PAUL-ANDRÉ MEYER

Les inégalités de Burkholder en théorie des martingales, d'après Gundy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 163-174

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__163_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1967/68

LES INÉGALITÉS DE BURKHOLDER EN THÉORIE DES MARTINGALES (d'après GUNDY)

(P.A.Meyer)

Nous ne nous occuperons ici que de martingales à temps discret . Le lecteur pourra, s'il le désire, se borner à lire ce qui concerne les intégrales stochastiques de processus " prévisibles" - l'exposé est alors un peu plus simple, et on ne perd pas grand chose, car les intégrales stochastiques de processus non prévisibles n'ont reçu jusqu'à maintenant aucune application.

Les démonstrations ci-dessous sont, pour la plupart, dues à GUNDY : seule la terminologie a été modifiée, pour la mettre en accord avec celle que nous avons utilisée l'an dernier dans les exposés sur les intégrales stochastiques.

§ 1. DÉFINITIONS GÉNÉRALES

NOTATIONS.- $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underset{\sim}{P})$ est un espace probabilisé complet, muni d'une suite croissante $(\underline{\underline{F}}_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$; nous supposons comme d'habitude que $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles $\underset{\sim}{P}$-négligeables . Le mot " processus" signifie dans cet exposé " processus réel adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_n)$". Un processus (V_n) sera dit <u>prévisible</u> (par analogie avec le cas continu) si de plus V_n est $\underline{\underline{F}}_{n-1}$-mesurable pour tout $n>0$.

Deux processus X et Y seront dits <u>indistinguables</u> si $X_n=Y_n$ p.s. pour tout n. Pour ne pas alourdir le langage, nous ferons semblant d'ignorer la différence entre un processus et une classe de processus indistinguables.

Nous dirons qu'un processus $X=(X_n)$ est <u>intégrable</u> si $X_n\in L^1$ pour tout n, et que X est <u>borné dans L^p</u> si $\sup_n \|X_n\|_p<+\infty$ ($p \geq 1$) ; cette quantité sera dans tous les cas désignée par $\|X\|_p$. Si X est un processus, nous poserons $X^* = \sup_n |X_n|$.

Notations relatives aux accroissements. Si $X=(X_n)$ est un processus, nous désignerons par DX le processus défini par

$$(DX)_0 = X_0 \quad , \ (DX)_n = X_n - X_{n-1} \text{ pour } n>0 \quad .$$

Si V et X sont deux processus, nous noterons respectivement VX (ou V.X) et V*X les processus définis par

$$(V.X)_n = V_n X_n$$

$$(V*X)_n = V_0 X_0 + V_1(X_1 - X_0) + \dots + V_n(X_n - X_{n-1})$$

Autrement dit, V*X est l'unique processus Y satisfaisant à DY= V.DX . Nous dirons que V*X est l'intégrale de V par rapport à X (cette notion, triviale dans le cas discret, est beaucoup plus difficile à définir dans le cas continu !).

Si X et Y sont deux processus, nous noterons $[X,Y]$ le processus défini par

$$[X,Y]_n = X_0 Y_0 + (X_1 - X_0)(Y_1 - Y_0) + \dots + (X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})$$

Autrement dit, $D[X,Y]= DX.DY$: nous avons utilisé une notation analogue dans le cas continu. Nous poserons aussi

$$Q_n^X = \sqrt{[X,X]_n}$$

Le processus Q^X est appelé la variation quadratique de X.

Arrêt d'un processus. Soit T un temps d'arrêt (de la famille $(\underline{\underline{F}}_n)$; pour tout processus X, nous désignerons par X^T le processus obtenu en arrêtant X à l'instant T, défini par

$$X_n^T = X_{n \wedge T}$$

Posons $V_n = I_{\{T \leq n\}}$; le processus $(V_n)=V$ est évidemment prévisible, et l'on a $X^T = V*X$.

Notations relatives aux martingales. Nous désignerons par $\underset{\sim}{E}_n$ l'opérateur d'espérance conditionnelle $\underset{\sim}{E}[\,.\,|\underline{\underline{F}}_n]$.

Soient X et Y deux processus intégrables ; nous dirons que X et Y sont associés $(X \sim Y)$ si X-Y est une martingale. Si X est un processus intégrable, nous appellerons compensateur de X, et nous noterons $\tilde{X}$, le processus défini par

$$\tilde{X}_0=0 \quad , \quad D\tilde{X}_n = \underset{\sim}{E}_{n-1}[X_n]-X_{n-1} \text{ pour } n>0$$

(dans le cas continu, cette notion avait été définie seulement pour un processus croissant, ou du moins à variation bornée). On montre aisément que ce processus est caractérisé par les trois propriétés suivantes : 1) $X-\tilde{X}$ est une martingale, 2) $\tilde{X}$ est prévisible, 3) $\tilde{X}_0=0$.

Nous appellerons <u>compensé</u> du processus (intégrable) X, et nous noterons $\overset{c}{X}$ ou X^c , le processus $X-\tilde{X}$; $\overset{c}{X}$ est une martingale et l'on a

$$\overset{c}{X}_0 = 0 \quad , \quad D(\overset{c}{X})_n = X_n-\underset{\sim}{E}_{n-1}[X_n].$$

Le lemme suivant groupe quelques propriétés " algébriques" faciles liant les opérations précédentes.

LEMME 1.- a) $V*(W*X) = (VW)*X$.

b) Si V et X sont deux processus prévisibles, $V*X$ est prévisible. En particulier, si T est un temps d'arrêt et si X est prévisible, X^T est prévisible.

c) Soient V et X deux processus, T un temps d'arrêt. On a

$$(V*X)^T = V*X^T = V^T*X^T \quad ; \quad [V,X]^T = [V^T,X^T] = [V,X^T].$$

d) <u>Soit</u> X <u>un processus intégrable</u> ; <u>on a</u>

$$(\tilde{X})^T = \widetilde{X^T} \quad ; \quad (\overset{c}{X})^T = (X^T)^c \quad .$$

DÉMONSTRATION .- a) et b) résultent aussitôt de la formule $D(A*B)_n = A_nDB_n$. Pour prouver la première formule c), posons $W_n=I_{\{T\geq n\}}$; l'égalité se réduit à $W*(V*X)=V*(W*X)=V^T*(W*X)$, ou d'après a) à $(WV)*X = (VW)*X=(V^TW)*X$, qui est évidente. Pour prouver la seconde formule c), on remarque que $W^2=W$, et que $D[W*V,W*X]_n = (D(W*V))_n.(D(W*X)_n) = W_n^2DV_nDX_n = D(W^2*[V,X])_n$, d'où en remplaçant W^2 par W , $D([V^T,X^T])_n = D([V,X]^T)_n$; on raisonne de même pour la troisième relation. Enfin, pour d), on remarque que $(\tilde{X})^T$ est prévisible d'après b), que $(\widetilde{X^T})_0=0$, et que $X^T-(\tilde{X})^T = (X-\tilde{X})^T$ est une martingale, de sorte que $(\tilde{X})^T$ possède la propriété caractéristique de $\widetilde{X^T}$; la seconde égalité d) en résulte aussitôt.

Une forme plus générale d'"intégrales stochastiques". Lorsque X est une martingale, et lorsque V est un processus prévisible borné (par exemple), le processus $V*X$ est une martingale. Mais il n'en est pas de même si V n'est pas prévisible. Par analogie avec la théorie des intégrales stochastiques des processus bien-mesurables, dans le cas continu, nous poserons la définition suivante .

DÉFINITION.- Soient V et X deux processus tels que $V*X$ soit intégrable. Nous noterons $V\circ X$, dans la suite, la martingale $(V*X)^c$.

Cette définition est dénuée d'intérêt lorsque X n'est pas une martingale, et sans doute aussi lorsque X en est une . Lorsque X est une martingale, et lorsque V est prévisible, $V*X$ est une martingale (vérification immédiate si V est borné ; utiliser le théorème de Lebesgue pour le cas général), et par conséquent $V*X = V\circ X$. Sous leur forme originelle, les inégalités de BURKHOLDER ne s'appliquaient qu'aux intégrales stochastiques du type précédent : nous les étendrons ici aux intégrales de la forme $V\circ X$, en vue d'applications possibles au cas continu.

DÉFINITION.- Soit X une martingale ; on désigne par $L^2(X)$ l'ensemble des processus V tels que $\sum_n V_n^2(X_n-X_{n-1})^2 \in L^1$.

Par exemple, tout processus borné appartient à $L^2(X)$. Il est clair que $V*X$ est intégrable si $V\in L^2(X)$. On a dans ce cas le résultat suivant.

THÉORÈME.- Si X est une martingale, et si $V\in L^2(X)$, le processus $V\circ X$ est une martingale bornée dans L^2. Ce processus est la seule martingale H bornée dans L^2 et possédant les propriétés suivantes :

1) $H_0 = V_0X_0$

2) Si M est une martingale bornée dans L^2, $[H,M]-V*[X,M]$ est une martingale.

DÉMONSTRATION.- On a, même si X n'est pas une martingale

$$D(V\circ X)_n = D(V*X)^c_n = (V*X)_n - \underset{\sim}{E}_{n-1}[(V*X)_n] =$$
$$= D(V*X)_n - \underset{\sim}{E}_{n-1}[D(V*X)_n]$$
$$= V_n DX_n - \underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n DX_n]$$

Par conséquent, $\underset{\sim}{E}[(D(V\circ X)_n)^2] \leq \underset{\sim}{E}[V_n^2(X_n - X_{n-1})^2]$; il en résulte que si $V \in L^2(X)$ on a $\sum_n \underset{\sim}{E}[(D(V\circ X)_n)^2] < +\infty$, ce qui revient à dire que la martingale $V\circ X$ est bornée dans L^2. Notons en particulier que

$$V^* \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \| V\circ X \|_2 \leq \| X \|_2 .$$

Si M est une martingale bornée dans L^2, on a alors

$$D[V\circ X, M]_n = D(V\circ X)_n . DM_n = V_n DX_n DM_n - (\underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n DX_n])DM_n$$

tandis que

$$D(V*[X,M])_n = V_n D[X,M]_n = V_n DX_n DM_n$$

Comme M est une martingale, DM_n est orthogonale à $\underline{\underline{F}}_{n-1}$, et donc $\underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n DX_n].DM_n$ est orthogonale à $\underline{\underline{F}}_{n-1}$: il en résulte que le processus $[V\circ X, M] - V*[X,M]$ est une martingale.

Considérons deux martingales H et H', bornées dans L^2 est satisfaisant aux conditions de l'énoncé, et posons $K=H-H'$; $[K,M]$ est alors une martingale pour toute martingale M bornée dans L^2 . En prenant K=M, on en déduit que $K_n = K_0$ p.s. pour tout n ; comme $K_0 = 0$, l'unicité est établie.

§2 . LA DÉCOMPOSITION DE GUNDY

Soient X une martingale <u>positive</u>, η une constante >0 ; introduisons le temps d'arrêt

$$R = \inf \{ n : X_n > \eta \}$$

et décomposons X en une somme de deux martingales positives W et X', définies par

$$W_n = X_n I_{\{R=0\}} \quad , \quad X'_n = X_n I_{\{R>0\}} = X_n I_{\{X_0 \leq \eta\}} .$$

Posons $A_n = X'_R I_{\{n \geq R\}}$; A est un processus croissant intégrable, et nous pouvons lui associer le processus croissant intégrable $\tilde{A}$ qui le compense . Comme $\tilde{A}$ est prévisible, la variable aléatoire

$$S = \inf \{n : \tilde{A}_{n+1} > \eta\}$$

est un temps d'arrêt. Ecrivons que $X=X'+W=X'^S+(X'-X'^S)+W$, et que $X'=X'^R+(X'-X'^R) = (X'^R-A+\tilde{A})+(A-\tilde{A})+ (X'-X'^R)$. Il vient que $X=H+K+L$, où

$$H=(X'^R-A+\tilde{A})^S$$
$$K=(A-\tilde{A})^S$$
$$L=W+(X'-X'^R)^S+(X'-X'^S) = W+(X'-X')^{R\wedge S}$$

Cette décomposition est la décomposition de GUNDY de la martingale positive X. Nous allons établir (d'après GUNDY) quelques propriétés des martingales H,K et L.

a) X'^R-A s'obtient à partir de X' en remplaçant X'_n par 0 pour $n \geq R$; comme $X'_n \leq \eta$ si $n<R$, X'^R-A est un processus positif borné par η. D'autre part, le processus $\tilde{A}^S$ est borné par η. On a donc

(1) $$H^* \leq 2\eta$$

On a d'autre part pour tout m $\underset{\sim}{E}[H_m^2] \leq \underset{\sim}{E}[H_m H^*] \leq 2\eta \underset{\sim}{E}[H_m] = 2\eta \underset{\sim}{E}[X'^R_m]$ $\leq 2\eta \underset{\sim}{E}[X_0]$. Ainsi

(2) $$\| H \|_2^2 \leq 2\eta \| X \|_1 .$$

(Cette petite remarque, qui donne une majoration en η au lieu de η^2 comme les majorations habituelles, est la clé de toute la démonstration !).

b) La seconde martingale K est un processus à variation bornée

(3) $$\underset{\sim}{E}[\sum_n |DK_n|] \leq \underset{\sim}{E}[A_\infty + \tilde{A}_\infty] = 2\underset{\sim}{E}[X'_R I_{\{R<\infty\}}] \leq 2\| X \|_1 .$$

c) Considérons la troisième martingale L ; on a $\underset{\sim}{P}\{L^* \neq 0\} \leq \underset{\sim}{P}\{R\wedge S<\infty\}$. D'autre part

$$\underset{\sim}{P}\{R<\infty\} \leq \frac{1}{\eta}\| X \|_1 \quad \text{(inégalité de DOOB)}$$
$$\underset{\sim}{P}\{S<\infty\} \leq \frac{1}{\eta}\underset{\sim}{E}[\tilde{A}_\infty] = \frac{1}{\eta}\underset{\sim}{E}[A_\infty] = \frac{1}{\eta}\underset{\sim}{E}[X_R I_{\{R<\infty\}}] \leq \frac{1}{\eta}\| X \|_1 ,$$

et par conséquent

(4) $$\underset{\sim}{P}\{L^* \neq 0\} \leq \frac{2}{\eta}\| X \|_1 .$$

§3. LES INÉGALITÉS DE BURKHOLDER

Rappelons que $Q^X_\infty = (\sum_n (X_{n+1}-X_n)^2)^{1/2}$.

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> X <u>une martingale</u> ; <u>on a alors pour tout</u> $\lambda \geqq 0$

(5) $$\lambda \underset{\sim}{P}\{Q^X_\infty \geqq \lambda\} \leqq 24 \| X \|_1 \ .$$

DÉMONSTRATION.- Il suffit de traiter le cas où X est bornée dans L^1 ! Dans ce cas, X est différence de deux martingales positives Y et Z telles que $\| X \|_1 = \| Y \|_1 + \| Z \|_1$ (décomposition de KRICKEBERG ; on a par exemple $Y_n = \lim_{p\to\infty} \underset{\sim}{E}[X^+_{n+p} | \underline{\underline{F}}_n]$). Comme on a $Q^X \leqq Q^Y + Q^Z$, et donc $\{Q^X_\infty \geqq \lambda\} \subset \{Q^Y_\infty \geqq \frac{\lambda}{2}\} + \{Q^Z_\infty \geqq \frac{\lambda}{2}\}$, il nous suffit de montrer que l'on a , pour toute martingale <u>positive</u> X

$$\lambda \underset{\sim}{P}\{Q^X_\infty \geqq \lambda\} \leqq 12 \| X \|_1 \ .$$

Reprenons alors la décomposition de GUNDY X=H+K+L. Nous avons

$$\underset{\sim}{P}\{Q^X_\infty \geqq \lambda\} \leqq \underset{\sim}{P}\{Q^H_\infty \geqq \frac{\lambda}{2}\} + \underset{\sim}{P}\{Q^K_\infty \geqq \frac{\lambda}{2}\} + \underset{\sim}{P}\{L^* > 0\}$$

Prenons $\eta = \frac{\lambda}{4}$: le premier terme est nul d'après (1) ; comme $Q^K_\infty \leqq \sum_n |DK_n|$, le second terme est majoré par $\frac{2}{\lambda}\underset{\sim}{E}[\sum |DK_n|] \leqq \frac{4}{\lambda} \| X \|_1$ d'après (3). Le dernier terme, enfin, est majoré par $\frac{8}{\lambda} \| X \|_1$. Le théorème résulte alors de l'égalité 8+4=12, que le lecteur vérifiera aisément.

Voici maintenant la seconde inégalité de BURKHOLDER, relative aux intégrales stochastiques.

THÉORÈME 3.- <u>Soient</u> X <u>une martingale</u>, V <u>un processus tel que</u> $V^* \leqq 1$. <u>Alors, pour tout</u> $\lambda \geqq 0$

(6) $$\lambda \underset{\sim}{P}\{(V \circ X)^* \geqq \lambda\} \leqq 56 \| X \|_1$$

DÉMONSTRATION.- Comme dans la démonstration précédente, il suffit de prouver que cette inégalité a lieu lorsque X est positive, avec un coefficient égal à 56/2=28. Reprenons la décomposition de GUNDY X=H+K+L ; nous avons

$$\lambda \underset{\sim}{P}\{(V\circ X)^* \geqq \lambda\} \leqq \lambda \underset{\sim}{P}\{(V\circ H)^* \geqq \frac{\lambda}{2}\} + \lambda \underset{\sim}{P}\{(V\circ K)^* \geqq \frac{\lambda}{2}\} + \lambda \underset{\sim}{P}\{(V\circ L)^* > 0\}$$

Le premier terme est majoré par $\frac{4}{\lambda}\underset{\sim}{E}[(V\circ H)^{*2}] \leqq \frac{16}{\lambda}\underset{\sim}{E}[(V\circ H)_\infty^2]$ (inégalité de DOOB) ; d'après le th.1, ceci est encore majoré par $\frac{16}{\lambda}\underset{\sim}{E}[H_\infty^2] \leqq \frac{32\eta}{\lambda}\| X \|_1$ d'après la formule (2). Le second terme est majoré par $2\underset{\sim}{E}[|V\circ K|_\infty]$ (inégalité de DOOB), et cette quantité est majorée par $4\underset{\sim}{E}[\sum_n |V_n|(DA_n + D\tilde{A}_n)] \leqq 8\underset{\sim}{E}[A_\infty] \leqq 8\underset{\sim}{E}[X_0] = 8\| X \|_1$.

Quant à la dernière probabilité, elle est majorée par $\underset{\sim}{P}\{(V\circ W)^* \neq 0\} + \underset{\sim}{P}\{(V\circ(X' - X'^{R\wedge S}))^* \neq 0\}$; le premier de ces deux termes vaut au plus $\| X \|_1/\eta$. D'autre part, $V\circ(X' - X'^{R\wedge S}) = V\circ X' - (V\circ X')^{R\wedge S}$, de sorte que la dernière probabilité vaut au plus $\underset{\sim}{P}\{R\wedge S < \infty\} \leqq \frac{2}{\eta}\| X \|_1$ (formule (4)). Par conséquent

$$\lambda \underset{\sim}{P}\{(V\circ X)^* \geqq \lambda\} \leqq \| X \|_1 \left(\frac{32\eta}{\lambda} + 8 + \frac{\lambda}{\eta} + \frac{2\lambda}{\eta}\right)$$

On conclut en prenant $\eta = \frac{\lambda}{4}$.

Les démonstrations des théorèmes suivants sont maintenant empruntées à BURKHOLDER, sans modifications :

THÉORÈME 4.- <u>Soient</u> X <u>une martingale bornée dans</u> L^p $(1<p<+\infty)$, <u>et</u> V <u>un processus tel que</u> $V^* \leqq 1$. <u>Alors on a</u>

$$\| V\circ X \|_p \leqq K_p \| X \|_p$$

<u>où</u> K_p <u>est une constante</u>.

DÉMONSTRATION.- Soit une variable aléatoire $H \in L^\infty$; construisons la martingale bornée **M** définie par $M_n = \underset{\sim}{E}_n[H]$, puis la martingale $V\circ M$; celle-ci est bornée dans L^2 d'après le th.1, elle converge donc p.s. vers une variable aléatoire que nous noterons $H' = T_V H$ (en toute rigueur, $T_V H$ est une <u>classe</u> de variables aléatoires, qui ne dépend que de la <u>classe</u> de H) . Nous définissons ainsi une application de L^∞ dans l'ensemble des classes de variables aléatoires , qui possède les propriétés suivantes :

1) Si $H \in L^\infty$, on a $\| T_V H \|_2 \leqq K_2 \| H \|_2$ (th.1 : en fait $K_2 = 1$)
2) Si $H \in L^\infty$, $\lambda P\{|T_V H| \geqq \lambda\} \leqq K_1 \| H \|_1$ (th.3 : $K_1 = 56$)

Ce sont là les hypothèses du théorème d'interpolation de MARCINKIEWICZ entre les valeurs 1 et 2 (voir par exemple le second volume de DUNFORD-SCHWARTZ, p.1166). Il existe donc une constante K_p satisfaisant aux conditions de l'énoncé pour tout p compris entre 1 et 2, d'après le th. de MARCINKIEWICZ.

Passons au cas où $2<p<\infty$: notons q l'exposant conjugué de p, qui est compris entre 1 et 2. Soient H et H' deux éléments de L^∞ ; nous avons :

$$\int T_V H.H' = \sum_n \int D(V\circ M)_n.H' = \sum_n \int (V_n DM_n - \underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n DM_n]).H'$$

$$= \sum_n \int (V_n DM_n \underset{\sim}{E}_n[H'] - \underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n DM_n]\underset{\sim}{E}_{n-1}[H'])$$

Le n-ième terme de cette somme s'écrit :

$$\int \{ V_n \underset{\sim}{E}_n[H]H' - V_n \underset{\sim}{E}_{n-1}[H]H' - \underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n \underset{\sim}{E}_n[H]]H' + \underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n \underset{\sim}{E}_{n-1}[H]]H' \}$$

Dans le premier terme, et aussi dans le second, nous pouvons remplacer H' par $\underset{\sim}{E}_n[H']$ sans changer l'intégrale . Dans le troisième et le quatrième termes, nous pouvons remplacer H' par $\underset{\sim}{E}_{n-1}[H']$, puis remplacer $\underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n \underset{\sim}{E}_n[H]]$, $\underset{\sim}{E}_{n-1}[V_n \underset{\sim}{E}_{n-1}[H]]$ par $V_n \underset{\sim}{E}_n[H]$, $V_n \underset{\sim}{E}_{n-1}[H]$ respectivement. L'expression sous le signe $\int$ est alors

$$V_n \underset{\sim}{E}_n[H]\underset{\sim}{E}_n[H'] - V_n \underset{\sim}{E}_{n-1}[H]\underset{\sim}{E}_n[H'] - V_n \underset{\sim}{E}_n[H]\underset{\sim}{E}_{n-1}[H'] + V_n \underset{\sim}{E}_{n-1}[H]\underset{\sim}{E}_{n-1}[H']$$

qui est symétrique en H et H'. Il en résulte que $\int T_V H.H' = \int T_V H'.H$. Par conséquent, l'énoncé étant établi pour l'exposant q, compris entre 1 et 2 :

$$|\int T_V H.H'| = |\int T_V H'.H| \leq \| T_V H' \|_q \| H \|_p \leq K_q \| H' \|_q \| H \|_p$$

Faisons parcourir à H' l'intersection de L^∞ avec la boule unité de L^q, il vient $\| T_V H \|_p \leq K_q \| H \|_p$, d'où le résultat.

Pour démontrer le second théorème fondamental de BURKHOLDER, qui lie les normes dans L^p (p>1, fini) des variables aléatoires X_∞ et Q_∞^X , nous aurons besoin du lemme de KHINTCHINE. Considérons un espace probabilisé T (muni d'une mesure dt) et une suite $(r_k)_{k\in N}$ de variables aléatoires indépendantes, prenant les valeurs +1 et -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (les analystes aiment prendre pour T l'intervalle $[0,1]$, et pour les r_k les " fonctions de RADEMACHER" , ce qui présente parfois certains avantages techniques). Voici le lemme de KHINTCHINE.

LEMME.- Soit $(a_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels tels que $\sum a_n^2<+\infty$, et soit f la somme de la série (convergente dans $L^{2(*)}$) $\sum a_n r_n$. Il existe alors des constantes A_p, B_p (finies, non nulles), pour tout $p\in[1,\infty[$, telles que

$$A_p(\sum a_n^2)^{1/2} \leqq \| f \|_p \leqq B_p(\sum a_n^2)^{1/2}$$

DÉMONSTRATION.- a) Existence de B_p : comme $\| f \|_p$ est une fonction croissante de p, il suffit de traiter le cas où p=2m (m entier positif). D'autre part, il suffit de traiter le cas où $a_k=0$ pour $k>N$. On a alors, les u_i désignant des entiers $\geqq 0$

$$\| f \|_{2m}^{2m} = \sum_{u_1+\dots+u_N=2m} C_{u_1\dots u_N} a_1^{u_1}\dots a_N^{u_N} \int_T r_1^{u_1}(t)\dots r_N^{u_N}(t)\, dt$$

où $C_{u_1\dots u_N} = (2m!)/u_1!\dots u_N!$. L'intégrale vaut 0 si les u_i ne sont pas tous pairs, et 1 s'ils le sont tous, par conséquent (en désignant par v_i l'entier $u_i/2$ si u_i est pair)

$$\| f \|_{2m}^{2m} = \sum_{v_1+\dots+v_N=m} C_{2v_1\dots 2v_N} a_1^{2v_1}\dots a_N^{2v_N}$$

Tandis que

$$((\sum a_n^2)^{1/2})^{2m} = \sum_{v_1+\dots+v_N=m} C_{v_1\dots v_N} a_1^{2v_1}\dots a_N^{2v_N}$$

Le rapport $C_{2v_1\dots 2v_N}/ C_{v_1\dots v_N}$ est égal à $\dfrac{\frac{(2m)!}{m!}}{\frac{(2v_1)!}{v_1!}\dots\frac{(2v_N)!}{v_N!}}$.

On majore le numérateur en le remplaçant par $2^m m^m$. On minore le i-ième terme du dénominateur en le remplaçant par 2^{v_i}. Le rapport est donc $\leqq m^m$, d'où finalement $B_{2m} \leqq \sqrt{m}$.

(*) Et aussi p.s. : c'est une série à termes indépendants.

b) Existence de A_p. C'est trivial si $p\geq 2$, car le premier membre est égal à $\| f \|_2$. Pour traiter le cas où $1\leq p<2$, posons $2= pr+4s$ ($r>0, s>0$, $r+s=1$). On se ramène par homogénéité au cas où $\sum a_n^2=1$. La fonction $\|f\|_p^p$ étant logarithmiquement convexe (voir par ex. BOURBAKI, Intégr. chap.IV, §6, n°5, prop.4 : p.213 de l'édition la plus récente), on a

$$1 = \| f \|_2^2 \leq \| f \|_p^{pr} \| f \|_4^{4s} \leq \| f \|_p^{pr} (B_4)^{4s}$$

et par conséquent $\| f \|_p \geq (B_4)^{-4s/pr}$ si $(\sum a_n^2)^{1/2}=1$, ce qui donne le résultat cherché.

Voici le résultat de BURKHOLDER :

THÉORÈME 5.- <u>Soient</u> X <u>une martingale</u>, p <u>un nombre tel que</u> $1<p<+\infty$. <u>Il existe deux constantes</u> (<u>finies</u>, <u>non nulles</u>) H_p, K_p <u>telles que</u>

$$H_p\| X \|_p \leq \| Q_\infty^X \|_p \leq K_p\| X \|_p$$

DÉMONSTRATION.- Introduisons les fonctions de RADEMACHER $r_k(t)$. Nous avons évidemment $Q_n^X \in L^p$ si et seulement si $X_n \in L^p$, et dans ce cas , d'après le lemme de KHINTCHINE

$$A_p^p(Q_n^X)^p \leq \int_T |(\sum_0^n r_k(t)DX_k|^p dt$$

et par conséquent , en intégrant et en intervertissant les intégrations

$$A_p^p \underset{\sim}{E}[(Q_n^X)^p] \leq \int_T \underset{\sim}{E}[|\sum_0^n r_k(t)DX_k|^p]dt \leq \int_T \underset{\sim}{E}[(V_t\circ X)_n^p]dt$$

où V_t est le processus déterministe défini par $V_{tn}= r_n(t)$. Comme $V_t^* \leq 1$, le th.4 entraîne que cette espérance est majorée par $K_p^p\| X \|_p^p$ (où K_p est la constante considérée dans l'énoncé du th. 4), d'où aussitôt la seconde inégalité de l'énoncé.

Pour démontrer la première inégalité, utilisons de même l'autre inégalité du lemme de KHINTCHINE :

$$\int_T |\sum_0^n r_k(t)DX_k|^p \, dt \leq B_p^p(Q_n^X)^p$$

Intégrons, intervertissons les intégrations : il vient que pour tout n

$$\int_T \underset{\sim}{E}[(V_t \circ X)_n^p \,]\, dt \leqq B_p^p \underset{\sim}{E}[(Q_\infty^X)^p]$$

ou encore, en faisant tendre n vers l'infini

$$\int_T \| V_t \circ X \|_p^p \, dt \leqq B_p^p \underset{\sim}{E}[(Q_\infty^X)^p]$$

Il existe donc au moins un t tel que $\| V_t \circ X \|_p \leqq B_p \| Q_\infty^X \|_p$. Soit Y la martingale $V_t \circ X$; on a $X = V_t \circ Y$ donc, d'après le th. 4

$$\| X \|_p \leqq K_p \| Y \|_p \leqq K_p B_p \| Q_\infty^X \|_p$$

La première inégalité du th.5 est donc prouvée. On notera que ce raisonnement vaut presque en entier pour p=1 aussi, et nous donne (th.3)

$$\lambda \underset{\sim}{P}\{X^* \geqq \lambda\} \leqq C \| Q_\infty^X \|_1$$

qui fait pendant au th.2.

BIBLIOGRAPHIE .

D.L.BURKHOLDER.- Martingale transforms. Ann.Math.Stat., 37, 1966, 1494-1504.

R.F.GUNDY.- A Decomposition for L^1-bounded martingales.A paraître (polycopié : Purdue University, Department of Statistics, Mimeograph series n°117, Août 1967).
Cet article est paru dans les Ann. Math. Stat., vol 39 (1968) (p. 134-138).