Séminaire de probabilités (Strasbourg)

RENZO CAIROLI

Semi-groupes de transition et fonctions excessives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 18-33
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__18_0>

SEMI-GROUPES DE TRANSITION ET FONCTIONS EXCESSIVES

(Exposé de R. Cairoli)

Dans cet exposé il est question de semi-groupes de transition et de fonctions excessives. E désignera un espace localement compact à base dénombrable, $\mathcal{B}_E$ sa tribu borélienne. Un noyau sur E est une application N: $(x,\Gamma) \longrightarrow N(x,\Gamma)$ de $E \times \mathcal{B}_E$ dans R_+, mesurable en x pour Γ fixé et complètement additive en Γ pour x fixé. On dit que N est sous-markovien si $N(x,E) \leqq 1$ pour tout x. μ étant une mesure et f une fonction mesurable bornée, on notera μN la mesure $\Gamma \rightarrow \int N(x,\Gamma)\mu(dx)$ et Nf la fonction $x \rightarrow \int N(x,dy)f(y)$. On dit que N est fortement fellérien si, pour toute f mesurable bornée, Nf est une fonction continue (on en déduit alors que Nf est continue pour toute fonction $\bigcap_x \mathcal{B}_E^{\varepsilon_x N}$-mesurable bornée, en particulier pour toute fonction universellement mesurable bornée). Le noyau composé de deux noyaux A et B sera noté AB: $AB(x,\Gamma) = \int A(x,dy)B(y,\Gamma)$. On appelle semi-groupe de transition sur E une famille $(P_t)_{t>o}$ de noyaux sous-markoviens sur E telle que $P_{s+t} = P_s P_t$ pour tout $s > o$, $t > o$. On dit que (P_t) est faiblement continu si, pour toute fonction f continue et à support compact, on a $\lim_{t \to o} P_t f(x) = f(x)$ (il s'ensuit que l'application $t \longrightarrow P_t f(x)$ est continue à droite en tout $t > o$). Dans ce qui suit, on supposera toujours que les semi-groupes sont faiblement continus. On appelle résolvante de (P_t) la famille de noyaux $(U_p)_{p > o}$ définie par la relation suivante: $U_p f(x) = \int e^{-pt} P_t f(x) dt$, où f est continue et à support compact. Semi-groupes et résolvantes sont dits fortement fellériens si chaque noyau qui les composent a cette propriété. Si le semi-groupe est fortement fellérien, sa résolvante l'est aussi. La réciproque n'est pas vraie (contre-exemple: semi-groupe de translation uniforme sur la droite). Une fonction universellement mesurable positive f est dite surmédiane si $pU_p f \leqq f$ pour tout p. On dit que f est excessive si elle est surmédiane et si $\lim_{p \to \infty} pU_p f = f$. Pour que f soit excessive il faut et il suffit que $P_t f \leqq f$ pour tout t et que $\lim_{t \to o} P_t f = f$. Si f est surmédiane, la limite $\hat{f} = \lim_{p \to \infty} pU_p f$ existe et définit une fonction excessive, appelée la régularisée de f. Si la résolvante est fortement fellérienne, les fonctions excessives sont s.c.i. . Un ensemble est dit de potentiel nul s'il est contenu dans un ensemble universellement mesurable Γ tel que $U_p(x,\Gamma) = 0$ pour tout x et tout p (on seulement pour une valeur de p). Si f est une fonction surmédiane, f ne diffère de sa régularisée $\hat{f}$ que sur un ensemble de potentiel nul. On dit qu'un semi-groupe vérifie l'hypothèse (L) de P.A. Meyer s'il existe une mesure finie sur E (mesure fondamentale) dont les ensembles négligeables sont les ensembles de potentiel nul. L'hypothèse (L) est vérifiée si les fonctions excessives sont s.c.i. donc, en particulier, si la résolvante de (P_t) est fortement fellérienne.

<u>Lemme 1.</u> (P.A. Meyer) – Soient (P_t) un semi-groupe vérifiant (L) et $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions surmédianes uniformément majorées. On peut alors extraire de $\mathfrak{F}$ une suite (f_n) telle que $\inf_n f_n \geq \inf_{f\in\mathfrak{F}} f \geq \widehat{\inf_n f_n}$.

Idée de la démonstration: On suppose, sans restreindre la généralité, que si f, g $\in \mathfrak{F}$, alors $\inf(f,g) \in \mathfrak{F}$ et on choisit une suite décroissante (f_n) telle que $\inf_n \mu(f_n) = \inf_{f\in\mathfrak{F}} \mu(f)$, où μ désigne une mesure fondamentale. On vérifie alors que $\widehat{\inf_n f_n}$ minore tout élément de $\mathfrak{F}$.

En particulier, l'enveloppe inférieure de $\mathfrak{F}$ ne diffère d'une fonction excessive qui la minore que sur un ensemble de potentiel nul. Dans le cas où (P_t) est un semi-groupe de Hunt, cet ensemble est, plus precisément, semi-polaire, pourvu que chaque $f \in \mathfrak{F}$ soit excessive (cela découle d'un résultat de Doob).

Soit Λ un espace métrisable, μ une mesure finie sur sa tribu borélienne. Supposons que toute famille d'ensembles ouverts formant un recouvrement de Λ contienne une famille dénombrable de ces ensembles dont la réunion ne diffère de Λ que d'un ensemble négligeable (Λ est presqu'un espace de Lindelöf).
Appelons partition de Λ de norme α toute suite (A_i) d'ensembles de mesure positive, deux à deux sans point commun et dont la borne supérieure des diamètres soit α, telle que $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\Lambda)$.
Construisons par récurrence la suite $(\mathcal{P}_n)$ de partitions suivante: $\mathcal{P}_o$ est constituée par l'espace Λ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est la partition engendrée par les ensembles de $\mathcal{P}_n$ et par les ensembles d'une partition de norme $\leqq 1/(n+1)$. Plus précisement: soient A_1^n, A_2^n, ... les ensembles constituant $\mathcal{P}_n$. Considérons en chaque point $\lambda \in \Lambda$ la boule ouverte $\{\lambda' : \text{dist}(\lambda,\lambda') < 1/2(n+1)\}$. De la famille de ces boules extrayons une suite (B_i) telle que $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(\Lambda)$.
Les ensembles $A_1^n \cap B_1$, $A_2^n \cap B_1$, ..., $A_1^n \cap B_1^c \cap B_2$, $A_2^n \cap B_1^c \cap B_2$, ..., $A_1^n \cap B_1^c \cap B_2^c \cap B_3$, $A_2^n \cap B_1^c \cap B_2^c \cap B_3$, ..., ... sont deux à deux disjoints et la mesure de leur réunion est $\mu(\Lambda)$. Ceux de mesure positive rangés en une suite (A_i^{n+1}) constituent les ensembles de $\mathcal{P}_{n+1}$.
On notera $S_n(f)$ la somme de Riemann relative à la fonction $f \geqq o$ et à $(\mathcal{P}_n)$: $S_n(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \inf\{ f(\lambda) : \lambda \in A_i^n \} \mu(A_i^n)$.

Lemme 2. - Si $f \geqq o$ est une fonction réelle s.c.i., alors
$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int f d\mu$.

Si G désigne un ouvert de Λ, alors $\lim_{n\to\infty} S_n(1_G) = \mu(G)$ (*), puisque $S_n(1_G)$ est égal à la mesure de la réunion des ensembles de $\mathcal{P}_n$ contenus dans G et puisque ces réunions croissent vers un ensemble G' tel que $\mu(G') = \mu(G)$, lorsque $n\to\infty$, comme il est facile de le vérifier. En outre, les fonctions positives pour lesquelles la conclusion du lemme est vraie forment un cône convexe C et si (g_n) est une suite croissante d'éléments de C dont l'enveloppe supérieure est g, alors $g \in C$. En effet,
$\int g_n(\lambda)\mu(d\lambda) = \lim_{m\to\infty} S_m(g_n) \leqq \liminf_{m\to\infty} S_m(g)$, ce qui entraîne
$\int g(\lambda)\mu(d\lambda) \leqq \liminf_{m\to\infty} S_m(g) \leqq \limsup_{m\to\infty} S_m(g) \leqq \int g(\lambda)\mu(d\lambda)$, donc
$g \in C$. Les ensembles $\{f > \frac{i}{2^n}\}$ étant ouverts, pour chaque n,

$$f_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} 1_{\{f > \frac{i}{2^n}\}}$$

appartient, en vertu de (*), à C. La fonction f donc aussi, puisque $f_n \uparrow f$ lorsque $n\to\infty$.

Théorème 1. - Soit (P_t) un semi-groupe [de Hunt] vérifiant (L). Soit $f: (x,\lambda) \longrightarrow f(x,\lambda)$ une fonction dans $E \times \Lambda$, s.c.i. en λ pour x fixé et surmédiane [excessive] en x pour λ fixé. Alors la fonction $g: x \to \int f(x,\lambda)\mu(d\lambda)$ ne diffère d'une fonction excessive que sur un ensemble de potentiel nul [ensemble semi-polaire. Si, un plus, f est s.c.i. en x pour λ fixé, alors g est une fonction excessive].

On peut supposer que f est bornée. Le cas général en résulte en considérant d'abord inf(f,n) et en faisant tendre ensuite n vers l'infini. D'après le lemme 2, pour tout x

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \inf \{f(x,\lambda): \lambda \in A_i^n\}\mu(A_i^n)\right) = \int f(x,\lambda)\mu(d\lambda) .$$

En vertu du lemme 1, chaque fonction $\inf \{f(x,\lambda): \lambda \in A_i^n\}$ ne diffère d'une fonction excessive qui la minore que sur un ensemble de potentiel nul [ensemble semi-polaire] . Le terme général de la suite du membre de gauche de la dernière égalité possède donc cette même propriété. Le membre de droite la possède donc aussi, puisque la suite est croissante. [Si, en plus, f est s.c.i. en x, alors, d'après le lemme de Fatou, g est s.c.i., donc finement s.c.i. . Soit g' une fonction excessive telle que $g' \leq g$ et que $g' = g$ sauf aux points d'un ensemble semi-polaire. La fonction $g - g'$ est positive, finement s.c.i. et nulle aux points d'un ensemble finement dense dans E. Elle est donc nulle partout, ce qui prouve que g est excessive].

Soient E et F deux espaces localement compacts à base dénombrable, A et B deux noyaux sous-markoviens respectivement sur E et F. L'application $((x,y),\Gamma)\longrightarrow(\varepsilon_x A\otimes\varepsilon_y B)(\Gamma)$ de $(E\times F)\times\mathcal{B}_{E\times F}$ dans R_+ est un noyau sous-markovien sur $E\times F$: on l'appellera noyau produit de A et B et on le notera $A\otimes B$.

Théorème 2. - Soit f une fonction réelle bornée dans $E\times F$ telle que l'intégrale itérée $g(x,y) = \int A(x,du)\int B(y,dv)f(u,v)$ existe pour tout $(x,y)\in E\times F$. Si A et B sont fortement fellériens, alors la fonction $(x,y)\longrightarrow g(x,y)$ est continue.

D'après le caractère fortement fellérien de A, pour tout $y\in F$, l'application partielle $x\longrightarrow g_y(x) = g(x,y)$ est continue. On démontrera que, pour tout $y_o\in F$, g_{y_n} converge uniformément vers g_{y_o} dans toute partie compacte de E, lorsque y_n tend vers y_o dans F. Cela achèvera la démonstration (cf. Bourbaki, Topologie générale, chap. 10, § 3, théorème 3). Désignons par h_y la fonction $u\longrightarrow\int B(y,dv)f(u,v)$. En vertu du caractère fortement fellérien de B, on a $\lim\limits_{n\to\infty} h_{y_n} = h_{y_o}$. Posons

$$h'_n = \inf_{m\geq n} h_{y_m}\,,\quad h''_n = \sup_{m\geq n} h_{y_m}\,.$$

On a $h'_n \uparrow h_{y_o}$, $h''_n \downarrow h_{y_o}$ et, par conséquent, $Ah'_n \uparrow Ah_{y_o}$, $Ah''_n \downarrow Ah_{y_o}$. Les fonctions intervenant dans ces deux dernières limites étant continues, la convergence a lieu uniformément dans toute partie compacte de E. Les inégalités

$$Ah'_n \leqq Ah_{y_n} \leqq Ah''_n$$

entraînent finalement que Ah_{y_n} converge vers Ah_{y_o} uniformément dans toute partie compacte de E, ce qui achève la démonstration, puisque $g_y = Ah_y$.

Corollaire. - Si les noyaux A et B sont fortement felleriens, le noyau produit $A \otimes B$ l'est aussi.

Soient (P_t) et (Q_t) deux semi-groupes de transition respectivement sur E et F. La famille de noyaux $(P_t \otimes Q_t)$ est un semi-groupe de transition sur $E \times F$: on l'appellera semi-groupe produit de (P_t) et (Q_t) et on le notera (R_t). Les résolvantes de (P_t), (Q_t) et (R_t) seront respectivement désignées par (U_p), (V_p) et (W_p). Une fonction $f: (x,y) \longrightarrow f(x,y)$ dans $E \times F$ sera dite séparément excessive si elle est excessive en x pour y fixé et excessive en y pour x fixé. De même on définit une fonction séparément surmédiane.

<u>Théorème 3.</u> - Si les résolvantes (U_p) et (V_p) sont fortement fellériennes, toute fonction séparément excessive f est s.c.i. et excessive pour le semi-groupe produit (R_t).

Démontrons d'abord que f est s.c.i. . En vertu du lemme de Fatou, la fonction $u \longrightarrow \int qV_q(y,dv) f \wedge n(u,v)$ est s.c.i. . L'intégrale itérée $g(x,y) = \int pU_p(x,du) \int qV_q(y,dv) f \wedge n(u,v)$ a donc un sens, ce qui entraîne que la fonction $(x,y) \longrightarrow g(x,y)$ est continue (théorème 2) et, par conséquent, que l'application

$$(x,y) \longrightarrow \int pU_p(x,du) \int qV_q(y,dv) f(u,v)$$

est s.c.i., pour tout $p > o$, $q > o$. La semi-continuité de f en résulte, si on fait tendre d'abord q et ensuit p vers l'infini. Il reste donc seulement à démontrer que f est excessive. On a d'abord $R_t f(x,y) = \int P_t(x,du) \int Q_t(y,dv) f(u,v) \leqq f(x,y)$. En outre, (x,y) étant fixé, $\int P_s(x,du) \int Q_t(y,dv) f(u,v)$ est une fonction décroissante de s et de t, ce qui entraîne $\lim\limits_{t \to o} R_t f(x,y) =$ $= \lim\limits_{s \to o} \int P_s(x,du) (\lim\limits_{t \to o} \int Q_t(y,dv) f(u,v)) = f(x,y)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Lemme 3.</u> - Toute fonction surmédiane s.c.i. est excessive.

Soit f une fonction surmédiane s.c.i. . Alors f est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (f_n) de fonctions continues et à support compact. En outre, pour tout n, on a $\lim\limits_{p\to\infty} pU_p f_n(x) = f_n(x)$, ce qui entraîne $\lim\limits_{p\to\infty} pU_p f(x) \geqq f(x)$. L'inégalité inverse résulte de ce que f est surmédiane.

Théorème 4. - Supposons que (U_p) et (V_p) soient fortement fellériennes. Soit $f: (x,y) \to f(x,y)$ une fonction séparément surmédiane. Alors:

1) la régularisée s.c.i. g de f est séparément excessive (donc excessive pour le semi-groupe produit (R_t));

2) si, en plus, f est s.c.i. en y pour chaque x, g ne diffère de f qu'aux points d'un ensemble dont les coupes suivant y sont de potentiel nul.

Pour démontrer 1), on utilisera uniquement le fait que chaque noyau des deux résolvantes applique l'espace des fonctions continues à support compact dans l'espace des fonctions continues (résolvantes fellériennes). Fixons par exemple y. Il suffira de montrer, d'après le lemme 3, que $\int pU_p(x,du)g(u,y) \leqq g(x,y)$ pour tout x, ou encore, que $\int pU_p(x,du)h(u,y) \leqq g(x,y)$, pour toute fonction continue et à support compact $h \leqq g$. Or, on a $h \leqq f$, donc le premier membre est majoré par $\int pU_p(x,du)f(u,y) \leqq f(x,y)$ et par conséquent, par définition de la régularisée s.c.i., il suffit de montrer que la fonction $(x,y) \to \int U_p(x,du)h(u,y)$ est continue pour toute fonction h continue et à support compact. C'est vrai si h est de la forme particulière $\sum_{i=1}^{m} f_i(x)g_i(y)$, où les f_i et g_i sont des fonctions continues à support compact. Cette propriété s'étend à un h quelconque par convergence uniforme, ce qui démontre 1). D'après le théorème 1, l'intégrale itérée $\int pU_p(x,du)\int qV_q(y,dv)f(u,v)$ existe pour tout (x,y). Elle est, en outre, une fonction s.c.i. de (x,y) (on considère d'abord $f \wedge n$, qui satisfait aux mêmes hypothèses que f, et on fait tendre ensuite n vers l'infini). Comme f est excessive en y pour x fixé (lemme 3), on a :

$$\lim_{p\to\infty} \left(\lim_{q\to\infty} \int pU_p(x,du)\int qV_q(y,dv)f(u,v)\right) = \lim_{p\to\infty} \int pU_p(x,du)f(u,y).$$

La fonction $(x,y) \to h(x,y) = \lim_{p\to\infty} \int pU_p(x,du)f(u,y)$ ne diffère de f que sur un ensemble dont chaque coupe suivant y est de potentiel nul. En outre, h est s.c.i., donc, par définition de la régularisée s.c.i., $h \leqq g$, ce qui achève la démonstration.

<u>Théorème 5</u> (V. Avanissian). - Toute fonction f dans un ouvert G de $R^p \times R^q$ $(p,q \geqq 2)$, séparément hyperharmonique et localement minorée, est hyperharmonique.

On peut se limiter à considérer le cas où G est un produit de deux boules. Le théorème résulte du théorème 3, si l'on considère les semi-groupes des mouvements browniens respectivement dans R^p et R^q, tués aux frontières des deux boules.

Les théorèmes suivants traiterons de la question de la permanence de (L) dans l'opération produit de deux semi-groupes. Le caractère (L) n'est pas en général permanent, même si les résolvantes sont fortement fellériennes (contre-exemple: produit de deux semi-groupes de translation uniforme). On démontrera ci-dessous que, si au moins un des deux semi-groupes est fortement fellérien, alors (L) passe au produit. On utilisera la terminologie suivante: μ et ν étant deux mesures respectivement sur E et F, on dira qu'une fonction réelle dans $E \times F$ est (μ,ν)-négligeable si elle est nulle partout sauf aux points d'un ensemble dont les coupes suivant x et y sont respectivement ν- et μ-négligeables, pour tout $x \in E$, $y \in F$. On dira qu'un sous-ensemble de $E \times F$ est de potentiel (μ,ν)-négligeable s'il est contenu dans un ensemble universellement mesurable Δ tel que, pour tout p, $W_p 1_\Delta$ soit (μ,ν)-négligeable.

<u>Théorème 6.</u> - Soit η une mesure fondamentale pour (P_t), θ une mesure fondamentale pour (Q_t). Supposons que la résolvante (U_p) soit fortement fellérienne. Alors les ensembles $(\eta \otimes \theta)$-négligeables sont exactement les ensembles de potentiel (η, θ)-négligeable.

En effet, soient $\{x_n\}$ un ensemble dénombrable dense dans E, Δ un ensemble universellement mesurable tel que $(U_p \otimes V_p)((x,y),\Delta) = o$ pour tout (x,y). Posons $\Gamma_n = \{y' : U_p(x_n, \Delta^{y'}) \neq o\}$, $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$. Pour chaque y, $(U_p \otimes V_p)((x_n,y), \Delta) = o$ pour tout n, donc $V_p(y, \Gamma_n) = o$ pour tout n, ce qui entraîne $V_p(y,\Gamma) = o$ et, par conséquent, $\theta(\Gamma) = o$. En outre, si $y' \in \Gamma^c$, on a $U_p(x_n, \Delta^{y'}) = o$ pour tout n, donc, d'après le caractère fortement fellérien de U_p, $U_p(x, \Delta^{y'}) = o$ pour tout x, ce qui entraîne $\eta(\Delta^{y'}) = o$ pour θ-presque tout y' et, par conséquent, $(\eta \otimes \theta)(\Delta) = o$. Réciproquement, un ensemble $(\eta \otimes \theta)$-négligeable est contenu dans un ensemble borélien Δ $(\eta \otimes \theta)$-négligeable. Comme $\eta(\Delta^{y'}) = o$ pour θ-presque tout y', il résulte que $U_p(x, \Delta^{y'}) = o$ pour $\varepsilon_y V_p$-presque tout y'. D'où $(U_p \otimes V_p)((x,y), \Delta) = o$, pour tout (x,y) et tout p. Désignons maintenant par I_E et I_F les noyaux identité respectivement sur E et F et supposons que nous ayions pu montrer, pour tout p, l'égalité:

$$(\ast) \qquad U_p \otimes V_p = ((U_p \otimes I_F) + (I_E \otimes V_p))W_{2p}.$$

Considérons un ensemble $(\eta \otimes \theta)$-négligeable. Cet ensemble est contenu dans un ensemble borélien $\Delta(\eta \otimes \theta)$-négligeable. D'après ce qui précède, $(U_p \otimes V_p)1_\Delta = o$ pour tout p. L'égalité $(\ast)$ entraîne alors que $(U_p \otimes I_F)W_{2p}1_\Delta = o$ pour tout p. Comme η est une mesure fondamentale pour (P_t), il s'ensuit que, y et p étant fixés, $W_p((x,y),\Delta) = o$ pour η-presque tout x. De même, pour x et p fixés, $W_p((x,y),\Delta) = o$ pour θ-presque tout y, ce qui démontre que Δ est un ensemble de potentiel (η,θ)-négligeable. Réciproquement, si Δ désigne un ensemble universellement mesurable de potentiel (η,θ)-négligeable, pour chaque y, p, $W_p((x,y),\Delta) = o$ pour η-presque tout x. Cela entraîne $(U_{p/2} \otimes I_F)W_p1_\Delta = o$, puisque η est une mesure fondamentale pour (P_t). De même, $(I_E \otimes V_{p/2})W_p1_\Delta = o$, donc, en vertu de $(\ast)$, $(U_{p/2} \otimes V_{p/2})1_\Delta = o$. D'après la première partie de la démonstration, Δ est donc $(\eta \otimes \theta)$-négligeable. Il reste encore à démontrer $(\ast)$. Soit h une fonction mesurable bornée dans $E \times F$.

On a alors:

$$(U_p \otimes V_p)h(x,y) = \int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-p(t+\tau))(P_t \otimes Q_\tau)h(x,y)dtd\tau =$$

$$= \int_0^\infty\Big(\int_t^\infty \exp(-p(t+\tau))(P_t \otimes Q_\tau)h(x,y)d\tau\Big)dt +$$

$$+ \int_0^\infty\Big(\int_\tau^\infty \exp(-p(t+\tau))(P_t \otimes Q_\tau)h(x,y)dt\Big)d\tau .$$

Le premier terme du membre de droite de l'égalité est égal à:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-p(2t+\tau))(P_t \otimes Q_{t+\tau})h(x,y)dtd\tau =$$

$$= \int_0^\infty \exp(-p\tau)Q_\tau\Big(\int_0^\infty \exp(-2pt)(P_t \otimes Q_t)hdt\Big)(x,y)d\tau =$$

$$= (I_E \otimes V_p)W_{2p}h(x,y).$$

On vérifie de manière analogue que le deuxième terme est égal à $(U_p \otimes I_F)W_{2p}h(x,y)$, ce qui achève la démonstration.