$ l'espace des combinaisons linéaires finies $\psi$ à coefficients dans $E$ de fonctions indicatrices de parties mesurables de $\Omega$, ces parties étant de mesure finie,

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\mu} 1_{B_i}(x) \; ; \quad B_i \in \tau .$$

On a

$$S(\Omega , E) \simeq S(\Omega) \otimes E .$$

On sait que $L^1_\mu(\Omega , E)$ peut être défini comme le complété de $S(\Omega , E)$ pour la norme $L^1$ c'est-à-dire

$$\|\psi\| = \int_\Omega \|\sum e_i \, 1_{B_i}(x)\| \, d\mu(x) .$$

Il suffit donc de montrer que cette norme coincide avec la norme $\pi$. Or si $\psi$ admet l'expression (*), on a

$$\|\psi\|_{L^1} = \int \|\sum e_i \, 1_{B_i}\| \, d\mu \leq \sum \|e_i\| \, \mu(B_i) .$$

D'où $\|\psi\|_{L^1} \leq \inf\{\sum \|e_i\| \, \mu(B_i) \; ;$ pour toutes les écritures $(*)\}$, soit

$$\|\psi\|_{L^1} \leq \|\psi\|_\pi .$$

En fait, on a l'égalité, car toute $\psi \in S(\Omega , E)$ admet une écriture (*), où les $B_i$ sont disjoints et par conséquent, pour une telle écriture de $\psi$,

$$\|\psi\|_{L^1} = \int \|\sum e_i \, 1_{B_i}(x)\| \, d\mu(x) = \sum \|e_i\| \, \mu(B_i) .$$

(5.5) Remarque. - Soit $1 \leq p < \infty$. On peut définir sur le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux e. v. n. quelconques une norme $\pi_p$ telle que, pour tout espace mesuré $(\Omega , \tau , \mu)$ et tout espace de Banach $E$, la classe de Lebesgue $L^p(\Omega , E)$ soit isométrique au complété de $L^p(\Omega) \otimes E$ pour la norme $\pi_p$ (voir [1]).

## 6. Produits tensoriels injectifs d'e. l. c. s.

Soient $n$ e. l. c. s. $E_j$, $1 \leq j \leq n$, sur le corps $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les espaces duals munis des topologies faibles sont notés $E'_{j,s}$. Soit $M_\varepsilon$ l'espace des formes multilinéaires séparément continues sur $E'_{1,s} \times \dots \times E'_{n,s}$, cet espace étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de $E'_1 , \dots , E'_n$. Comme les espaces $\bigotimes E_j$ et $\bigotimes E'_j$ sont en dualité, le produit tensoriel $T = \bigotimes E_j$ est contenu dans $M_\varepsilon$.

$$\forall \, t \in T , \; \forall \, \xi_j \in E'_j , \quad t(\xi_1 , \dots , \xi_n) = \langle t , \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \rangle .$$

La topologie $\varepsilon$ sur $\bigotimes_j E_j$ est définie par la famille fondamentale des semi-normes

$$t \to \sup\{ |\langle \bigotimes \xi_j , t \rangle| \; ; \; \xi_j \in U_j^0 , \; 1 \leq j \leq n\} ,$$

$U_j$ décrivant un système fondamental $\mathcal{U}_j$ de voisinages ouverts disqués de $E_j$. Comme les $U_j^0$ forment $(U_j \in \mathcal{U}_j)$ une base de la bornologie équicontinue de $E_j'$, on a la proposition suivante.

(6.1) PROPOSITION. - La topologie $\varepsilon$ sur le produit tensoriel $\bigotimes E_j$ des e. l. c. s. $E_j$ est induite par la topologie de $M_\varepsilon$.

(6.2) Cas des espaces normés. - Chaque $E_i$ est supposé normé. Sa boule unité est notée $\beta_i$ ; la boule unité de $E_i'$ est notée $\beta_i^0$. Comme les multiples de $\beta_i^0$ forment une base de la bornologie équicontinue, la topologie $\varepsilon$ est induite par la norme (usuelle) des applications multilinéaires, sur $M_\varepsilon$

$$\|m\| = \sup\{|m(x_1, \ldots, x_n)|, \|x_j\| \leq 1 ; 1 \leq j \leq n\}.$$

D'où les applications isométriques

$$\bigotimes_\varepsilon E_i \subset M_\varepsilon \sim (\bigotimes_\pi X_i')' \sim (\hat{\bigotimes} X_i')'.$$

(6.3) EXEMPLE. - Soit $E$ un espace de Banach et soit $K$ un espace compact. Soit $C(K, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $K \to E$, et $C(K) = C(K, \Lambda)$.

(a) $C(K) \otimes E$ est donc dans $C(K, E)$,

(b) $C(K) \hat{\otimes} E$ est isométrique à $C(K, E)$.

(a) est classique. Pour prouver (b), il suffit de montrer que, pour tout

$$t = \sum \varphi_i \otimes e_i \in C(K) \otimes E,$$

la norme $\varepsilon$ est égale à la norme induite par $C(K, E)$. Or

$$\begin{aligned}
\|\sum \varphi_i \otimes e_i\|_\varepsilon &= \sup\{|\langle t, m \otimes \xi\rangle| ; \|m\| \text{ et } \|\xi\| \leq 1 ; \xi \in E' ; m \in M(K)\} \\
&= \sup_{\|\xi\| \leq 1} \sup_{\|m\| \leq 1} |\langle \sum \varphi_i \langle e_i, \xi\rangle, m\rangle| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\textstyle\sum_{i=1}^m \varphi_i \langle e_i, \xi\rangle\|_{C(K)} \\
&= \sup\{|\sum \varphi_i(s) \langle e_i, \xi\rangle|, s \in K, \|\xi\| \leq 1\} \\
&= \sup_{s \in K} \sup_{\|\xi\| \leq 1} |\langle \sum \varphi_i(s) e_i, \xi\rangle| = \sup_s \|\sum \varphi_i(s) e_i\|_E = \|\sum \varphi_i \otimes e_i\|_{C(K)}.
\end{aligned}$$

Notons que ces énoncés (6.3, a et b) et ces démonstrations se prolongent naturellement au cas où $E$ est un e. l. c. s. complet.

## 7. Utilisation de la propriété d'approximation métrique.

(7.1) DÉFINITION. - Un espace de Banach $E$ vérifie la propriété d'approximation métrique (p. a. m.) si, pour tout compact $K$ de $E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in E' \otimes E$ tel que

$$\|u\| \leq 1 \text{ et } \sup_{x \in K} \|u(x) - x\| < \varepsilon.$$

En d'autres termes, l'application identique de $E$ est dans l'adhérence des opérateurs de rang fini, de norme au plus $1$, pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $E$.

(7.2) PROPOSITION. - Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. Si $E$ vérifie la p. a. m., alors

$$F' \hat{\hat{\otimes}} E = K(F, E)$$

où $K(F, E)$ est l'espace des opérateurs compacts de $F$ dans $E$.

Démonstration. - On sait que la norme $\varepsilon$ sur $F' \otimes E$ est induite par $\mathcal{L}(F, E)$; d'autre part, $K(F, E)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(F, E)$. Par conséquent, des injections

$$F' \otimes E \hookrightarrow K(F, E) \hookrightarrow \mathcal{L}(F, E)$$

il résulte qu'on a toujours une injection isométrique :

$$F' \hat{\hat{\otimes}} E \hookrightarrow K(F, E).$$

Il suffit de montrer que si $E$ vérifie la p. a. m., alors $F' \otimes E$ est dense dans $K(F, E)$. Soit donc $f \in K(F, E)$ et $\varepsilon > 0$. Soit $B$ la boule unité de $F$. Comme $f(B)$ est relativement compact, il existe $u \in E' \otimes E$ tel que

$$\sup_{x \in f(B)} \|u(x) - x\| < \varepsilon .$$

Comme l'application $u \circ f$ est de rang fini, elle appartient à $F' \otimes E$. De plus,

$$\sup_{y \in B} \|u \circ f(y) - f(y)\| < \varepsilon .$$

Si $E$ et $F$ sont des espaces de Banach, $E \otimes_\varepsilon F$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $L(F', E)$. Etudions la propriété analogue dans le cas de deux e. l. c. s. $E$ et $F$. Les espaces duaux, munis de la topologie faible, sont notés $E'_\sigma$ et $F'_\sigma$. Le dual de $E$ muni de la topologie de Mackey est noté $E'_\tau$. L'espace des formes bilinéaires sur $E'_\sigma \times F'_\sigma$, qui sont séparément continues, est noté $BS(E'_\sigma, F'_\sigma)$.

(7.3) PROPOSITION. - On a des isomorphismes algébriques

$$BS(E'_\sigma, F'_\sigma) \sim L(F'_\tau, E) \sim L(E'_\tau, F) .$$

Vu la symétrie, il suffit de montrer le premier isomorphisme. Or, on a un isomorphisme algébrique

$$(*) \qquad \begin{gathered} BS(E'_\sigma, F'_\sigma) \to L(F'_\sigma, E_\sigma) \\ b \to [f' \xrightarrow{\ell} [e' \to b(e', f')]] . \end{gathered}$$

Il suffit donc de montrer

$$L(F'_\sigma, E_\sigma) = L(F'_\tau, E) .$$

Soit $\ell \in L(F'_\sigma, E_\sigma)$. Comme la transposée ${}^t\ell$ de $\ell$ transforme tout disque faiblement compact de $E'_\sigma$ en un disque faiblement compact de $F_\sigma$, $\ell$ est continue de $F'_\tau$ dans $F_\tau$ ; donc a fortiori de $F'_\tau$ dans $E$.

Réciproquement, soit $\lambda \in L(F'_\tau , E)$ . La transposée ${}^t\lambda$ applique $E'$ dans

$$(F'_\tau)' = F .$$

Par conséquent, $\lambda$ est faiblement continue.

(7.4) <u>Introduction de topologies de la convergence uniforme</u>. - Soit $L_\varepsilon(F'_\tau , E)$ l'e. l. c. s. obtenu en munissant $L(F'_\tau , E)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $F'$ . Soit $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ des bases de voisinages de l'origine de $E$ et $F$ respectivement formées par des disques fermés $U$ et $V$ . Alors la topologie de $L_\varepsilon(F'_\tau , E)$ est définie par la famille des semi-normes

$$\ell \to p_{U,V}(\ell) = \sup\{j_U(\ell f') , \ f' \in V^0\}$$

où $(U , V)$ décrit $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ . Comme $U = U^{00}$ , il vient

$$p_{U,V}(\ell) = \sup\{ |\langle \ell f' , e'\rangle| ; \ e' \in U^0 , \ f' \in V^0\} .$$

Par conséquent, si $b$ désigne la forme bilinéaire associée à $\ell$ , l'isomorphisme (*) transforme $p_{UV}$ en la semi-norme suivante sur $BS(E'_\sigma , F'_\sigma)$

$$b \to q_{U,V}(b) = \sup\{ |b(e' , f')| ; \ e' \in U^0 , \ f' \in V^0\} .$$

Ces semi-normes définissent la topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de $E'$ et $F'$ . L'e. l. c. s. ainsi obtenu est noté $BS_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma)$ .

(7.5) CONCLUSION. - $BS_\varepsilon(E'_\sigma , F'_\sigma) \simeq L_\varepsilon(F'_\tau , E) \simeq L_\varepsilon(E'_\tau , F)$ .

(7.6) PROPOSITION. - <u>Les e. l. c. s. précédents sont complets si</u> $E$ <u>et</u> $F$ <u>sont complets</u>.

Si $E$ est complet, l'espace $\mathfrak{L}(F' , E)$ , muni de la structure uniforme associée à la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $E'$ est complet. Il suffit de montrer que $L_\varepsilon(F'_\tau , E)$ est un sous-espace fermé de $\mathfrak{L}(E' , F)$. Soit donc $u$ une application linéaire de $E'$ dans $F$ , qui est limite uniforme sur toute partie équicontinue de $E'$ d'applications $u_j \in L(F'_\tau , E)$ . Il suffit de montrer $u \in L(F'_\sigma , E_\sigma)$ . Pour tout $e'$ fixé, $e' \circ u$ est une forme linéaire sur $F'$ qui est limite uniforme sur toute partie équicontinue $V^0$ de $F'$ de formes linéaires faiblement continues. Donc, pour tout $V^0$ , la restriction de $e' \circ u$ à $V^0$ est faiblement continue. Comme $F$ est complet, et d'après le critère de complétion de A. GROTHENDIECK ([3], p. 96), $e' \circ u \in F$ . Donc

$$\forall \ f' \in F' , \ \langle uf' , e'\rangle = \langle e' \circ u , f'\rangle ,$$

le dernier crochet indiquant la dualité entre $F$ et $F'$ . Cette relation montre que $u$ est faiblement continue.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] CHEVET (S.). - Sur certains produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, t. 11, 1969, p. 120-138.

[2] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1966 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[3] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. 3e éd. - São Paulo, Sociedade de Matematica de São Paulo, 1964.

[4] HOGBE-NLEND (H.). - Théorie des bornologies et applications. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 ( Lecture Notes in Mathematics, 213).

[5] HOGBE-NLEND (H.). - Techniques de bornologie en théorie des espaces vectoriels topologiques, "Summer school on topological vector spaces", p. 84-182. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 331).

[6] KRÉE (P.). - Calcul symbolique et seconde quantification des fonctions sesquiholomorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 25-28.

[7] KRÉE (P.). - Théorie de la mesure et holomorphie en dimension infinie, Séminaire Lelong : Analyse, 1975/76 (à paraître).

[8] SAPHAR (P.). - Les normes tensorielles $g_k$ et $d_k$, Séminaire Schwartz : Applications radonifiantes, 1969/70, n° 9, 16 p.

[9] SCHATTEN (R.). - A theory of cross-spaces. - Princeton, Princeton University Press, 1950 (Annals of Mathematics Studies, 26).



Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS