Paul Krée

Classes d'opérateurs à puissances nucléaires

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. n° 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A4_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 4, 12 p.

CLASSES D'OPÉRATEURS A PUISSANCES NUCLÉAIRES

par Paul KRÉE

Cet exposé est motivé par la théorie des espaces nucléaires. Si E et F sont deux espaces vectoriels nucléaires (e. v. n.) sur $\Lambda = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, $L(E, F)$ désigne l'e. v. n. des opérateurs linéaires continus de E dans F. Un sous-espace normé S de $L(E, F)$ est, par définition, un sous-espace vectoriel S de $L(E, F)$ muni d'une norme majorant la restriction à S de la norme de $L(E, F)$. Une classe C d'opérateurs linéaires continus entre e. v. n. est un procédé permettant d'associer à tout couple (E, F) d'e. v. n. un sous-espace normé

$$L_C(E, F)$$

de $L(E, F)$. Par exemple, la classe des opérateurs nucléaires est étudiée au § 1. Si n est un entier $\geqslant 1$ fixé, la classe C est dite à puissance n-ième nucléaire si quels que soient les $(n+1)$ e. v. n. $E_1, \ldots, E_{n+1}$, et quels que soient les n opérateurs $u_i \in L_C(E_i, E_{i+1})$, alors l'opérateur composé

$$u_n \circ \ldots \circ u_1$$

est nucléaire. En pratique $n = 2$, et on se limite ici à l'étude des classes d'opérateurs quasi nucléaires, des opérateurs 1-sommants, et des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Dans ce dernier cas bien sûr, les e. v. n. considérés $E, F, \ldots$ sont supposés hilbertiens.

1. Opérateurs nucléaires entre espaces normés [1] [2].

(1) DÉFINITION. - *Soient E et F deux espaces normés. Une application linéaire continue $T : E \to F$ est dite nucléaire s'il existe des éléments $e'_n \in E'$ et $f_n \in F$ tels que*

(2) $$T = \sum_1^\infty e'_n \otimes f_n \quad \text{avec} \quad \sum \|e'_n\| \, \|f_n\| < \infty .$$

Plus précisément, on doit avoir $Tx = \sum \langle e'_n, x\rangle f_n$, pour tout x dans E. L'espace vectoriel formé par ces opérateurs est noté $L_1(E, F)$. Pour tout

$$T \in L_1(E, F),$$

on pose

$$\|T\|_1 = \inf \sum_n \|e'_n\| \times \|f_n\| .$$

pour toutes les représentations de T sous la forme (2). Si $\|T\|$ désigne la norme usuelle de T, on a, pour tout x de E,

$$\|Tx\| \leqslant \sum |\langle e'_n, x\rangle| \, \|f_n\| \leqslant (\sum \|e'_n\| \, \|f_n\|) \|x\| .$$

En prenant l'inf pour les représentations (2), il vient

$$\|T\|_1 \leq \|T\| .$$

(3) LEMME.

(a) S'il existe $T \in L(E, F)$ et une suite de Cauchy $T_\alpha \in L_1(E, F)$ telle que $(T_\alpha x) \to Tx$ pour tout $x \in E$, alors $T \in L_1(E, F)$ et $\|T - T_\alpha\| \to 0$.

(b) Si F est complet, alors $L_1(E, F)$ est complet.

(a) En effet, il existe une suite croissante α_k telle que

$$\|T_\alpha - T_\beta\| \leq 2^{-k-2} \quad \text{pour } \alpha \text{ et } \beta \geq \alpha_k .$$

Donc

$$T_{\alpha_{k+1}} - T_{\alpha_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_k^n \otimes y_k^n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|a_k^n\| \, \|y_k^n\| < 2^{-k-2} .$$

Pour $p = 1, 2, \ldots$ et pour tout x de E, il vient

$$T_{\alpha_{k+p}} x - T_{\alpha_k} x = \sum_{\ell=k..k+p, k=1..\infty} \langle a_\ell^n , x \rangle \, y_\ell^n .$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, il vient

$$Tx - T_{\alpha_k} x = \sum \sum_{n \geq 1} \langle a_\ell^n , x \rangle \, y_\ell^n .$$

Or

$$\|T - T_{\alpha_k}\|_1 \leq \sum \|a_\ell^n\| \, \|y_\ell^n\| = \sum_{\ell \geq k} 2^{-\ell-1} = 2^{-k-1} .$$

Donc $T - T_{\alpha_k}$ est nucléaire, et T est nucléaire. De plus,

$$\|T - T_\alpha\|_1 \leq \|T - T_{\alpha_k}\| + \|T_{\alpha_k} - T_\alpha\|_1 \leq 2^{-k} \quad \text{si } \alpha \geq \alpha_k .$$

Par conséquent, $(T_\alpha)_\alpha$ tend vers T dans $L_1(E, F)$.

(b) résulte de (a).

(4) LEMME.

(a) $E' \otimes F$ est dense dans $L_1(E, F)$.

(b) Tout opérateur nucléaire est précompact.

(a) En effet, pour tout $T \in L_1(E, F)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe des suites (e'_n) et (f_n) telles que

$$\|T - \sum_{n=1}^{\infty} e'_n \otimes f_n\| \leq \varepsilon/2 .$$

Puis il existe N tel que $\sum_{N+1}^{\infty} \|e'_n\| \, \|f_n\| < \varepsilon/2$. Alors

$$\|T - \sum_1^N e'_n \otimes f_n\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

(b) résulte de (a).

(5) <u>Autres définitions possibles de</u> $L_1(E , F)$ <u>si</u> F <u>est complet</u>.

(a) Un opérateur $T \in L(E , F)$ est <u>nucléaire</u> s'il admet une factorisation

(6) $$E \xrightarrow{u} \ell^\infty \xrightarrow{\lambda} \ell^1 \xrightarrow{v} F$$

avec u et v linéaires continus, λ étant la multiplication par une suite $(\lambda_n)_n \in \ell_1$.

En effet, la définition (2) signifie que

$$T = \sum \lambda_n e_n \otimes f_n \quad \text{avec} \quad \sup \|e'_n\| < \infty , \quad \sup \|f_n\| < \infty \quad \text{et} \quad \sum |\lambda_n| < \infty .$$

Donc T admet la factorisation :

$$x \xrightarrow{u} (\langle e'_n , x\rangle)_n \xrightarrow{\lambda} (\lambda_n \langle e'_n , x\rangle)_n \xrightarrow{v} \sum_1^\infty \lambda_n \langle e'_n , x\rangle f_n .$$

(b) L'injection canonique $j : E' \otimes_\pi F \to L(E , F)$ est continue. Elle se prolonge en une application linéaire continue $\hat{j}$ de $E' \hat{\otimes} F$ dans $L(E , F)$. Un opérateur $T \in L(E , F)$ est nucléaire s'il appartient à l'image de $\hat{j}$.

(7) PROPOSITION. - <u>Soient quatre espaces normés</u> E , F , G , H , <u>et trois applications linéaires continues</u>

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} H .$$

<u>Si</u> v <u>est nucléaire</u>, <u>alors</u> $T = wvu$ <u>est nucléaire</u>, <u>et</u>

$$\|T\|_1 \leq \|w\| \, \|v\|_1 \, \|u\| .$$

En effet, soit $v = \sum f'_n \otimes g_n$ avec $A = \sum \|f'_n\| \, \|g_n\| < \infty$. Alors, pour tout x appartenant à E,

$$Tx = w(vux) = w(\sum \langle f'_n , ux\rangle g_n) = \sum \langle f'_n , ux\rangle w(g_n) .$$

D'où

$$T = \sum_1^\infty u'(f'_n) \otimes w(g_n) \quad \text{et} \quad \|T\|_1 \leq \|u\| \, \|w\| \, A ,$$

et l'inégalité cherchée, puisque $\inf A = \|v\|_1$.

(8) PROPOSITION. -

(a) <u>Si</u> T <u>est nucléaire</u>, <u>la transposée</u> T' <u>de</u> T <u>est nucléaire et</u>

$$\|T'\|_1 \leq \|T\|_1 .$$

(b) <u>Réciproquement</u>, <u>si</u> F <u>est réflexif et si le transposé d'un opérateur continu</u> T <u>est nucléaire</u>, <u>alors</u> T <u>est nucléaire</u>, <u>et</u> $\|T'\|_1 = \|T\|_1$.

<u>Démonstration</u>.

(a) Si T est nucléaire, alors

$$T = \sum e'_n \otimes f_n \quad \text{avec} \quad \|T\|_1 = \inf \sum \|e'_n\| \, \|f_n\| < \infty .$$

Ceci entraîne $T' = \sum f_n \otimes e'_n$, avec $f_n \in F \subset (F')' = F''$. Donc T' est nucléaire, et $\|T'\| \leq \inf \sum \|e_n'\| \, \|f_n\| = \|T\|_1$.

(b) Soit T dans $L(E , F)$ tel que T' soit nucléaire. Alors, vu (a),

$$T'' \in L_1(E'' , F'') = L_1(E , F)$$

puisque F est réflexif, et $\|T''\|_1 \leq \|T'\|_1$. Comme T est la composée de l'injection $E \to E''$ et de T'' , il vient, vu (7), $\|T\|_1 \leq \|T'\|_1$.

(9) <u>Factorisation à travers un Hilbert</u>. - <u>Tout opérateur nucléaire de</u> E <u>dans</u> F <u>supposé complet est la composée de deux applications linéaires continues</u>

$$E \to H \to F ,$$

<u>où</u> H <u>est un espace de Hilbert</u>.

En effet, dans (5.a), on peut supposer les $\lambda_n > 0$.

De (6), il résulte que $T \in L_1(E , F)$ admet la factorisation

$$E \xrightarrow{u} \ell^\infty \xrightarrow{\sqrt{\lambda}} \ell^2 \xrightarrow{\sqrt{\lambda}} \ell^1 \xrightarrow{v} F$$

où $\sqrt{\lambda}$ est l'opérateur de multiplication par la suite $(\sqrt{\lambda_n})_n$.

Malgré toutes ces propriétés sympathiques, les opérateurs nucléaires ont des propriétés surprenantes. Par exemple, si $T \in L_1(E , F)$ a son image contenue dans un sous-espace fermé F_1 de F , il se peut que $e \to T(e)$ ne soit pas nucléaire de E dans F_1 . Cependant, on a la proposition suivante.

(10) PROPOSITION. - <u>Soient deux</u> e. v. n. E <u>et</u> F . <u>Pour toute</u> $u \in L(E , F)$, <u>soit</u> $\hat{u} : \hat{E} \to \hat{F}$ <u>le prolongement linéaire continu de</u> u . <u>Alors</u> u <u>est nucléaire si, et seulement si,</u> $\hat{u}$ <u>est nucléaire</u>. <u>On a alors</u> $|u|_1 = |\hat{u}|_1$.

(11) LEMME. - <u>Soit</u> F <u>un sous e. v. n. dense d'un e. v. n.</u> G . <u>Alors</u>, <u>pour tout</u> $z \in G$ <u>et tout</u> $\eta > 0$, <u>il existe une suite</u> $(y_n)_n$ <u>de</u> F <u>telle que</u> $z = \sum y_n$ <u>et</u> $\sum |y_n| \leq (1 + \delta) \, |z|$.

En effet, pour tout n , il existe y_n' tel que $|z - y_n'| \leq 2^{-n-1} \delta |z|$. Il suffit de poser $y_1 = y_1'$, ... , $y_n = y_n' - y_{n-1}'$. En effet, $z = \lim y_n' = \lim \sum_{k \leq n} y_k$, et

$$|y_1| \leq (1 + 2^{-2} \delta) \, |z| \ ; \quad |y_n| \leq (2^{-n-1} + 2^{-n}) \, \delta \, |z| \ .$$

<u>Démonstration de la proposition</u>. - Il est clair que $\hat{u}$ est nucléaire si u l'est, car $(\hat{E})' = E'$. Réciproquement si $\hat{u}$ est nucléaire, il existe des f_n dans $\hat{F} = G$ tels que $\hat{u} = \sum e_n' \otimes f_n$ avec $\sum |e_n'| \, |f_n| < \infty$. Il suffit alors d'appliquer le lemme à chaque f_n .

(12) EXEMPLE. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Hilbert</u>. <u>Soit</u> A <u>un opérateur linéaire continu de</u> E <u>dans</u> F , <u>et</u> $A = WH$ <u>sa décomposition polaire</u>. <u>Alors les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) A <u>nucléaire,</u>

(b) H <u>nucléaire,</u>

(c) H <u>compact, et</u> $\operatorname{Tr} H$ <u>fini.</u>

Dans cet énoncé, l'expression "$\operatorname{Tr} H$ fini" signifie que la suite des valeurs propres de l'opérateur hermitien compact H est sommable.

<u>Preuve.</u>

(b) entraîne (a) d'après (7). Réciproquement, (a) entraîne (b), car (a) entraîne

$$A = \sum \lambda_i \, e_i \otimes f_i \quad \text{avec} \quad \sum |\lambda_i| < \infty \, , \quad \sup \|e_i\| \leq 1 \, , \quad \sup |f_i| \leq 1$$

d'où $H = \sum \lambda_i \, e_i \otimes W^{-1} f_i$.

Montrons que (b) entraîne (c). Les valeurs propres de l'opérateur hermitien positif compact H sont notées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ Soit e_1 , e_2 , ... un système orthonormé correspondant de vecteurs propres de H .

Soit P_k le projecteur orthogonal sur e_k , et $Q_k = P_1 + \dots + P_k$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par $e_1 \dots e_k$. Posons $u_k = Q_k u$.

$$\|u_k\|_1 = \|Q_k u\| \leq 1 \, \|u\|_1 \, .$$

Comme la norme $\|u_k\|_1$ est égale à la trace,

$$\sum_1^k \lambda_i \leq \|u\|_1 \, .$$

Réciproquement, si $\sum \lambda_k < \infty$, la décomposition spectrale de u donne

$$u = \sum \lambda_k \, e_k \otimes e_k \, ,$$

et, vu (1), u est nucléaire.

(13) PROPRIÉTÉ. - <u>Soient</u> H_1 <u>et</u> H_2 <u>deux espaces de Hilbert, et soit</u>

$$A \in \mathcal{L}(H_1 \, , H_2) \, .$$

<u>Alors, pour que</u> A <u>soit nucléaire, il faut et il suffit qu'il soit le composé de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt.</u>

<u>Démonstration.</u> - Soient A et B deux opérateurs de Hilbert-Schmidt

$$H_1 \xrightarrow{A} H_3 \xrightarrow{B} H_2 \, ,$$

et montrons que BA est nucléaire. Soit UH la décomposition polaire de BA . Soit e_1 , e_2 , ... une base orthonormale de H_1 formée par des vecteurs propres de H . Soient λ_1 , λ_2 , ... les valeurs propres de H , et posons $h_n = U e_n$.

$$\lambda_n = (He_n \, , e_n) = (U He_n \, , U e_n) = (BAe_n \, , h_n) = (Ae_n \, , B^* h_n) \leq \tfrac{1}{2}(\|Ae_n\|^2 + \|B^* h_n\|^2) .$$

Comme A et B sont de Hilbert-Schmidt, on a

$$\sum \|Ae_n\|^2 < \infty \qquad \sum \|B^* h_n\|^2 < \infty \, .$$

Par conséquent, $\sum \lambda_n < \infty$.

Réciproquement, soit N nucléaire, et soit $U\,H$ la décomposition polaire de N. Il suffit de noter que

$$N = U\,H = (U\,H^{\frac{1}{2}}) \circ H^{\frac{1}{2}}$$

et que $H^{\frac{1}{2}}$ est de Hilbert-Schmidt, puisque H est nucléaire.

(14) LEMME (Supercontinuité). – Soient E, F, G trois espaces normés, et ℓ une application nucléaire de E dans F. Alors $u = \ell \otimes I_G$ est continue de $E \otimes_\varepsilon G$ dans $F \otimes_\pi G$.

En effet, comme ℓ est nucléaire,

$$\ell = \sum e'_n \otimes f_n \qquad \sum \|e'_n\|\,\|f_n\| < \infty .$$

Pour $t = \sum x_i \otimes f_i$, on a

$$u(t) = \sum (\ell x_i) \otimes f_i = \sum_n (\sum_i \langle x_i , e'_n\rangle\ y_i) \otimes f_n .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\pi &\leq \sum \|f_n\|\ \|\sum \langle x_i , e'_n\rangle\ y_i\| \\ &\leq \sum \|f_n\|\ \sup_{\|f'\|\leq 1} |\sum \langle x_i , e'_n\rangle\ \langle y_i , f'\rangle| \\ &\leq \sum \|f_n\|\ \|e'_n\|\ \sup\{|\sum \langle x_i , e'\rangle\ \langle y_i , f'\rangle| ,\ \|e'\| \leq 1 ,\ \|f'\| \leq 1\} .\end{aligned}$$

D'où

$$\|u(t)\|_\pi \leq \|\ell\|_\pi\ \|t\|_\varepsilon .$$

(15) Plus généralement, si l'on a $(2n)$ espaces normés E_j et F_j $(1 \leq j \leq n)$, une application linéaire continue $u_1 : E_1 \to F_1$, et $(n-1)$ applications nucléaires $u_j : E_j \to F_j$ $(1 \leq j \leq n)$, alors $u = \bigotimes u_j$ est continue de $\bigotimes_\varepsilon E_j$ dans $\bigotimes_\pi F_j$ et

$$\|u\| \leq \|u_1\|\ \|u_2\|_1 \cdots \|u_n\|_1 .$$

(16) LEMME. – Le produit tensoriel u de n applications nucléaires

$$u_j : E_j \to F_j$$

est nucléaire, et $\|u\|_1 \leq \prod_j \|u_j\|_1$.

(*) Pour tout j,

$$u_j = \sum_{k_j} e'^{j}_{k_j} \otimes f^j_{k_j} , \quad \sum_{k_j} \|e'^{j}_{k_j}\|\ \|f^j_{k_j}\| = M_j < \infty .$$

Pour tout $\bigotimes x_j \in \bigotimes E_j$, on a

$$u(\bigotimes_j x_j) = (\sum_{k_1} \langle x_1 , e'^{1}_{k_1}\rangle\ f^1_{k_1}) \otimes (\sum_{k_2} \cdots) .$$

Posant

$$e'_{k_1\dots k_n} = e'^{1}_{k_1} \otimes \dots \otimes e'^{n}_{k_n} \;;\quad f_{k_1\dots k_n} = \bigotimes_j f^j_{k_j}$$

il vient

$$u = \Sigma_{k_1\dots k_n} (e'_{k_1\dots k_n} \otimes f_{k_1\dots k_n}) .$$

D'où $\|u\|_1 \leq \Sigma \|e'_{k_1\dots k_n}\| \, \|f_{k_1\dots k_n}\| \leq \Pi_j M_j$.

Donc u est nucléaire si $\bigotimes_j E_j$ et $\bigotimes_j F_j$ sont munis simultanément de la norme π, ou de la norme ε.

(17) LEMME (suite). - Soient (2n) espaces normés E_j, F_j, et n applications nucléaires $u_j : E_j \to F_j$. Alors la transposée u' de $u = \bigotimes u_j$ applique $L(F_1, \dots, F_n)$ dans $E'_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} E'_n$. De plus, $\|u'\| \leq \Pi \|u_j\|_1$.

En effet, pour $\bigotimes x_j \in \bigotimes E_j$ et $m \in L(F_1, \dots, F_n) \simeq (\bigotimes_\pi F_j)'$, on a

$$u' m(\bigotimes x_j) = m(u_1 x_1, \dots, u_n x_n)$$

et, vu (*)

$$= m(\Sigma_{k_1} \langle x_1 , e'^{1}_{k_1}\rangle f^1_{k_1} , \Sigma_{k_2} \dots) .$$

Posant $\alpha_{k_1\dots k_n} = m(f^1_{k_1}, \dots, f^n_{k_n})$, $(u' m) = \Sigma_{k_1\dots k_n} \alpha_{k_1\dots k_n} (e'^{1}_{k_1} \otimes \dots \otimes e'^{n}_{k_n})$ et

$$\|u' m\|_\pi \leq \|m\| \, \Sigma \|f^1_{k_1}\| \dots \|f^n_{k_n}\| \, \|e'^{1}_{k_1}\| \dots \|e'^{n}_{k_n}\| \leq \|m\| \, \Pi_j M_j .$$

(17)' Variante symétrique. - Soient E et F deux e. v. n., et soit $v \in L(E, F)$. Alors la transposée u' de $u = \bigodot_n v$ applique ${}^n P(F)$ dans $\hat{\bigodot} E'_j$.

2. Opérateurs quasi nucléaires [1] [2].

(18) DÉFINITION. - Soient E et F deux espaces normés. L'opérateur $T \in L(E, F)$ est dit quasi-nucléaire s'il existe une suite (b'_n) de E' telle que

(18)' $\quad \Sigma \|b'_n\| < \infty$ et $\|Te\| \leq \Sigma |\langle b'_n , e\rangle|$ pour tout e de E.

Posant

$$\|T\|_{q,1} = \inf \Sigma \|b'_n\| ,$$

on obtient une norme sur l'espace $L_{q,1}(E, F)$ des opérateurs quasi nucléaires de E dans F.

(19) Ces opérateurs ont une propriété analogue à (7). - Soient quatre espaces normés et trois opérateurs linéaires continus

$$E \xrightarrow{U} F \xrightarrow{T} G \xrightarrow{V} H .$$

Si T est quasi nucléaire, alors, VTU l'est aussi et

$$\|VTU\|_{q,1} \leq \|U\| \, \|V\| \, \|T\|_{q,1} .$$

L'introduction de ces opérateurs est motivée par la proposition suivante.

(20) PROPOSITION. - Soient E et F deux e. v. n., et T nucléaire de E dans F. Soit G un sous - e. v. n. de F contenant $\operatorname{im} T$. Alors $T : e \to Te$ est quasi-nucléaire de E dans G, et $\|T\|_{q,1} \leq \|T\|_1$.

En particulier, prenant $G = F$, il apparaît que tout opérateur nucléaire est quasi-nucléaire.

En effet, pour $\varepsilon > 0$,

$$T = \sum e'_n \otimes f_n \quad \text{avec} \quad \sup \|f_n\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum \|e'_n\| \leq \|T\|_1 + \varepsilon .$$

D'où

$$\|Te\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e'_n , e\rangle| , \quad \|f_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e'_n , e\rangle| .$$

(21) LEMME. - Tout opérateur quasi nucléaire $T : E \to F$ se factorise à travers $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$:

$$E \xrightarrow{T_1} \ell^\infty \xrightarrow{T_2} F .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut s'arranger pour que $\|T_1\| \leq 1$, $\|T_2\| \leq \varepsilon + \|T\|_{q,1}$. En effet, si l'on a (18)', on peut supposer les b'_n non nuls. On pose

$$\mu_n = \|a_n\|^{\frac{1}{2}} , \quad e'_n = b_n \mu_n^{-1} .$$

On définit T_1 par $T_1 e = (\langle e'_n , e\rangle)_n$. Puis $S_1 \in L(\ell^\infty , \ell^2)$ est défini par $S_1((\xi_n)_n) = \mu_n \xi_n$. Sur le sous-espace H de ℓ^2, engendré par $\operatorname{im} S_1 T_1$, on définit l'opérateur $S_2 : S_1 T_1 e \to T_e$. La norme de S_2 est majorée par $(\|T\|_{q,1} + \delta)^{\frac{1}{2}}$ car

$$\|S_2(S_1 T_1 e)\| = \|Te\| \leq \sum \mu_n^2 |\langle x , e'_n\rangle| \leq (\sum \mu_n^2)^{\frac{1}{2}} (\sum |\mu_n \langle e , e'_n\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum \mu_n^2)^{\frac{1}{2}} \|S_1 T_1 e\| .$$

On a aussi

$$\|S_1\| \leq (\sum \mu_n^2)^{\frac{1}{2}} = (\|T\|_{q,1} + \delta)^{\frac{1}{2}} .$$

Il suffit alors de poser $T_2 = \overline{S}_2 P S_1$, où P est l'opérateur de projection orthogonale de ℓ^2 sur l'adhérence $\overline{H}$ de H, et où $\overline{S}_2$ est le prolongement continu de S_2 à $\overline{H}$.

(22) LEMME. - Tout opérateur quasi nucléaire T, à valeurs dans un espace normé $\ell^\infty(I)$ est nucléaire. De plus, $\|T\|_1 \leq \|T\|_{q,1}$.

(a) La démonstration utilise la remarque suivante : Pour tout sous-espace normé H_0 d'un normé H, toute application linéaire continue $S_0 : H_0 \to \ell^\infty(I)$ se prolonge en une application linéaire continue $S : H \to \ell^\infty(I)$ de même norme.

En effet, pour tout $i \in I$, il existe $\ell_i \in H'_0$ tel que $S_0 h = (\ell_i h)_i$. Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach à chaque ℓ_i.

(b) Prouvons le lemme. Soit T quasi-nucléaire de E dans $\ell^\infty(I)$. Pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe une suite (e'_n) de F' telle que

$$\sum \|e'_n\| \leq \|T\|_{q,1} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \|Te\| \leq \sum |\langle e'_n , e\rangle| .$$

Appliquons (a) au sous-espace normé H_0 de $H = \ell^1(\underset{\sim}{N})$ formé par les suites $(\langle e'_n , e\rangle)_n$, e décrivant E , et à l'opérateur $S_0 : (\langle e'_n , e\rangle)_n \to Te$. On obtient ainsi un prolongement $S : \ell^1(\underset{\sim}{N}) \to \ell^\infty(I)$ de norme majorée par 1 . Ainsi T admet la factorisation

$$e \xrightarrow{U} \ell^1(\underset{\sim}{N}) \xrightarrow{S} \ell^\infty(I) ,$$

où U applique e sur $(\langle e'_n , e\rangle)_n$. Notant (ε_n) la base canonique de ℓ^1 , il vient

$$Te = \sum (S\varepsilon_n) \langle e'_n , e\rangle .$$

D'où

$$\|T\|_1 \leq \sum \|S\varepsilon_n\| \, \|e'_n\| \leq \sum \|e'_n\| \leq \|T\|_{q,1} + \varepsilon ,$$

et le lemme est démontré.

Les deux lemmes qui précèdent impliquent la proposition suivante.

(23) PROPOSITION. - Le composé de deux opérateurs quasi nucléaires

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$$

est un opérateur nucléaire, et $\|ST\|_1 \leq \|S\|_{q,1} \, \|T\|_{q,1}$.

Il suffit d'appliquer le lemme (21) à S

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] & F \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "S_1"'] & & G \\ & & \ell^\infty \arrow[ur, "S_2"'] & \end{tikzcd}$$

puis d'appliquer le lemme (22) à $S_1 T$.

(24) PROPOSITION. - Soient E et F deux e. v. n., et $T \in L_{q1}(E , F)$. Soient E_1 et F_1 deux sous-e. v. n. de E et F respectivement tels que $T(E_1) \subset F_1$. Alors l'application $u_1 : E_1 \to F_1$ qui coincide avec u sur E_1 est quasi nucléaire.

En effet, la transposée de l'injection $j : E_1 \to E$ donne $j' : E' \to E'_1$. Si l'on a (18)', il vient, pour tout e de E_1 ,

$$\langle e , b' n\rangle = \langle je , b' n\rangle = \langle e , j' b' n\rangle .$$

D'où,

$$|T_1 e| \leq \sum |\langle e , j' b' n\rangle| \quad \text{avec} \quad \sum |j' b' n| < \infty ,$$

et par conséquent, T_1 est quasi nucléaire.

(25) PROPOSITION. - Soient E et F deux e. v. n., et $T \in L(E , F)$, tel que T' soit nucléaire. Alors T est quasi nucléaire.

En effet, d'après (8.a), $T'' : E'' \to F''$ est nucléaire. Il suffit alors d'appliquer à T'' la proposition (24).

3. Opérateurs 1-sommants.

(26) DÉFINITION. - Soient E et F deux e. v. n., et soit $p \geq 1$. Un opérateur linéaire $T \in L(E, F)$ est dit p-sommant s'il existe $C > 0$ tel que, pour toute famille finie $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de E, on a

$$(\Sigma \|Tx_i\|^p)^{1/p} \leq C \sup_{\|x'\| \leq 1} (\Sigma_{i=1}^n |\langle x_i, x'\rangle|^p)^{1/p} .$$

L'inf des C vérifiant cette condition est noté $\Pi_p(T)$. L'espace des opérateurs p-sommants de E dans F est noté $\Pi_p(E, F)$, et l'application $T \to \Pi_p(T)$ est une norme sur cet espace. Ces opérateurs ont été étudiés dans le séminaire de l'an dernier, mais en supposant E et F complets. En fait, cette hypothèse est inutile.

(27) LEMME. - Tout opérateur quasi nucléaire $T : E \to F$ est 1-sommant et

$$\Pi_1(T) \leq \|T\|_{q,1} .$$

En effet, pour tout $\delta > 0$, il existe une suite (a'_n) d'éléments de E' tels que

$$\Sigma |a'_n| \leq \|T\|_{q,1} + \delta ; \quad \forall x , \quad |Tx| \leq \Sigma |\langle x , a'_n\rangle| .$$

Posons

$$b'_n = \begin{cases} a'_n \|a'_n\|^{-1} & \text{si } \|a'_n\| \neq 0 \\ 0 \quad \text{si } \|a'_n\| = 0 . \end{cases}$$

Une mesure positive μ sur la boule unité β de E' est construite en posant

$$\forall \varphi \in C(\beta) , \quad \mu(\varphi) = \|a'_n\| \varphi(b'_n) .$$

Alors, pour tout $x \in E$,

$$|Tx| \leq \int_\beta |\langle x , \xi\rangle| d\mu(\xi) .$$

Donc T est 1-sommante et $\Pi_1(T) \leq \|T\|_{q,1} + \delta$.

D'où l'inégalité cherchée en faisant tendre δ vers zéro.

(28) PROPOSITION. - L'espace compact K est muni de la probabilité μ. Soit U l'injection de $C(K)$ dans $L^2_\mu(K)$. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt :

$$L^2_\mu(K) \to F .$$

Alors TU est un opérateur nucléaire et

$$\|TU\|_n \leq \|T\|_2 .$$

Démonstration.

(a) On suppose d'abord que $T = \sum_1^R f_r \otimes y_r$, où les f_r sont des fonctions étagées. En exprimant les f_r en fonction des fonctions caractéristiques $g_1 \dots g_m$ d'ensembles mesurables disjoints, il vient

$$T = \sum_1^M g_r \otimes y_r$$

Pour toute $\varphi \in C(K)$, $TU\,\varphi = \sum (fg_r\,\varphi\,d\mu)\,y_r$.

D'où

$$TU = \sum \mu_r \otimes y_r \quad \text{avec} \quad \mu_r = g_r\,\mu$$

$$\|TU\|_\pi \leqslant \sum \|\mu_r\|\,\|y_r\| .$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$\|TU\|_\pi \leqslant (\sum \|\mu_r\|)^{\frac12}\,(\sum \|\mu_r\|\,\|y_r\|^2)^{\frac12} .$$

Comme $\|\mu_r\| = \mu(E_r)$, $\sum \|\mu_r\| \leqslant 1$. Comme les fonctions $g_r/\mu(E_r)^{\frac12}$ forment un système orthonormé, le deuxième terme est majoré par $\|T\|_r$.

Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt arbitraire. Comme le sous-espace $\mathcal{E}$ des fonctions étagées est dense dans L^2_μ, $\mathcal{E} \otimes F$ est dense dans $L_2(L^2_\mu, F)$. IL existe donc une suite $(T_j)_j$ d'opérateurs du type $\sum f_r \otimes y_r$, qui tend vers T dans L_2.

$$\|(T_j - T_\ell)\,U\|_r \leqslant \|T_j - T_\ell\|_r \to 0 .$$

Par application de ( ), $(T_j\,U)$ tend vers un opérateur nucléaire, et cet opérateur est TU.

(29) PROPOSITION. - <u>L'espace compact</u> K <u>est muni de la probabilité</u> μ. <u>Soit</u> U <u>l'injection de</u> $C(K)$ <u>dans</u> L^2_μ. <u>Alors pour tout opérateur continu</u> T <u>d'un espace de Hilbert</u> E <u>dans</u> $C(K)$, <u>l'opérateur</u> UT <u>est de Hilbert-Schmidt, et</u>

$$\|UT\|_r \leqslant \|T\| .$$

En effet, soit $(e_i)_i$ une base orthonormée de E. Soit $\varphi_i = Te_i$.

$$\sum |\varphi_i(x)|^2 = \sum|\langle Te_i\,,\,\delta x\rangle|^2 = \sum|\langle e_i\,,\,T'\,\delta_x\rangle|^2 = \|T'\,\delta_x\|_E^2 \leqslant \|T'\| = \|T\| .$$

Alors il vient après intégration

$$\sum \|UTe_i\|^2 = \int \sum |\varphi_i(x)|^2\,d\mu(x) \leqslant \|T\| .$$

(30) THÉORÈME. - <u>Le composé de deux opérateurs</u> 1-<u>sommants est un opérateur nucléaire</u>.

En effet, soient deux opérateurs 1-sommants

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G .$$

Soient respectivement M et N les boules unités de E' et F', munies de la topologie faible. En utilisant la factorisation de A. PIETSCH, il apparait que T se factorise en

$$E \to C(M) \to L^2_\mu(M) \to F \ ,$$

où μ est la mesure de Pietsch associée à T. Appliquant la même factorisation à S, il apparait que ST se factorise en

$$E \to C(M) \to \underbrace{L^2_\mu(M) \to F \to C(N) \to L^2_\nu(N)} \to G \ .$$

Appliquant la proposition précédente, il apparaît que l'opérateur marqué d'une accolade est de Hilbert-Schmidt. Par application de (26), l'opérateur

$$C(M) \to L^2_\nu(N)$$

est nucléaire. Puis, par application de (7), l'opérateur ST est nucléaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PERSSON (A.) und PIETSCH (A.). - p-nukleare und p-integrale Abbildungen, Studia Math., Warszawa, t. 33, 1969, p. 19-62.

[2] PIETSCH (A.). - Nuclear locally convex spaces. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972 (Ergebnisse der Mathematik, 66).

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS