PAUL-ANDRÉ MEYER

Intégrales stochastiques III

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 118-141
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__118_0>

Université de Strasbourg Séminaire de Probabilités
1966-67

INTÉGRALES STOCHASTIQUES III

Nous allons reprendre ici l'étude faite dans l'exposé I, mais en remplaçant l'espace de toutes les martingales de carré intégrable (par rapport à une loi de probabilité donnée) par l'espace des fonctionnelles additives d'un processus de HUNT, qui sont des martingales de carré intégrable pour toute loi $\underset{\sim}{P}^x$. Nous continuons à suivre de très près MOTOO et WATANABE.

§I . FONCTIONNELLES ADDITIVES DE MARKOV.

1. Notations utilisées. Ces notations sont celles du fascicule " Processus de Markov" (Lecture Notes in Mathematics, n°26). Elles sont d'ailleurs presque universellement adoptées, à de légères variantes près.

$$E,\ (P_t),\ \Omega,\ (X_t),\ \theta_t\ ,\ \underline{\underline{F}}\ ,\ (\underline{\underline{F}}_t),\ \underset{\sim}{P}^\mu\ ;$$

E l'espace d'états, est un espace localement compact à base dénombrable.

(P_t) est un semi-groupe de transition markovien (*) sur E, satisfaisant à l'hypothèse (A) de HUNT . Pour fixer les idées, on pourra supposer que (P_t) est un semi-groupe de FELLER . De plus, pour simplifier, nous supposerons que les noyaux P_t transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes. Nous noterons (U^p) la résolvante de ce semi-groupe , et nous supposerons (ce n'est pas une hypothèse simplificatrice, mais essentielle !) qu'il existe une mesure de référence η , i.e. une mesure η telle que toutes les mesures $U^p(x,d.)$ soient absolument continues par rapport à η (" hypothèse (L)").

Ω est l'ensemble de toutes les applications (" trajectoires") de $\underset{\sim}{R}_+$ dans E, continues à droite et pourvues de limites à gauche.

X_t est l'application $t \mapsto \omega(t)$ de Ω dans E.

$\theta_s\omega$ est la trajectoire $t \mapsto X_{s+t}(\omega)$. L'application θ_s est appelée

(*) On ramènera le cas sousmarkovien à celui-ci, par le procédé habituel.

opérateur de translation par s.

$\underline{\underline{F}}^{\circ}$, resp. $\underline{\underline{F}}_t^{\circ}$, est la tribu engendrée par les X_s (resp. X_s, $s \leq t$).

$\underset{\sim}{P}^{\mu}$, resp. $\underset{\sim}{P}^{x}$, est l'unique loi sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^{\circ})$ pour laquelle (X_t) est un processus de Markov admettant (P_t) comme semi-groupe de transition, μ (resp. ε_x) comme loi initiale.

$\underline{\underline{F}}^{\mu}$, resp. $\underline{\underline{F}}_t^{\mu}$ est la tribu obtenue en adjoignant à $\underline{\underline{F}}^{\circ}$, resp. $\underline{\underline{F}}_t^{\circ}$, tous les sous-ensembles des éléments de $\underline{\underline{F}}^{\circ}$, $\underset{\sim}{P}^{\mu}$-négligeables. On désigne par $\underline{\underline{F}}$, resp. $\underline{\underline{F}}_t$, l'intersection des tribus $\underline{\underline{F}}^{\mu}$, resp. $\underline{\underline{F}}_t^{\mu}$.

L'expression " p.s." signifie " $\underset{\sim}{P}^{\mu}$-p.s. pour toute loi μ" . Soient A et B deux processus définis sur Ω. Nous dirons que A et B sont indistinguables si $\underset{\sim}{P}^{\mu}\{\exists\, t : A_t(\omega) \neq B_t(\omega)\}=0$ quelle que soit μ.
On montre que

1) La famille $(\underline{\underline{F}}_t^{\mu})$ est continue à droite, et dépourvue de temps de discontinuité.

2) Pour qu'un temps d'arrêt T de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^{\mu})$ soit accessible, il faut et il suffit que $\underset{\sim}{P}^{\mu}\{X_T \neq X_{T-},\ T<\infty\} = 0$.

2. Fonctionnelles additives.

Un processus stochastique (à valeurs réelles finies) $A = (A_t)$ défini sur Ω est une fonctionnelle additive (f.a.) si

1) $A_0=0$; les trajectoires $t \mapsto A_t(\omega)$ de A sont continues à droite ; A_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable pour tout t.

2) Pour chaque couple (s,t) d'éléments de $\underset{\sim}{R}_+$, on a p.s.

(1) $$A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t \quad .$$

Désignons par $H_{s,t}$ l'ensemble où les deux membres de (1) diffèrent. Si $H = \bigcup_{s,t} H_{s,t}$ est négligeable pour toute loi $\underset{\sim}{P}^{\mu}$, nous dirons que la fonctionnelle est parfaite. Même si la fonctionnelle n'est pas parfaite, on peut montrer que

$$A_{T+s} = A_T + A_s \circ \theta_T \text{ p.s. sur } \{T<\infty\} \text{ si T est un temps d'arrêt.}$$

Voici quelques types particulièrement importants de fonctionnelles additives.

1) Nous désignerons par $\underline{\underline{A}}'^{+}$(le ' servant à marquer la distinction avec l'ensemble $\underline{\underline{A}}^{+}$ de l'exposé I) l'ensemble des fonctionnelles additives A dont les trajectoires sont croissantes, et qui sont telles que $\underset{\sim}{E}^x[A_t] < +\infty$ pour tout x et tout t fini. Le sous-ensemble de $\underline{\underline{A}}'^{+}$ constitué par les fonctionnelles à trajectoires continues sera noté $\underline{\underline{A}}_c'^{+}$, et nous poserons $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}'^{+} - \underline{\underline{A}}'^{+}$, $\underline{\underline{A}}_c' = \underline{\underline{A}}_c'^{+} - \underline{\underline{A}}_c'^{+}$. Nous identifierons toujours entre eux les éléments indistinguables de $\underline{\underline{A}}'$, et nous munirons $\underline{\underline{A}}'$ des semi-normes

$$\lambda_{x,t}(A) = \underset{\sim}{E}^x[\int_0^t |dA_s|]$$

Les fonctionnelles $A \in \underline{\underline{A}}'^{+}$ telles que la fonction $\underset{\sim}{E}^\cdot[A_r]$ soit bornée par une constante K pour un r>0 sont particulièrement intéressantes. On a alors $\underset{\sim}{E}^\cdot[A_{nr}] \leq nK$, donc $\underset{\sim}{E}^\cdot[A_t] \leq K(1+\frac{t}{r})$(*). Il en résulte que A a un p-potentiel borné pour tout p>0. Inversement, si le p-potentiel $\underset{\sim}{E}^\cdot[\int_0^\infty e^{-pt}dA_t]$ est borné par C pour un p>0, on a évidemment $\underset{\sim}{E}^\cdot[A_t] \leq Ce^{pt}$ pour tout t.

Voici des exemples d'éléments de $\underline{\underline{A}}'$:

a) Soit f une fonction borélienne bornée ; on pose $A_t = \int_0^t f\circ X_s ds$. En particulier, $A_t = t$ si f=1.

b) Soit R un temps terminal , i.e. un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ tel que l'on ait pour chaque t

$$R\circ\theta_t = R-t \quad \text{p.s. sur } \{t<R\}.$$

On obtient alors une fonctionnelle $A \in \underline{\underline{A}}_c'^{+}$ en posant $A_t = t\wedge R$. Supposons de plus que $\underset{\sim}{P}^x\{R=0\} = 0$ pour tout x, et définissons les itérés de R en posant, par récurrence :

$$R_1 = R \ , \qquad R_{n+1} = R_n + R\circ\theta_{R_n} \ .$$

On obtient alors une autre fonctionnelle additive positive, purement discontinue, en posant (**)

$$A_t = \sum_{n\geq 1} I_{\{R_n \leq t\}}$$

(mais on n'a pas nécessairement $\underset{\sim}{E}^x[A_t] < \infty$). Inversement, toute

---

(*) Ainsi, une fonctionnelle positive telle que $\underset{\sim}{E}^\cdot[A_r]$ soit bornée pour un r>0 appartient à $\underline{\underline{A}}'^{+}$.

(**) Voir le premier paragraphe de l'exposé suivant.

fonctionnelle additive positive, purement discontinue, à sauts unité, est de cette forme, R étant l'instant du premier saut de la fonctionnelle.

2) Nous désignerons par $\underline{\underline{M}}'$ l'ensemble des fonctionnelles additives M telles que

$$E^x[M_t^2] < +\infty \quad , \; E^x[M_t] = 0 \text{ pour tout } x \text{ et tout } t \text{ fini.}$$

Le processus M est alors une martingale de carré intégrable pour chaque loi P^x. En effet, si s<t

$$E^x[M_t - M_s | \underline{\underline{F}}_s] = E^x[M_{t-s} \circ \theta_s | \underline{\underline{F}}_s]$$

Le premier membre étant une fonction intégrable sur Ω, il en est de même du second, et $E^x[|M_{t-s} \circ \theta_s| | \underline{\underline{F}}_s] = E^{X_s}[|M_{t-s}|]$ est intégrable . On a alors

$$E^x[M_{t-s} \circ \theta_s | \underline{\underline{F}}_s] = E^{X_s}[M_{t-s}] = 0 \; .$$

Nous verrons plus loin des exemples explicites de fonctionnelles appartenant à $\underline{\underline{M}}'$.

Nous dirons qu'une **f.a. $A \in \underline{\underline{A}}'$ est <u>naturelle</u> si les applications** $t \mapsto A_t(\omega)$, $t \mapsto X_t(\omega)$ n'ont p.s. pas de discontinuités communes. Cela revient à dire (voir le fasc. des Lecture Notes, chap.XIV, th.37) que $\Delta A_T = 0$ pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible T (ou encore que A est naturel, au sens de l'exposé I, lorsqu'on munit Ω de n'importe quelle mesure P^μ).

3. <u>Quelques résultats sur les f.a. positives</u>.

Il s'agit d'adaptations de résultats présentés au §I du premier exposé.

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> $A \in \underline{\underline{A}}'$ (<u>resp.</u> $\underline{\underline{A}}'_c$) . <u>Le processus</u> $\{A\} = (\int_0^t |dA_s|)_{t \in \mathbb{R}_+}$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{A}}'^+$ (<u>resp. à</u> $\underline{\underline{A}}'^+_c$).

DÉMONSTRATION.- La relation $E^x[\{A_t\}] < +\infty$ est satisfaite par hypothèse. L'égalité $\{A\}_t = \lim_n \sum_{0 \leq k < 2^n} |A_{(k+1)2^{-n}t} - A_{k2^{-n}t}|$ montre que $\{A\}_t$ est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable. Ce mode de calcul de la valeur absolue d'une mesure sur $\underset{\sim}{\mathbb{R}}_+$ montre aussi que $\{A\}_{t+s} = \{A\}_t + \{A\}_s \circ \theta_t$ p.s. (utiliser la subdivision de $[0,t+s]$ formée de la n-ième subdivision dyadique de $[0,t]$, et de la n-ième subdivision dyadique de $[s,t+s]$).

On notera que les notations $\dot{\underline{\underline{L}}}^1(A)$, $\underline{\underline{L}}^1(A)$, définies ci-dessous , <u>n'ont pas le même sens</u> que dans l'exposé I : il s'agissait alors d'espaces de processus , alors qu'ici il s'agit d'espaces de fonctions sur E. On notera que $\dot{\underline{\underline{L}}}^1(A)$ n'est pas contenu dans $\underline{\underline{L}}^1(A)$.

DÉFINITION.- <u>Soit</u> $A \in \underline{\underline{A}}'$. <u>Nous désignerons par</u> $\dot{\underline{\underline{L}}}^1(A)$ (<u>resp</u>. $\underline{\underline{L}}^1(A)$) <u>l'ensemble des fonctions presque-boréliennes</u> f <u>telles que</u>

$$\underset{\sim}{E}^x\Big[\int_0^t |f\circ X_{s-}|\,|dA_s|\Big] < \infty \quad (\underline{\text{resp}}.\ \underset{\sim}{E}^x\Big[\int_0^t |f\circ X_s|\,|dA_s|\Big]<\infty)$$ <u>quels que</u> <u>soient</u> x <u>et</u> t .

<u>Nous noterons alors</u> $\dot{f}.A$ (<u>resp</u>. f.A) <u>la fonctionnelle additive</u>

$$(\dot{f.A})_t = \int_0^t f\circ X_{s-}dA_s \quad (\underline{\text{resp}}.\ (f.A)_t = \int_0^t f\circ X_s dA_s)$$

Cette fonctionnelle appartient évidemment à $\underline{\underline{A}}'$. Il n'y a pas lieu de distinguer $\dot{\underline{\underline{L}}}(A)$ et $\underline{\underline{L}}(A)$, $\dot{f}.A$ et f.A, si A est <u>naturelle</u> , mais là distinction est d'importance si A est " retorse".

Le théorème suivant (à rapprocher de la prop.1 de l'exposé I, mais nettement plus difficile) est dû à MOTOO. On ne sait l'étendre aux fonctionnelles additives naturelles que sous les hypothèses de la troisième partie de HUNT.

THÉORÈME 1.- <u>Soient deux f.a.</u> $A \in \underline{\underline{A}}'_c$, $B \in \underline{\underline{A}}'_c$, <u>telles que la relation</u> f.A=0 (<u>où</u> f <u>est borélienne bornée</u>) <u>entraîne</u> f.B=0 (*). <u>Il existe</u> <u>alors</u> $h \in \underline{\underline{L}}^1(A)$ <u>telle que</u> B=h.A.

(*) Soit $C \in \underline{\underline{A}}'_c$; C est nulle (i.e., indistinguable de 0) si et seulement si $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[C_t]=0$ pour tout t : en effet, cette condition entraîne que C est une martingale pour toute loi $\underset{\sim}{P}^x$, et donc que C=0 d'après le théorème d'unicité. L'hypothèse du th. 1 se met donc sous la forme" $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[(f.A)_t]=0$ pour tout t $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[(f.B)_t]$". Il est parfois plus commode de faire (si c'est possible) une transformation de Laplace, et d'écrire $U_A^p f=0 \Rightarrow U_B^p f=0$.

DÉMONSTRATION.- a) <u>Les fonctionnelles</u> A <u>et</u> B <u>sont positives</u>, $B_t \leq A_t \leq t$ <u>pour tout</u> t.

Posons alors $a_t(x) = \underset{\sim}{E}^x[A_t]/t$, $b_t(x) = \underset{\sim}{E}^x[B_t]/t$, et désignons par η une mesure de référence bornée. Les fonctions a_t étant bornées par 1 , il existe une suite t_n tendant vers 0 telle que a_{t_n} tende vers une fonction borélienne bornée a, pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$ associée à η. Soit p>0 ; les mesures bornées $U^p(x,.)$ étant absolument continues par rapport à η, il en résulte que $U^p(a_{t_n})$ tend partout vers $U^p a$. Mais on a

$$U^p(x,a_t) = E^x[\int_0^\infty e^{-ps}\,\frac{1}{t}(A_t\circ\theta_s)ds] = E^x[\int_0^\infty e^{-ps}\frac{A_{s+t}-A_s}{t}\,ds]$$

et cela tend, lorsque t->0, vers le p-potentiel U_A^p (qui est borné). Les deux f.a. continues (A_t) et $(\int_0^t a\circ X_s ds)$ ont donc même p-potentiel, ce qui entraîne qu'elles sont indistinguables. De même, il existe une fonction b telle que $B_t = \int_0^t b\circ X_s ds$. Posons alors $h=\frac{b}{a}$ sur l'ensemble $\{a\neq 0\}$, h=0 sur $\{a=0\}$; il est facile de vérifier que B=h.A.

b) <u>Les f.a.</u> A <u>et</u> B <u>sont positives</u>, A <u>est strictement croissante</u>, $A \leq B$.

Introduisons le changement de temps (c_t) associé à la fonctionnelle additive A ($c_t(\omega) = \inf\{s : A_s(\omega) > t\}$), et posons $Y_t = X_{c_t}$ ($Y_t = \partial$ si $c_t = +\infty$) , et $A'_t = A_{c_t}$, $B'_t = B_{c_t}$. Posons aussi $Q_t(x,f) = \underset{\sim}{E}^x[f\circ Y_t]$ si f est borélienne bornée : (Q_t) est un semi-groupe de transition et, si l'on munit Ω de la loi $\underset{\sim}{P}^\mu$, le processus (Y_t) est markovien, admet (Q_t) comme semi-groupe et μ comme loi initiale. Appliquons alors le raisonnement de a) à A' et B' (il y a de légères modifications, qui tiennent à ce que (Y_t) n'est pas la réalisation canonique de (Q_t)): nous voyons qu'il existe une fonction h

---

(*) Voir MEYER , fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t.12, 1962, p.125-230. Cet article sera désigné par [6] dans la suite.

telle que $h.A'=B'$; en revenant à (X_t) par le changement de temps inverse, on voit que $h.A=B$.

c) A et B sont positives.

On pose $C_t=A_t+B_t+t$; alors d'après b) on peut écrire $A=a.C$, $B=b.C$. On pose alors $h = \frac{b}{a}$ sur $\{a\neq 0\}$, $h=0$ sur $\{a=0\}$, et on vérifie aisément que $B=h.A$.

d) Cas d'une fonctionnelle et **de sa valeur absolue.**

Soit $A\in\underline{\underline{A}}'$, non nécessairement positive. Les f.a. positives $(\{A\}+A)/2$, $(\{A\}-A)/2$ sont majorées par $\{A\}$; il existe donc une fonction Θ telle que $A=\Theta.\{A\}$. Mais alors, par passage aux valeurs absolues, on voit que $\{A\}=|\Theta|.\{A\}$. On peut donc modifier Θ de telle sorte, qu'elle ne prenne que les valeurs ± 1 , et il en résulte que $\{A\}=\Theta.A$.

e) Cas général. On peut écrire $A=a.\{A\}$, $\{A\}=a.A$, $B=b.\{B\}$, $\{B\}=b.B$. Il en résulte que la relation $f.\{A\}=0$ entraîne $f.\{B\}=0$, et donc $\{B\}=g.\{A\}$ d'après c), d'où $B=h.A$ avec $h=agb$, ce qui achève la démonstration.

Pour finir, nous signalerons l'extension de certains résultats relatifs aux processus associés. Nous dirons que deux éléments A et B de $\underline{\underline{A}}'$ sont associés (notation : $A\sim B$) si $\underset{\sim}{E}^{\cdot}[A_t]=\underset{\sim}{E}^{\cdot}[B_t]$ pour tout t : cela revient à dire que le processus A-B est une martingale pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^x$. On peut montrer (le principe de la démonstration est proche de celui des th. 2 et 3 ci-dessous) que toute f.a. $A\in\underline{\underline{A}}'$est associée à une f.a. $\tilde{A}\in\underline{\underline{A}}'_c$ naturelle unique. Comme dans l'exposé I, nous poserons $A-\tilde{A} = \overset{\approx}{A}$.

§ 2. INTÉGRALES STOCHASTIQUES.

1. Nous allons reprendre dans ce paragraphe, à propos de l'espace $\underline{\underline{M}}'$ des fonctionnelles additives - martingales de carré intégrable, les résultats qui ont été établis dans l'exposé I sur l'espace de toutes les martingales de carré intégrable.

Soit $M\in\underline{\underline{M}}'$; nous poserons $\eta_{x,t}(M) = (\underset{\sim}{E}^x[M_t^2])^{1/2}$, et nous munirons $\underline{\underline{M}}'$ des semi-normes $\eta_{x,t}$ dans toute la suite. Nous désignerons par $\underline{\underline{M}}'_c$ l'ensemble des éléments continus de $\underline{\underline{M}}$. Malheureusement

(contrairement à ce qui se passait dans l'exposé I, où il y avait une seule mesure), $\underline{\underline{M}}'$ n'est pas un espace de Fréchet : le théorème ci-dessous est donc plus faible que celui de l'exposé I.

THÉORÈME 2.- Toute suite de Cauchy dans $\underline{\underline{M}}'$ (resp. dans $\underline{\underline{M}}'_c$) est convergente dans $\underline{\underline{M}}'$(resp. $\underline{\underline{M}}'_c$).

DÉMONSTRATION.- Nous ne démontrerons que l'assertion relative à $\underline{\underline{M}}'$, celle qui concerne $\underline{\underline{M}}'_c$ s'en déduisant grâce à l'inégalité de DOOB (exp. I, p. 5), comme dans l'exposé I.

Nous utiliserons le lemme suivant, qui est "classique" (voir [3], chap.VIII, n°10)

LEMME.- Soient $(U,\underline{\underline{U}})$ un espace mesurable, $(\Omega,\underline{\underline{S}})$ un espace mesurable dont la tribu $\underline{\underline{S}}$ est séparable, $u \mapsto P_u$ une application mesurable de U dans l'ensemble des lois de probabilité sur Ω (i.e., un noyau markovien de U dans Ω), $u \mapsto Q_u$ une application mesurable de U dans l'ensemble des mesures bornées sur Ω, telle que pour tout u Q_u soit absolument continue par rapport à P_u. Il existe alors une fonction mesurable $q(u,\omega)$ sur $(U\times\Omega,\ \underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{S}})$, telle que $q(u,.)$ soit , pour tout $u\in U$, une densité de Q_u par rapport à P_u.

Ce lemme étant admis, considérons une suite de Cauchy (M^n) dans $\underline{\underline{M}}'$, et désignons par $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des lois μ telles que (M^n_t) soit une suite de Cauchy dans $L^2(P^\mu)$ pour tout t fini ; nous désignerons alors par M^μ_t une variable aléatoire limite de cette suite, choisie à une équivalence près : on pourra supposer que M^μ_t est $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable. Soit f une fonction $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable et bornée, et posons $M^x_t = M^{\varepsilon_x}_t$; la fonction $x \mapsto E^x[f.M^x_t]$ est la limite des fonctions universellement mesurables $x \mapsto E^x[f.M^n_t]$; la tribu $\underline{\underline{F}}^\circ$ étant séparable, le lemme entraîne l'existence d'une fonction $M'_t(x,\omega)$, mesurable par rapport à $\underline{\underline{B}}_u(E)\times\underline{\underline{F}}^\circ$, telle que pour tout x la fonction $M'_t(x,.)$ soit une densité de $M^x_t.P^x$ par rapport à P^x - autrement dit, soit égale P^x-p.p. à M^x_t. Posons maintenant $M'_t(\omega) = M'_t(X_0(\omega),\omega)$: c'est une fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable, et on a pour tout x et tout t

$$\lim_n E^x[(M^n_t - M'_t)^2] = 0 .$$

Soit maintenant $\mu\in\underline{\underline{H}}$; dire que M^n_t converge vers M^μ_t dans $L^2(P^\mu)$ revient à dire que

$$\lim_n \int_E \mu(dx)\underset{\sim}{E}^x[(M_t^n - M_t^\mu)^2] = 0$$

Il existe donc une suite croissante (n_k) d'entiers, telle que

$$\underset{\sim}{E}^x[(M_t^{n_k} - M_t^\mu)^2] \longrightarrow 0 \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x .$$

Pour un tel x, on a $M_t^\mu = M_t^x = M_t^!$ $\underset{\sim}{P}^x$-p.s. En intégrant, on en déduit que

$$\text{si } \mu\in\underline{\underline{H}} \text{ , on a } M_t^\mu = M_t^! \quad \underset{\sim}{P}^\mu\text{-p.s. pour tout t.}$$

Remarquons maintenant que $M_{s+t}^n \to M_{s+t}^!$ dans $L^2(\underset{\sim}{P}^\mu)$, de sorte que $M_{s+t}^n - M_t^n = M_s^n \circ \theta_t$ tend vers $M_{s+t}^! - M_t^!$. Mais d'autre part, les variables aléatoires $M_s^n \circ \theta_t$ formant une suite de Cauchy dans $L^2(\underset{\sim}{P}^\mu)$ d'après ce qui vient d'être dit, la propriété de Markov simple entraîne que les M_s^n forment une suite de Cauchy dans $L^2(\underset{\sim}{P}^{\mu P_t})$; autrement dit, $\mu\in\underline{\underline{H}}$ entraîne $\mu P_t \in \underline{\underline{H}}$, et donc $\lim_n M_s^n = M_s^!$ dans $L^2(\underset{\sim}{P}^{\mu P_t})$. La propriété de Markov simple entraîne alors que $M_s^n \circ \theta_t \to M_s^! \circ \theta_t$ dans $L^2(\underset{\sim}{P}^\mu)$, d'où enfin

$$M_{s+t}^! - M_t^! = M_s^! \circ \theta_t \quad \underset{\sim}{P}^\mu\text{-p.s.} \quad ,$$

si $\mu\in\underline{\underline{H}}$; mais cela vaut en particulier pour $\mu=\varepsilon_x$, et donc (par intégration) pour μ quelconque.

Le processus $(M_t^!)$ est donc une martingale pour toute loi $\underset{\sim}{P}^\mu$ $(\mu\in\underline{\underline{H}})$. Soit L l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que la limite

$$M_{t+}^!(\omega) = \lim_{\substack{s \text{ rationnel} \\ s \to t+0}} M_s(\omega)$$

existe pour tout t . Posons $M_t(\omega) = M_{t+}^!(\omega)$ si $\omega\in L$, $M_t(\omega)=0$ si $\omega\notin L$. La famille de tribus étant continue à droite, on a $M_t = M_t^!$ p.s. pour chaque t ([3], chap.VI, th.4), et on vérifie aussitôt que le processus (M_t) est une f.a. appartenant à $\underline{\underline{M}}$, et que la suite (M_t^n) converge vers (M_t) dans $\underline{\underline{M}}$.

2. Intégrales stochastiques.

THÉORÈME 3.- Soit $M\in\underline{\underline{M}}$; il existe une f.a. $A\in\underline{\underline{A}}_c^{!+}$, unique, telle que $\underset{\sim}{E}^x[M_t^2 - A_t] = 0$ pour tout x et tout t.

DÉMONSTRATION.- Unicité : si A et A' sont deux fonctionnelles additives possédant ces propriétés, A-A' est une f.a. continue, appartenant à $\underline{\underline{A}}'$, telle que $(A_t - A'_t)$ soit une martingale pour toute mesure P^x. On a donc A-A'=0.

Existence : soit $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des mesures μ telles que $E^\mu[M_t^2] < +\infty$ pour tout t, et soit (A_t^μ) une version du processus croissant <M,M> (exposé I) relatif à la mesure P^μ. Nous avons vu dans l'appendice de l'exposé I que

$$A_t^\mu = \lim \sum_i E[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \underline{\underline{F}}_{t_i}] \qquad \text{dans } L^1(P^\mu)$$

pour des subdivisions (t_i) de $[0,t]$ devenant arbitrairement fines. On en déduit comme dans la démonstration précédente l'existence d'une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}$-mesurable A'_t telle que $A'_t = A_t^\mu$ P^μ-p.s. quelle que soit $\mu \in \underline{\underline{H}}$. On montre ensuite (comme plus haut) que $\mu \in \underline{\underline{H}}$ entraîne $\mu P_t \in \underline{\underline{H}}$, et que $A'_{s+t} = A'_t + A'_s \circ \theta_t$ p.s. (on utilise pour évaluer A^μ_{s+t} des subdivisions dyadiques de $[0,s]$ et de $[s,s+t]$) . Enfin, on obtient A en rendant A' continue à droite, à la manière de la démonstration précédente.

Nous désignerons par <M,M> la f.a. définie dans l'énoncé précédent. Si M et N sont deux éléments de $\underline{\underline{M}}$, nous définirons la f.a. $< M,N > \in \underline{\underline{A}}'_c$ comme dans l'exposé I. Les deux f.a. M et N seront dites <u>orthogonales</u> si <M,N> = 0.

DÉFINITION.- <u>Soit</u> $M \in \underline{\underline{M}}'$. <u>On désigne par</u> $\underline{\underline{L}}^2(M)$ <u>l'ensemble des fonctions presque boréliennes</u> f <u>sur</u> E <u>telles que</u> $f^2 \in \underline{\underline{L}}^1(\langle M,M\rangle)$.

THÉORÈME 4.- <u>Soit</u> $M \in \underline{\underline{M}}'$, <u>et soit</u> $f \in \underline{\underline{L}}^2(M)$. <u>Il existe une f.a. unique, appartenant à</u> $\underline{\underline{M}}'$, <u>notée</u> f.M <u>ou</u> $(\int_0^t f \circ X_{s-} dM_s)$, <u>qui possède la propriété suivante</u>

<u>si</u> $N \in \underline{\underline{M}}'$, <u>on a</u> $f \in \underline{\underline{L}}^1(\langle M,N\rangle)$ <u>et</u> $\langle f.M, N\rangle = f.\langle M,N\rangle$ (*)

(*) En toute rigueur, il conviendrait de noter $\dot{f}$.M cette fonctionnelle, pour la distinguer de l'intégrale stochastique $(\int_0^t f \circ X_s dM_s)$; mais nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser celle-ci, et il n'y aura donc pas de risque de confusion.

DÉMONSTRATION.- L'unicité ne présente aucune difficulté (cf. exposé I). Pour établir l'existence, un raisonnement de classe monotone et l'utilisation du th.2 permettent de se ramener au cas où f est bornée et continue. Soit alors ϕ le processus très-bien-mesurable $(f\circ X_{t-})$, et soit (L_t^μ) une version de l'intégrale stochastique $\phi.M$, relative à la mesure $\underset{\approx}{P}^\mu$ (où μ est telle que $\underset{\approx}{E}^\mu[M_t^2]<\infty$ pour tout t). Le processus ϕ étant continu à gauche, L_t^μ est limite en norme de sommes de la forme

$$\sum f\circ X_{t_i-}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})$$

prises pour des subdivisions (t_i) arbitrairement fines de $[0,t]$. On peut d'ailleurs remplacer X_{t_i-} par X_{t_i} qui lui est égal p.s. . On établit alors comme dans la démonstration du th.2 l'existence d'une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable L'_t telle que $L_t^\mu=L'_t$ p.s. quelle que soit μ ; on établit ensuite la relation $L'_{s+t}=L'_s+L'_t\circ\theta_s$ p.s., et on régularise à la façon du th.2.

3.<u>Le théorème de projection</u>.

DÉFINITION.- <u>On dit qu'un sous-espace</u> $\underline{\underline{L}}$ <u>de</u> $\underline{\underline{M}}'$ <u>est stable si</u>

1) <u>Pour toute suite</u> (M_n) <u>d'éléments de</u> $\underline{\underline{L}}$, <u>qui converge vers</u> M $\in\underline{\underline{M}}'$, <u>on a</u> $M\in\underline{\underline{L}}$.

2) <u>Pour tout</u> $M\in\underline{\underline{L}}$, <u>et tout</u> $f\in\underline{\underline{C}}_0(E)$, <u>on a</u> $f.M\in\underline{\underline{L}}$.

On a alors aussi f.M pour $f\in\underline{\underline{L}}^2(M)$ d'après 1). Cette définition est analogue à celle des sous-espaces stables de $\underline{\underline{M}}$ donnée dans l'exposé I, mais les deux notions ne coïncident pas exactement. De même, il faudra prendre garde que le sous-espace stable $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{H}})$ engendré par une partie $\underline{\underline{H}}$ de $\underline{\underline{M}}'$ n'est pas identique à l'espace désigné par cette notation dans l'exposé I.

THÉORÈME 5.- <u>Soit</u> $\underline{\underline{L}}$ <u>un sous-espace stable de</u> $\underline{\underline{M}}'$, <u>et soit</u> $M\in\underline{\underline{M}}'$. <u>Il existe une f.a.</u> $H\in\underline{\underline{L}}$, <u>unique , telle que</u> M-H <u>soit orthogonale à</u> $\underline{\underline{L}}$. <u>On dit que</u> H <u>est la projection de</u> M <u>sur</u> $\underline{\underline{L}}$.

DÉMONSTRATION.- L'unicité est évidente. Pour établir l'existence, nous suivrons la démonstration du théorème analogue (th.5) de l'exposé I, en insistant seulement sur les points qui diffèrent dans les deux preuves.

a) Supposons que $\underline{\underline{L}}$ soit le sous-espace stable $\underline{\underline{S}}(N)$ engendré par une f.a. $N \in \underline{\underline{M}}'$. La relation $f.\langle N,N\rangle = 0$, où f est borélienne bornée, entraîne $f.\langle N,N\rangle=0$ (exposé I, prop. 1 et 3) ; d'après le th.1, il existe une fonction $h \in \underline{\underline{L}}^1(\langle N,N\rangle)$ telle que $\langle M,N\rangle=h.\langle N,N\rangle$. On montre alors, comme dans la démonstration du th.5 de l'exposé I (p.10) que $h \in \underline{\underline{L}}^2(N)$ et que h.N est la projection cherchée de M sur $\underline{\underline{S}}(N)$.

b) Si $\underline{\underline{L}}$ est le sous-espace stable $\underline{\underline{S}}(N_1,\ldots,N_p)$ engendré par une suite finie de fonctionnelles. On procède par orthogonalisation comme dans l'exposé I (p.10). On passe de là , grâce au th. 2, au cas où $\underline{\underline{L}}$ est engendré par une suite $(N^k)_{k\in \underset{\sim}{N}}$ de f.a. .

c) Cas général. Choisissons une mesure de référence bornée η telle que $\underset{\sim}{E}^\eta[M_{t_0}^2]<\infty$ pour un $t_0>0$, et posons $c=\inf\limits_{L\in\underline{\underline{L}}} \underset{\sim}{E}^\eta[(M_{t_0}-L_{t_0})^2]$ (*).
Choisissons une suite (N^k) d'éléments de $\underline{\underline{L}}$, telle que $c = \inf\limits_k \underset{\sim}{E}^\eta[(M_{t_0}-N^k_{t_0})^2]$, et désignons par H la projection de M sur le sous-espace stable $\underline{\underline{S}}(N^k,\ k\in\underset{\sim}{N})$; soit d'autre part $N\in\underline{\underline{L}}$, et H' la projection de M sur le sous-espace stable engendré par les N^k et par N . Comme M-H' est orthogonale à H-H', on a $\underset{\sim}{E}^\eta[(M_{t_0}-H_{t_0})^2] = \underset{\sim}{E}^\eta[(M_{t_0}-H'_{t_0})^2] + \underset{\sim}{E}^\eta[(H'_{t_0}-H_{t_0})^2]$, d'où $\underset{\sim}{E}^\eta[(H_{t_0}-H'_{t_0})^2] = 0$ par définition de c. La fonction $\phi(x)=\underset{\sim}{E}^x[(H_{t_0}-H'_{t_0})^2]$ est donc nulle η-presque partout. Admettons pour un instant que cela entraîne que H=H': le théorème en résultera aussitôt, car $N\in\underline{\underline{L}}$ est arbitraire dans ce qui précède, et H sera donc la projection cherchée.

Reste donc à démontrer ce point. Soit $A\in\underline{\underline{A}}_c'^{+}$ la fonctionnelle $\langle H-H',\ H-H'\rangle$; nous avons $\underset{\sim}{E}^\bullet[A_{t_0}]=0$ presque partout(**) et nous voulons en déduire que A=0. Remarquons d'abord que si une fonction

---

(*) c est fini, car $0\in\underline{\underline{L}}$.
(**) i.e., sauf sur un ensemble de potentiel nul.

positive f est nulle presque partout, il en est de même de $P_s f$ pour tout s, car $UP_s f = P_s Uf \leq Uf = 0$. Appliquer P_s à $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[A_{t_0}]$ transforme cette fonction en $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[A_{t_0}\circ\theta_s]$; on en déduit alors, en prenant $s=t_0$, que $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[A_{2t_0}]$ est nulle presque partout ; en itérant et en passant à la limite, on voit que $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[A_\infty]$ est nulle presque partout . Mais cette fonction est excessive, elle est donc nulle partout.

COROLLAIRE.- Soit $\underline{\underline{H}}$ une partie quelconque de $\underline{\underline{M}}'$; le sous espace stable $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{H}})$ est l'orthogonal de l'orthogonal de $\underline{\underline{H}}$.(*)

Soit $\underline{\underline{K}}$ ce double orthogonal : c'est un sous-espace stable qui contient $\underline{\underline{H}}$, donc $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{H}})$. Inversement, soit $M\in\underline{\underline{K}}$, et soit N la projection de M sur $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{H}})$: M-N est orthogonal à N et à $\underline{\underline{H}}$, donc à M puisque $M\in\underline{\underline{K}}$, donc à M-N, et enfin M-N = 0.

4. Un système générateur.

Soit g une fonction borélienne bornée, et soit p un nombre >0. Nous désignerons par $C^{p,g}$ la fonctionnelle additive

(1) $$C_t^{p,g} = U^p g\circ X_t - U^p g\circ X_0 + \int_0^t (g-pU^p g)\circ X_s\, ds \quad .$$

D'autre part, soit f une fonction bornée qui appartient au domaine $\underline{\underline{D}}$ du générateur infinitésimal A de (P_t) (une telle fonction est un p-potentiel pour tout p>0, et donc est borélienne d'après l'hypothèse (L)). Nous désignerons par C^f la fonctionnelle

(2) $$C_t^f = f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t Af\circ X_s\, ds \; .$$

Toute fonctionnelle C^f est aussi de la forme $C^{p,g}$ (avec g=pf-Af), et toute fonctionnelle $C^{p,g}$, $g\in\underline{\underline{C}}_0$, est aussi de la forme C^f(avec $f=U^p g$). Ces fonctionnelles sont bornées ; on sait que $C^f\in\underline{\underline{M}}'$ (c'est la "formule de DYNKIN"), et on démontre sans peine la même chose pour les fonctionnelles $C^{p,g}$.

Le théorème suivant, dû à KUNITA et WATANABE, est fondamental. Soit μ une mesure bornée , et soit $\underline{\underline{M}}$ l'espace de toutes les martingales (f.a. ou non !) de carré intégrable sur l'espace $(\Omega,(\underline{\underline{F}}^\mu)$,

(*) Il en résulte en particulier que $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{H}})$ est fermé .

$\underset{\sim}{P}^{\mu}$). Alors

THÉORÈME 6.- Si $M\in\underline{\underline{M}}$ est orthogonale (pour la loi $\underset{\sim}{P}^{\mu}$) à toutes les martingales bornées $C^{p,g}$ $(p>0, g\in\underline{\underline{C}}_0)$, M est nulle (i.e., indistinguable de 0 pour la loi $\underset{\sim}{P}^{\mu}$).(*)

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 6'.- Le sous-espace stable de $\underline{\underline{M}}$' engendré par les $C^{p,g}$ est $\underline{\underline{M}}$' tout entier.

DÉMONSTRATION du th.6.- Il suffira de montrer que l'on a, pour toute fonction $f\in\underline{\underline{C}}_0$, tout couple (s,t) tel que s<t

(3) $$\underset{\sim}{E}^{\mu}[f\circ X_t(M_t-M_s)|\underline{\underline{F}}_s] = 0$$

En effet , cette relation s'étendra aux fonctions f universellement mesurables bornées. Soient alors $t_1<t_2\ldots<t_n$ des instants, $f_1,\ldots,$ f_n des fonctions universellement mesurables bornées. Nous avons

$$\underset{\sim}{E}^{\mu}[f_1\circ X_{t_1}\ldots f_n\circ X_{t_n}.M_{t_n}] = \underset{\sim}{E}^{\mu}[f_1\circ X_{t_1}\ldots f'_{n-1}\circ X_{t_{n-1}}.M_{t_{n-1}}] +$$

$$+\underset{\sim}{E}^{\mu}[f_1\circ X_{t_1}\ldots f_{n-1}\circ X_{t_{n-1}}E[f_n\circ X_{t_n}(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})|\underline{\underline{F}}_{t_{n-1}}]]$$

où $f'_{n-1} = f_{n-1}.P_{t_n-t_{n-1}}f_n$. La dernière expression est nulle d'après (3), et la première expression au second membre est du même type que le premier membre, avec n-1 instants au lieu de n. Une récurrence immédiate permet alors d'en déduire que le premier membre est nul, donc que M est nulle.

Reste à établir (3) pour $f\in\underline{\underline{C}}_0$. Notons d'abord que M, orthogonale à $C^{p,g}$ pour un p>0 et $g\in\underline{\underline{C}}_0$, est orthogonale à $C^{p,g}$ pour toute fonction universellement mesurable et bornée (raisonnement classique par classe monotone et complétion) ; elle est donc orthogonale à C^f pour toute f du domaine de A, et finalement à $C^{q,f}$ pour tout q>0 et tout $f\in\underline{\underline{C}}_0$. D'autre part, si M est orthogonale à $C^{q,f}$, elle l'est aussi à la martingale

(4) $$J_t = e^{-qt}C_t^{q,f} + \int_0^t qe^{-qs}C_s^{q,f}\,ds$$

(*) Il suffit même de supposer cela pour une valeur p>0 . On notera que la démonstration de ce théorème ne dépend pas de l'hypothèse (L) : on n'y change pas de mesure initiale.

car cette martingale est égale à l'intégrale stochastique $(\int_0^t e^{-qs}dC_s^{q,f})$ (exposé II, p.12). On a aussi $J_t = e^{-qt}u\circ X_t - u\circ X_0 + \int_0^t e^{-qs}f\circ X_s ds$, en posant $u=U^q f$. Nous avons $\underset{\sim}{E}[(J_t-J_s)(M_t-M_s)|\underline{\underline{F}}_s]=0$ d'après l'orthogonalité, aussi $\underset{\sim}{E}[(J_\infty-J_t)(M_t-M_s)|\underline{\underline{F}}_s]=0$ puisque $\underset{\sim}{E}[J_\infty-J_t|\underline{\underline{F}}_t]=0$, donc en ajoutant $\underset{\sim}{E}[(J_\infty-J_s)(M_t-M_s)|\underline{\underline{F}}_s]=0$, ou

$$\underset{\sim}{E}[(M_t-M_s)\int_s^\infty e^{-qv}f\circ X_v dv|\underline{\underline{F}}_s]=\underset{\sim}{E}[(M_t-M_s)(e^{-qs}u\circ X_s-u\circ X_0)|\underline{\underline{F}}_s]$$

et cette dernière expression est nulle, car M est une martingale. L'espace des fonctions continues ϕ sur $[s,+\infty]$ telles que $\underset{\sim}{E}[(M_t-M_s)\int_s^\infty \phi(v)f\circ X_v e^{-v}dv|\underline{\underline{F}}_s]=0$, contient les fonctions $e^{-qv}(q\geq 0)$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il contient toutes les fonctions continues sur $[s,+\infty]$. En approchant la masse unité ε_t par de telles fonctions, on voit que $\underset{\sim}{E}[(M_t-M_s)f\circ X_t|\underline{\underline{F}}_s]=0$, d'où le résultat.

5. <u>Une fonctionnelle additive fondamentale</u>.

Nous commençons par des résultats d'ordre technique.

LEMME 1.- <u>Soit</u> $M\in\underline{\underline{M}}'$; <u>il existe une suite croissante</u> (D_n) <u>d'ensembles boréliens, de réunion</u> E, <u>telle que les fonctions</u> $\underset{\sim}{E}^\bullet[(I_{D_n}\cdot M)_t^2]$ <u>soient bornées, quels que soient</u> n <u>et</u> t.

DÉMONSTRATION.- Soit $A=\langle M,M\rangle$; tout revient évidemment à choisir des D_n comme ci-dessus, tels que les fonctions $\underset{\sim}{E}^\bullet[(I_{D_n}\cdot A)_t]$ soient bornées. D'autre part, il suffit évidemment que les fonctions $\underset{\sim}{E}^\bullet[(I_{D_n}\cdot A)_1]$ le soient (cf. p.3). Désignons par c_1 la fonction $\underset{\sim}{E}^\bullet[A_1]$; on vérifie sans peine que $c_1=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h P_s c_1\, ds$, ce qui entraîne que c_1 est borélienne, d'après l'hypothèse (L). D'autre part, si (T_k) est une suite de temps d'arrêt bornés qui décroît vers 0 $\underset{\sim}{P}^x$-p.s. ($x\in E$), on a $\lim_k \underset{\sim}{E}^x[c_1\circ X_{T_k}]=c_1(x)$ ce qui entraîne, en vertu d'un théorème de DYNKIN, que c_1 est finement continue . Nous allons montrer que les ensembles finement fermés boréliens D_n =

$\{c_1 \leqq n\}$ répondent à la question. Leur réunion est E. Soit d_1 la fonction $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_0^1 I_{D_n} \circ X_s dA_s]$, soit T le temps d'entrée dans D_n, et B la f.a. $I_{D_n}.A$; on a $\int_{[0,T\wedge 1[} dB_s = 0$, donc aussi $\int_{[0,T\wedge 1]} dB_s = 0$ puisque B est continue, donc

$$d_1(x) = \underset{\sim}{E}^x[\int_0^1 dB_s] = \underset{\sim}{E}^x[\int_{T\wedge 1}^1 dB_s] \leqq \underset{\sim}{E}^x[\int_{T\wedge 1}^{(T\wedge 1)+1} dB_s]$$

$$= P_T(x,d_1) \leqq P_T(x,c_1) \leqq n$$

puisque $c_1 \leqq n$ sur l'ensemble finement fermé D_n.

LEMME 2.- <u>Soit</u> $M \in \underline{\underline{M}}'$; <u>il existe une fonctionnelle</u> $N \in \underline{\underline{M}}'$, <u>engendrant le même sous-espace stable que</u> M, <u>telle que les fonctions</u> $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[N_t^2]$ <u>soient bornées</u>.

DÉMONSTRATION.- Choisissons des ensembles D_n comme dans le lemme 1, tels que $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[(I_{D_n}.M)_1^2] \leqq n$ pour tout n, et soit (λ_n) une suite de nombres tous >0, telle que $\sum n\lambda_n^2 < +\infty$. Posons $f = \sum \lambda_n . I_{E_n}$, où $E_1 = D_1$, $E_n = D_n \setminus D_{n-1}$. Nous avons

$$\sum \underset{\sim}{E}^{\bullet}[(\lambda_n I_{E_n}.M)_1^2] = \sum \lambda_n^2 \underset{\sim}{E}^{\bullet}[(I_{E_n}.M)_1^2] \leqq \sum n\lambda_n^2 < +\infty .$$

Les fonctionnelles $I_{E_n}.M$ étant deux à deux orthogonales, il en résulte que $f \in \underline{\underline{L}}^2(M)$, et la fonctionnelle N=f.M est telle que $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[N_1^2]$ soit bornée. Enfin, on vérifie aisément que $\frac{1}{f} \in \underline{\underline{L}}^2(N)$ et que $M = \frac{1}{f}.N$, de sorte que M et N engendrent bien le même sous-espace stable.

PROPOSITION 2.- <u>Pour tout sous-espace stable</u> $\underline{\underline{L}}$ <u>de</u> $\underline{\underline{M}}'$, <u>il existe une suite</u> (N^n) <u>de f.a. engendrant</u> $\underline{\underline{L}}$, <u>telle que les</u> N^n <u>soient deux à deux orthogonales, et que les fonctions</u> $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[(N_t^n)^2]$ <u>soient toutes bornées</u>.

DÉMONSTRATION.- L'application $f \mapsto C^{p,f}$ de $\underline{\underline{C}}_0(E)$ dans $\underline{\underline{M}}'$ est évidemment continue. Soit (f_n) une suite dense dans $\underline{\underline{C}}_0(E)$; le sous-espace stable engendré par les fonctionnelles C^{p,f_n} contient donc toutes les fonctionnelles $C^{p,g}$, $g\in\underline{\underline{C}}_0$: il est donc égal à $\underline{\underline{M}}$'tout entier. Projetons alors sur $\underline{\underline{L}}$ les fonctionnelles C^{p,f_n} ; nous obtenons une suite (F^n) qui engendre $\underline{\underline{L}}$. Rendons cette suite orthogonale par le procédé de Schmidt, ce qui nous donne une suite (M^n). Enfin, on remplace chaque M^n par une f.a. N^n , engendrant le même sous-espace stable, telle que les fonctions $E^{\cdot}[(N^n_t)^2]$ soient bornées (lemme 2).

PROPOSITION 3.- <u>Il existe une fonctionnelle additive</u> $M\in\underline{\underline{M}}'$, <u>telle que les fonctions</u> $E^{\cdot}[M_t^2]$ <u>soient bornées, et possédant la propriété suivante</u>

<u>pour toute loi</u> μ, <u>toute martingale de carré intégrable</u> N <u>pour la loi</u> P^{μ} <u>et la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_t)$, <u>le processus croissant</u> $\langle N,N\rangle$ <u>est absolument continu par rapport à la f.a.</u> $\langle M,M\rangle$.

DÉMONSTRATION.- Reprenons les fonct. add. N^n de la prop.2, et choisissons des nombres λ_n tous $\neq 0$, tels que $\sum_n \lambda_n^2 \cdot \sup_x E^{\cdot}[(N^n_1)^2] <+\infty$. La série $M=\sum_n \lambda_n N^n$ converge alors dans $\underline{\underline{M}}'$, et la fonction $E^{\cdot}[M_1^2]$ est bornée. D'après le th.6 et l'exposé I, la martingale N s'écrit $\sum H_n.N^n$ (série à termes orthogonaux, convergente dans l'espace $\underline{\underline{M}}$ associé à P^{μ}), et on a $\langle N,N\rangle = \sum H_n^2.\langle N^n,N^n\rangle$. Il ne reste plus qu'à remarquer que les processus croissants $\langle N^n,N^n\rangle$ sont évidemment absolument continus par rapport à $\langle M,M\rangle$.

COROLLAIRE.- <u>Il existe une mesure</u> η <u>telle que la relation</u> $f.\eta=0$ <u>entraîne</u> $f.\langle N,N\rangle=0$ <u>pour toute</u> f.a. $N\in\underline{\underline{M}}'$.

DÉMONSTRATION.- Reprenons la f.a. M de la prop. 3, et soit $A=\langle M,M\rangle$; soit (Q_t) le semi-groupe déduit de (P_t) par le changement de temps associé à A . Les fonctions excessives étant les mêmes pour (P_t) et pour (Q_t), ce dernier semi-groupe admet une mesure de référence η, qui répond à la question d'après la prop.3.

§3. DEUX APPLICATIONS.

1.- Une application au mouvement brownien dans $\underset{\sim}{R}^n$.

Nous continuons à suivre MOTOO et WATANABE.

Soit $X=(X^1,\ldots,X^n)$ un mouvement brownien à n dimensions. Les n processus $M^1=X^1-X^1_0,\ldots,\ M^n=X^n-X^n_0$ sont des éléments de $\underline{\underline{M}}'$ deux à deux orthogonaux, et on a $\langle M^i,M^j\rangle_t = \delta_{ij}t$. Soit f une fonction indéfiniment différentiable à support compact ; f appartient au domaine du générateur infinitésimal $A=\frac{1}{2}\Delta$, et la formule du changement de variable dans les intégrales stochastiques continues (exposé II , p.14) nous donne

$$C^f_t = f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t Af\circ X_s ds = \sum_{i=1}^n \int_0^t D^i f\circ X_s dM^i_s$$

a) Soit une f.a. $M\in\underline{\underline{M}}'$ orthogonale à $M^1,\ldots,M^n$; il résulte de cette formule que M est aussi orthogonale à C^f, et on passe de là aux fonctionnelles $C^{p,g}$ ($p>0, g\in\underline{\underline{D}}$, puis $g\in\underline{\underline{C}}_0$), donc M est nulle d'après le th.6. Autrement dit, $M^1,\ldots,M^n$ engendrent $\underline{\underline{M}}'$; mais elles sont orthogonales, de sorte que toute f.a. $N\in\underline{\underline{M}}'$ s'écrit $N^1+\ldots+N^n$, où N^i est la projection de N sur le sous-espace $\underline{\underline{S}}(M^i)$. D'après le th. 5 (démonstration, a)), N^i est de la forme $h_i.M^i$, où $h_i\in\underline{\underline{L}}^2(M^i)$. Par conséquent

$$N = h_1.M^1 + \ldots + h_n.M^n .$$

Cette formule de représentation est due à VENTZEL.

b) Supposons pour simplifier que le mouvement brownien soit issu de 0 (la simplification tient au fait que les M^i sont, dans ce cas, de vraies martingales de carré intégrable). Soit Y une variable aléatoire appartenant à $\underline{\underline{L}}^2(\underset{\sim}{P}^0)$, et soit M une version continue à droite de la martingale $(\underset{\sim}{E}[Y|\underline{\underline{F}}^0_t])$; d'après le th.6, $M^1,\ldots,M^n$ engendrent au sens de l'exp.I l'espace $\underline{\underline{M}}$ relatif à $\underset{\sim}{P}^0$, et on a donc $M - M_0 = H_1.M^1+H_2.M^2+\ldots+H_n.M^n$, où $H_1\ldots H_n$ sont des processus très bien-mesurables. Autrement dit

$$Y = \underset{\sim}{E}[Y] + \int_0^\infty H_{1s}dX^1_s + \ldots + \int_0^\infty H_{ns}dX^n_s .$$

Cette formule de représentation des variables aléatoires relatives au mouvement brownien comme intégrales stochastiques est célèbre. Je suppose qu'elle est due à ITO.

2. Processus à accroissements indépendants et stationnaires.

On sait depuis LÉVY que la formule de LÉVY-KHINTCHINE admet une interprétation probabiliste très intéressante, liée à la structure du processus à accroissements indépendants et stationnaires associé à la loi indéfiniment divisible donnée. La démonstration que LÉVY donne de ce fait ne satisfait pas entièrement aux critères modernes de rigueur, mais il est facile de la justifier à partir de la formule de L-K supposée connue (voir par ex. le livre de DOOB). D'autre part, une démonstration purement probabiliste de la formule de L-K suivant les lignes de LÉVY a été donnée par ITO (voir son cours du Tata Institute). Les parentés entre le sujet que nous traitons ici et les idées de LÉVY (sommes compensées de sauts) étant évidentes, il est naturel de chercher à justifier la construction de LÉVY au moyen de la théorie des martingales. Cela vient d'être fait par KUNITA-WATANABE, mais nous allons en donner encore une autre démonstration, car la leur utilise un paragraphe de leur article (sur la structure de certaines fonctionnelles multiplicatives) qui n'a pas été exposé ici. Est il nécessaire de souligner que ces démonstrations sont beaucoup plus compliquées que les bonnes démonstrations analytiques de la formule de L-K (voir A.FUCHS) et même que les mauvaises ?

Nous commencerons par un résultat auxiliaire, qui étend un théorème donné par ITO dans son cours du Tata Institute, relatif au processus de Poisson.

DÉFINITION.- Soit (P_t) un semi-groupe de HUNT . On dit que (P_t) est un semi-groupe **purement discontinu** si toutes les martingales C^f (voir p. 13) sont des sommes compensées de sauts, quelle que soit la mesure initiale.

L'espace des fonctionnelles sommes compensées de sauts étant un sous-espace stable de $\underline{\underline{M}}'$, et en particulier fermé, on obtient une définition équivalente en remplaçant les C^f par les $C^{p,g}$ ($p>0$, $g\in\underline{\underline{C}}_0$). Par exemple, si les trajectoires des processus associés à

(P_t) sont constantes par morceaux (processus de Poisson, chaînes de Markov), (P_t) est purement discontinu. Plus généralement, si (P_t) est un semi-groupe sur $\underset{\sim}{R}$, dont les trajectoires sont p.s. des fonctions à variation bornée , et si le domaine du générateur infinitésimal de (P_t) contient les fonctions indéfiniment différentiables à support compact, alors (P_t) est purement discontinu, car toute martingale dont les trajectoires sont des fonctions à variation bornée est une somme compensée de sauts.

PROPOSITION 4.- *Soient* E *et* F *deux espaces localement compacts à base dénombrable,* (P_t) *et* (Q_t) *deux semi-groupes de* HUNT *sur* E *et* F *respectivement, tels que* (P_t) *soit purement discontinu.*

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underset{\sim}{P})$ *un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante* $(\underline{\underline{F}}_t)$ *de sous-tribus de* $\underline{\underline{F}}$ *, et soient* (X_t) *et* (Y_t) *deux processus continus à droite définis sur* Ω, *adaptés à la famille* $(\underline{\underline{F}}_t)$, *à valeurs dans* E *et* F *respectivement. On suppose*

a) *Que* (X_t) (*resp.* (Y_t)) *est markovien par rapport à la famille* $(\underline{\underline{F}}_t)$, *et admet* (P_t) (*resp.* (Q_t)) *comme semi-groupe de transition.*

b) *Que les trajectoires de* (X_t) *et* (Y_t) *n'ont p.s. pas de discontinuités communes.*

Alors les processus (X_t) *et* (Y_t) *sont conditionnellement indépendants relativement à la tribu* $\underline{\underline{F}}_0$.

DÉMONSTRATION.- Soit f (resp. g) une fonction qui appartient au domaine du générateur infinitésimal A (resp. B) de (P_t) (resp. (Q_t)). Soit C^f (resp. D^g) le processus

$$f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t Af\circ X_s ds$$

$$\left(\text{ resp. } g\circ Y_t - g\circ Y_0 - \int_0^t Bg\circ X_s ds \right)$$

Ce processus est p.s. continu à droite, et continu là où (X_t) est continu (resp. où (Y_t) est continu) : ces propriétés sont en effet satisfaites pour la réalisation canonique de (P_t) (resp. de (Q_t)), et s'étendent au processus (X_t) (resp. (Y_t)) du fait que la loi $\underset{\sim}{P}$ est complète. D'autre part, C^f et D^g sont des martingales continues à droite pour la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, donc aussi pour la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ obtenue en rendant $(\underline{\underline{F}}_t)$ continue à droite et complète. De plus,

C^f est une somme compensée de sauts, et n'a pas de discontinuité commune avec D^g : d'après une propriété fondamentale des sommes compensées de sauts (exposé I, th.6), C^f et D^g sont orthogonales.

Soient maintenant M et N deux variables aléatoires bornées, mesurables par rapport aux tribus engendrées respectivement par X et par Y. Soient (M_t),(N_t) des versions continues à droite des martingales $(\underset{\sim}{E}[M|\underline{\underline{G}}_t])$,$(\underset{\sim}{E}[N|\underline{\underline{G}}_t])$; d'après le th.6, (M_t) est limite dans $\underline{\underline{M}}$ de combinaisons linéaires d'intégrales stochastiques par rapport aux C^f (cela est vrai en effet pour les processus canoniques, et s'étend donc au cas présent) ; on a un résultat analogue pour (N_t) et les D^g. Il en résulte que (M_t) et (N_t) sont orthogonales. En particulier

$$\underset{\sim}{E}[MN|\underline{\underline{F}}_0] = \underset{\sim}{E}[M|\underline{\underline{F}}_0].\underset{\sim}{E}[N|\underline{\underline{F}}_0]$$

qui est le résultat cherché.

Dans ce qui suit, (X_t) sera un processus à accroissements indépendants et stationnaires, tel que $X_0=0$; plus précisément, (X_t) étant un **processus** de Markov sur $\underset{\sim}{R}$, admettant un semi-groupe de transition fellérien (P_t) constitué par des noyaux de convolution, nous pouvons supposer que X est le processus canonique issu de 0 . En particulier, les trajectoires de X sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Nous introduirons les notations suivantes :

étant donnée une partie borélienne I de la droite, telle que $\bar{I}$ ne contienne pas 0, nous poserons

$$X_t^I(\omega) = \sum_{s\leq t} \Delta X_s(\omega) I_{\{\Delta X_s \in I\}}(\omega)$$

$$N_t^I(\omega) = \sum_{s\leq t} I_{\{\Delta X_s \in I\}}(\omega)$$

Ces sommes ont un sens, car X n'a qu'un nombre fini de sauts appartenant à I sur $[0,t]$. Si $I=[a,b[$ (0<a<b, ou a<b<0), nous écrirons simplement X_t^{ab}, N_t^{ab} .

Le processus (N_t^I) est évidemment un processus à accroissements indépendants et stationnaires, continu à droite, dont les trajectoires croissent par sauts unité : d'après un théorème classique (qui n'est pas difficile à démontrer) , c'est un processus de Poisson . Il en résulte que N_t^I possède des moments de tous les ordres. En particulier, il existe une mesure positive λ et une seule sur $\underset{\sim}{R}\setminus\{0\}$ telle que

$$\lambda([a,b[) = \underset{\sim}{E}[N_1^{ab}] = \mathrm{Var}[N_1^{ab}]$$

Nous dirons que λ est la mesure de LÉVY associée au processus.

Considérons maintenant les deux processus

$$Y_t = X_t^H \quad \text{où } H =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$Z_t = X_t - Y_t$$

Il est clair que ces deux processus sont des processus à accroissements indépendants et stationnaires, donc des processus de HUNT par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ canonique de (X_t) ; d'autre part, les trajectoires de X n'ont qu'un nombre fini de sauts dont l'amplitude dépasse 1, sur tout intervalle fini, de sorte que Y est purement discontinu. La proposition 4 entraîne donc que <u>Y et Z sont indépendants</u>, et nous allons étudier séparément la structure de Y et de Z.

a) <u>Structure de Y</u> .- Soit (a_n) une subdivision dyadique, de pas 2^{-k}, de l'ensemble $[1,+\infty[$; la variable aléatoire $X_1^{1,+\infty}$ est évidemment limite p.s. des variables aléatoires $\sum_n a_n N_1^{a_n a_{n+1}}$ lorsque $k\to\infty$.

Mais le même raisonnement que ci-dessus montre que les v.a. $N^{a_n a_{n+1}}$ sont indépendantes, de sorte que la fonction caractéristique de $X_1^{1,+\infty}$ est limite de $\prod_n \exp[(e^{iua_n}-1)\lambda([a_n,a_{n+1}[)]$; elle est donc égale à $\exp(\int_1^\infty (e^{iua}-1)\lambda(da))$. Autrement dit

$$(1) \quad \log \underset{\sim}{E}[e^{iuY_1}] = \int_{]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[} (e^{iua}-1)\lambda(da)$$

Cette formule signifie que Y est une "somme continue de processus de Poisson indépendants, le processus correspondant aux sauts d'amplitude a ayant un paramètre égal à $\lambda(da)$". La phrase entre guillemets est d'ailleurs susceptible d'un sens parfaitement précis, grâce à la notion de mesure aléatoire poissonnienne, mais nous n'insisterons pas sur ce point. Il est bon de remarquer explicitement que, les processus $(N_t^{1,+\infty})$ et $(N_t^{-\infty,-1})$ étant des processus de Poisson, et étant donc intégrables, la mesure λ est <u>bornée</u> sur les intervalles $[1,\infty[$ et $]-\infty,-1]$.

b) <u>Structure du processus</u> (Z_t).

Soit $n\in\mathbb{N}$; nous poserons

$$Z_t^n = X_t^{I^n} - \mathbb{E}[X_t^{I^n}] = X_t^{I^n} - t.\lambda(I^n)$$

où $I^n =]-1,-\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1[$: Z^n est la somme compensée des sauts de Z dont l'amplitude est comprise entre $\frac{1}{n}$ (inclus) et 1 ; les calculs faits en a) permettent aussitôt de calculer l'espérance de $(Z_t^n)^2$, qui est finie, et égale à la variance de X^{I^n} :

$$\mathbb{E}[(Z_t^n)^2] = \mathbb{E}[\sum_{s\leq t} (\Delta Z_s^n)^2 I_{\{|\Delta Z_s^n| \geq \frac{1}{n}\}}] = \int_{I^n} a^2 t\lambda(da).$$

Notons ensuite que les martingales $Z^{n+1}-Z^n$, sommes compensées de sauts sans discontinuités communes, sont deux à deux orthogonales. Pour vérifier que Z^n converge dans $\underline{\underline{M}}$ lorsque $n\to\infty$, il nous suffit donc de monter que l'espérance du milieu a une limite finie lorsque $n\to\infty$, et nous aurons prouvé du même coup que la mesure $a^2\lambda(da)$ est bornée au voisinage de 0.

Pour établir ce point, choisissons un $v\neq 0$ tel que la fonction caractéristique $\phi(u) = \mathbb{E}[\exp(iuZ_1)]$ ne s'annule pas pour u=v.

Posons
$$U_s = \frac{e^{ivZ_s}}{\phi(v)^s}$$

Le processus (U_s) est une martingale bornée (donc de carré intégrable) sur $[0,t]$, et on a par conséquent

$$\mathbb{E}[\sum_{s\leq t} |\Delta U_s|^2] < \infty$$

Mais $|\Delta U_s|^2 = \frac{1}{(|\phi(v)|^2)^s} |e^{iv\Delta Z_s} - 1|^2$; comme $|\Delta Z_s| \leq 1$, cette quantité majore $K|\Delta Z_s|^2$ (où K est une constante) si v a été choisi strictement inférieur à $1/2\pi$ en valeur absolue ; d'où le résultat.

Désignons alors par $Z_t^{\bullet}$ la limite de Z_t^n (en moyenne quadratique) lorsque $n\to\infty$; le processus $(Z_t^{\bullet})$ est une martingale de carré intégrable (somme compensée de sauts), et aussi un processus à accroissements indépendants purement discontinu, indépendant de (Y_t). Nous avons

$$(2) \qquad \log \underset{\sim}{E}[e^{iuZ_1^{\bullet}}] = \int_{]-1,0[\cup]0,1[} (e^{iua}-1-iua)\lambda(da) \quad .$$

Enfin, le processus $Z_t^c = Z_t - Z_t^{\bullet}$ est un processus à accroissements indépendants à trajectoires continues : il est donc indépendant de Y et de $Z^{\bullet}$, et d'après un théorème classique(*)(qui n'est pas très facile à démontrer , malheureusement), Z_t^c est de la forme $Z_0^c+vt+B_t$, où v est une constante, et (B_t) un mouvement brownien issu de 0, indépendant de Z_0^c. Cela achève la décomposition.

(*) C'est le théorème limite central : $Z_1^c - Z_0^c$ est, pour tout n, la somme des v.a. indépendantes $H_i = Z^c_{\frac{i+1}{n}} - Z^c_{\frac{i}{n}}$, et $\underset{\sim}{P}\{\sup_i |H_i|>\varepsilon\} \to 0$ d'après la continuité uniforme des trajectoires. Si l'on savait que Z_1^c est intégrable, le théorème serait une conséquence facile de la prop.5, exposé II.