Jean-Pierre Igot

Un théorème de Linnik

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 111-122
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__111_0>

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités

Février 1967

UN THÉORÈME DE LINNIK

(par J.P. Igot)

Yu V. LINNIK a démontré, entre 1956 et 1960, plusieurs théorèmes concernant la décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles. Cependant les démonstrations sont souvent longues et délicates (1).

Récemment I.V. OSTROVSKIY a repris la question et montré que ces théorèmes étaient vrais pour une classe plus vaste de fonctions : celle des fonctions entières à crête , ce qui a permis d'obtenir des démonstrations plus simples.

Le théorème proposé ici traite de la factorisation de la composition d'une loi de Laplace-Gauss et d'une loi de Poisson (2).

1 . RAPPELS ET DEFINITIONS .

Soit X une variable aléatoire (v.a.) et φ sa fonction caractéristique (f.c.); φ est la transformée de Fourier de la loi de probabilité de X.

1.1.- Une f.c. est dite indéfiniment divisible (f.c.i.d.) si, pour tout nombre réel positif d, $\varphi^d(t)$ est une f.c. . La loi associée est dite indéfiniment divisible (l.i.d.).

On a une représentation canonique de telles f. c., due à Lévy et Khintchine :

$$(1) \quad \operatorname{Log} \varphi(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_R \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2} \, d\mu(u)$$

(γ, σ réels, μ mesure positive bornée sur $\mathbb{R}$, ne chargeant pas l'origine).

1.2. - Si I désigne la classe des l. i. d. , on désigne par I_o celle des l. i. d. qui n'ont que des composantes elles-mêmes indéfiniment divisibles.

Si φ est la f. c. d'une telle loi, et si l'on a $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$ où φ_1, φ_2 sont des f. c., alors φ_1 et φ_2 sont des f. c. i. d. .

On a le

1.3. - Théorème de Cramer (3).

Les lois normales sont dans I_o

et

1.4. - Théorème de Raïkov (3).

Les lois de Poisson sont dans I_o

Linnik a établi le théorème suivant, qui contient les deux précédents :

1.5. - Théorème de Linnik (1).

La composition d'une loi normale et d'une loi de Poisson est dans I_o.

C'est un théorème un peu plus général, démontré par Ostrovskiy (2), qui fait l'objet du présent exposé.

2 . INTRODUCTION DES FONCTIONS DE LA VARIABLE COMPLEXE .

2. 1. - Une f. c. φ dont la série de Taylor au voisinage de l'origine admet un rayon de convergence R strictement positif, peut se prolonger analytiquement dans une bande $\mathcal{B} = \mathbb{R} + i\,\Gamma$ (Γ voisinage réel de l'origine), du plan complexe, son expression dans $\mathcal{B}$ s'obtenant en remplaçant t réel par t complexe dans l'intégrale de transformation de Fourier.

2. 2. - φ satisfait dans $\mathcal{B}$ à la propriété de crête :

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant \varphi(iy) \qquad \begin{matrix} x+iy \in \mathcal{B} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

2. 3. - Si, de plus $\mathcal{B} = \mathbb{C}$, la f. c. est entière et l'on pourra utiliser les propriétés des fonctions entières à crête pour démontrer des théorèmes sur les f. c.

2. 4. - Comme enfin les f. c. entières se factorisent en f. c. également entières (théorème de Raïkov) Ostrovskiy établit le théorème suivant, qui contient le théorème de Linnik.

2. 5. - Théorème :

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions entières, à crête, telles que $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1$ et vérifiant :

$$(1)\ \varphi_1(t)\,\varphi_2(t) = \varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1) + i\beta t - \gamma t^2} \qquad \begin{matrix} \lambda, \gamma \text{ positifs} \\ \beta \text{ réel} \end{matrix}$$

alors

$$\varphi_m(t) = e^{\lambda_m(e^{it}-1) + i\beta_m t - \gamma_m t^2} \qquad \begin{matrix} \lambda_m, \gamma_m \text{ positifs} \\ \beta_m \text{ réel} \end{matrix}$$

$$m = 1, 2$$

Pour la démonstration de ce théorème, nous utiliserons deux lemmes sur les fonctions entières, qui ont leur intérêt propre.

2.6. - Lemme

Soit f une fonction holomorphe de z pour $\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \beta$ telle que

1) $|f(z)| \leqslant K e^{|z|^{\rho}}$ pour $\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \beta$

2) $|f(x e^{i\alpha})| \leqslant K$ où $\begin{cases} \rho < \dfrac{\pi}{\beta - \alpha} \\ K \text{ est une constante positive} \end{cases}$

3) $|f(x e^{i\beta})| \leqslant K$

alors f(z) est bornée pour tout z : $\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \beta$

Démonstration :

a) Soit D le domaine défini par $\begin{array}{l} \alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \beta \\ |z| \leqslant R \end{array}$

et $\omega(z, \overset{\frown}{AB}, D)$ la solution du problème de Dirichlet dans D avec les conditions limites

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{sur l'arc } \overset{\frown}{AB} \\ 0 & \text{sur } \partial D - \overset{\frown}{AB} \end{cases}$$

$\omega(z, \overset{\frown}{AB}, D)$ est la mesure harmonique, en z, de $\overset{\frown}{AB}$ par rapport à D.

On a :

$$\omega(z, \overset{\frown}{AB}, D) = \frac{2}{\pi}\theta \qquad \theta = \operatorname{Arg} \frac{(e^{i\alpha}R)^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} - z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}{(e^{i\alpha}R)^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} + z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}$$

(le résultat est immédiat sur le demi-cercle correspondant à $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ et l'on utilise l'application : $z \longrightarrow Z = z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} e^{-\frac{i\alpha\pi}{\beta-\alpha}}$

qui transforme le domaine D en un demi-cercle.

b) La fonction sous harmonique $\operatorname{Log}|f(z)|$ est, par hypothèse, majorée par $m = \operatorname{Log} K$ sur $\{\partial D - \overset{\frown}{AB}\}$ et par $M = \operatorname{Log} K + R^{\rho}$ sur $\overset{\frown}{AB}$.

c) La fonction harmonique $M\omega + m(1-\omega)$ est égale à m sur $\partial D - \widehat{AB}$ et M sur $\widehat{AB}$, donc majore $\text{Log}|f(z)|$ sur la frontière de D. D'après le principe du maximum, elle majore $\text{Log}\,|f(z)|$ dans tout le domaine D.

d) On voit immédiatement que, pour R tendant vers l'infini,

$$\theta = 0\left(\frac{1}{R^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}\right)$$

il résulte alors de c) que

$$\text{Log}\,|f(z)| = 0\left(\frac{R^{\rho}}{R^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}\right) \qquad R \longrightarrow \infty \qquad z \in D$$

par suite f (z) est bornée pour tout z :

$$\alpha \leqslant \text{Arg}\, z \leqslant \beta$$

Corollaire 2.7. -

Soit f (z) une fonction entière, bornée sur l'axe réel et à croissance lente, c. à. d. $|f(z)| = 0(|z|^n)$ $\quad |z| \longrightarrow \infty$ pour un certain n, alors f est constante.

Démonstration :

On applique

1) la propriété 2.6. - pour $\alpha = 0$ et $\beta = \pi$ puis pour $\alpha = \pi$ et $\beta = 2\pi$ en prenant $\rho < 1$.

2) le Théorème de Liouville

2.8. - Lemme

Soit f (z) une fonction entière, périodique de z, de période T et satisfaisant à :

$$(2) \quad |f(z)| \underset{|z|\longrightarrow\infty}{=} 0(e^{L|z|}) \qquad L \text{ positif}$$

<u>alors le développement de Fourier de</u> f <u>ne comprend qu'un nombre fini de termes et l'on a</u> :

$$f(z) = \sum_{k=-\omega}^{k=\omega} c_k \, e^{\frac{2\pi i z k}{T}} \qquad \text{avec} \quad \omega = \left[\frac{|T|\, L}{2\pi}\right]$$

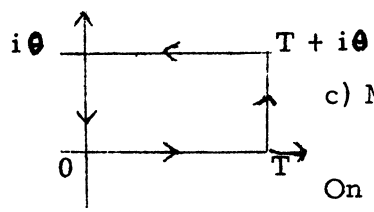
<u>Démonstration</u> :

a) La période T est complexe, mais on se ramène à T positif en prenant $f_1(z) = f(z\,e^{i\alpha})$ avec $T = |T|\,e^{i\alpha}$. f_1 est alors entière périodique de période $|T|$ et vérifie (2).

b) Pour $T > 0$ et x réel, on a

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{\frac{2\pi i x k}{T}} \qquad \text{et} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-\frac{2\pi i x k}{T}}\, dx$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots.$



c) Montrons que c_k est nul pour $|k| > \omega$

On intègre la fonction entière $f(z)\, e^{-\frac{2\pi i z k}{T}}$ pour k fixé sur le contour D ci-contre ($\theta \neq 0$) et, en tenant compte de la périodicité de f, on obtient

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x + i\theta)\, e^{-\frac{2\pi i x k}{T}} \, e^{\frac{2\pi k \theta}{T}} \, dx$$

et en vertu de (2)

$$|c_k| \leq K\, e^{L(T+|\theta|)}\, e^{\frac{2\pi k \theta}{T}} \qquad \text{pour } |\theta| \text{ grand}$$

soit alors $\quad k > \omega$

$$\frac{2\pi k}{T} = L + \eta \qquad \eta > 0$$

faisons tendre θ vers $-\infty$

$$|c_k| \leqslant K\, e^{L\,(T+|\theta|)}\, e^{-L|\theta|}\, e^{-\eta\,|\theta|}$$

d'où

$$c_k = 0$$

De même, supposons $k < -\omega$, et posons

$$\frac{2\pi k}{T} = -L - \eta$$

faisons tendre θ vers $+\infty$, il vient

$$c_k = 0$$

d) les fonctions $f(z)$ et $\sum_{k=-\omega}^{+\omega} c_k e^{\frac{2\pi z k}{T}}$ sont entières et coïncident sur l'axe réel, donc

$$f(z) = \sum_{-\omega}^{+\omega} c_k e^{\frac{2\pi i z k}{T}} \qquad z \in \mathbb{C}$$

3 . DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.5. -

a) Il résulte de (1) que φ_1 et φ_2 n'ont pas de zéros.

$$\text{Soit } \varphi_1(t) = e^{\psi_1(t)} \qquad t \in \mathbb{C},\ \psi_1(0) = 0$$

$$\text{Posons} \qquad g(z) = \psi_1(-iz) \quad z \in \mathbb{C}$$

nous allons établir que :

$$g(z) = \lambda_1 (e^z - 1) + \gamma_1 z^2 + \beta_1 z$$

$$\lambda_1, \gamma_1 \text{ positifs}$$

$$\beta_1 \quad \text{réel}$$

b) soit $u(x,y) = \mathrm{Re}\left\{ g(x+iy) \right\}$ $\quad x, y$ réels

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \left[g(x+iy) + g(x-iy) \right]$$ puisque g est réel pour z réel

On a

$$(3) \quad 0 \leqslant u(x,0) - u(x,y) \leqslant 2\lambda e^x \sin^2 \frac{y}{2} + \gamma y^2$$

en effet, la propriété de crête permet d'écrire :

$$\frac{\varphi_1(i\tau)}{\varphi_1(\sigma+i\tau)} = \frac{\varphi_2(\sigma+i\tau)}{\varphi_2(i\tau)} \cdot \frac{\varphi(i\tau)}{\varphi(\sigma+i\tau)}$$

$$1 \leqslant \left|\frac{\varphi_1(i\tau)}{\varphi_1(\sigma+i\tau)}\right| \leqslant e^{2\lambda e^{-\tau} \sin^2\frac{\sigma}{2} + \gamma\sigma^2}$$

$$0 \leqslant \psi_1(i\tau) - \operatorname{Re} \psi_1(\sigma+i\tau) \leqslant 2\lambda e^{-\tau} \sin^2\frac{\sigma}{2} + \gamma\sigma^2$$

On pose alors :
$$\sigma = y$$
$$\tau = -x$$

c) $|u(x,0)| \leqslant \lambda e^x + \gamma x^2 + K|x|$

En effet φ_2 étant une fonction entière à crête, $b(\tau) = \psi_2(i\tau)$ $(\tau \in \mathbb{R})$ est une fonction convexe de τ (th. de Dugué) et b (0) = 0 ; par suite, si α désigne la dérivée de $b(\tau)$ à l'origine, on a

$$b(\tau) \geqslant -|\alpha|\,|\tau|$$

mais $\psi_1(i\tau) + \psi_2(i\tau) = \lambda(e^{-\tau} - 1) + \gamma\tau^2 - \beta\tau$

d'où $|\psi_1(i\tau)| \leqslant \lambda e^{-\tau} + \gamma\tau^2 + |\beta|\,|\tau| + |\alpha|\,|\tau|$

et l'on pose $\tau = -x$

d) Il résulte de b) et c) que

(4) $|u(x,y)| \leqslant 3\lambda e^x + \gamma(x^2+y^2) + K|x|$

e) Montrons alors que :

(5) $|g(z)| = 0\,(|z|e^{\operatorname{Re} z} + |z|^3)$ $\quad |z| \longrightarrow \infty$

En effet, la formule de Schwartz (où $|\xi|<1$)

$$g(z+\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,(g(z+e^{i\varphi}))\,\frac{e^{i\varphi}+\xi}{e^{i\varphi}-\xi}\,d\varphi + i\,\mathrm{Im}[g(z)]$$

donne, en dérivant par rapport à ξ au point $\xi = 0$,

$$g'(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x+\cos\varphi\,,\ y+\sin\varphi)\,e^{-i\varphi}\,d\varphi \begin{pmatrix} z = x+iy \\ x,\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$$|g'(z)| = 0\,(e^{\mathrm{Re}\,z} + |z|^2) \qquad |z| \to \infty \quad \text{d'après (4)}$$

mais $\quad g(z) = z\displaystyle\int_0^1 g'(zt)\,dt$

donc $\quad |g(z)| \leqslant 0\,(|z|\,e^{\mathrm{Re}\,z} + |z|^3) \qquad |z| \longrightarrow \infty$

f) Posons, pour <u>x complexe</u>, et y réel

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\,(g(x+iy) + g(x-iy))$$

il résulte alors de (5) que

$$(6) \qquad u(x,y) = 0\,(|x|\,e^{\mathrm{Re}\,x} + |x|^3) \qquad \begin{array}{c} |x| \longrightarrow \infty \\ y \text{ fixé} \end{array}$$

<u>montrons alors que $\chi(x) = u(x,0) - u(x,2\pi)$ $(x \in \mathbb{C})$ est constante</u>

on a $\quad \chi(x)$ bornée pour x réel d'après (3)

$|\chi(x)| = 0\,(|x|^3)$ pour x imaginaire pur, $|x| \longrightarrow \infty$

$|\chi(x)| = 0\left(e^{\frac{3}{2}|x|}\right)$ $(|x|\to\infty)$ d'après (6)

Considérons alors, pour $\mathrm{Re}\,x \geqslant 0$, la fonction

$$V(x) = \frac{\chi(x)}{(x+1)^3}$$

Dans chacun des domaines $0 \leqslant \mathrm{Arg}\,x \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arg}\,x \leqslant 0$, V (x) satisfait aux conditions du lemme 2.6. -

$V(x)$ est donc bornée pour $\operatorname{Re} x \geqslant 0$

on applique le même raisonnement, pour $\operatorname{Re} x \leqslant 0$, à la fonction

$$W(x) = \frac{\chi(x)}{(x-1)^3}$$

par suite

$$|\chi(x)| = 0(|x|^3) \qquad |x| \longrightarrow \infty$$

mais

$$\chi(x) \quad \text{bornée pour } x \text{ réel}$$

χ est donc constante d'après le corollaire 2.7. -

$$g) \; -2\chi(z) = g(z+2\pi i) + g(z-2\pi i) - 2g(z) = C$$

donc la fonction $g_1(z) = g(z) - g(z-2\pi i) - \dfrac{Cz}{2\pi i}$

est entière, périodique de période $2\pi i$, et satisfait à :

$$|g_1(z)| = 0(e^{3|z|/2}) \qquad |z| \longrightarrow \infty$$

on peut lui appliquer le lemme 2.8. :

$$g_1(z) = A_o + A_1 e^{z} + A_2 e^{-z}$$

mais pour x réel, tendant vers $-\infty$, on a $|g(x)| = 0(|x|^3)$ d'après (6), il en sera de même pour g_1, donc $A_2 = 0$ et

$$g(z) - g(z-2\pi i) = B_o + B_1 z + B_2 e^{z}$$

h) la fonction

$$g_2(z) = g(z) - \left(\frac{B_o + i\pi B_1}{2\pi i}\right) z - \frac{B_1 z^2}{4\pi i} - \frac{B_2}{2\pi i} \cdot z e^{z}$$

est alors également entière, périodique, de période $2\pi i$ et satisfait à

$$|g_2(z)| = 0(e^{3|z|/2}) \quad |z| \longrightarrow \infty$$

le lemme 2.8. - permet donc encore d'écrire

$$g_2(z) = C_o + C_1 e^z$$

et

$$g(z) = D_o + D_1 z + D_2 z^2 + D_3 e^z + D_4 z e^z$$

i) α) $g(z)$ est réel pour z réel, donc D_o, D_1, D_2, D_3, D_4 sont réels

β) $g(0) = 0$ donc $D_3 = -D_o$

γ) $u(x, 0) = D_o + D_1 x + D_2 x^2 - D_o e^x + D_4 x e^x$

donc $D_4 = 0$ d'après c)

δ) $u(x,0) - u(x,y) = D_2 y^2 - 2 D_o e^x \sin^2 \frac{y}{2}$

alors, pour $y = 2\pi$ on déduit de (3) que $D_2 \geqslant 0$

pour $y = \pi$, $x \to \infty$ on déduit de (3) que $D_o \leqslant 0$

soit alors $\lambda_1 = - D_o$

$\beta_1 = D_1$

$\gamma_1 = D_2$

BIBLIOGRAPHIE

(1) Y. V. LINNIK — Décomposition des lois de Probabilités
Edition française (Gauthier - Villars)

(2) I. V. OSTROVSKIY — Uspeki Math. Nauk
(20) 1965

(3) E. LUKACS — Fonctions caractéristiques
(Dunod éditeur).

---oo0oo---