Séminaire de probabilités (Strasbourg)

PHILIPPE ARTZNER

Extension du théorème de Sazonov-Minlos d'après L. Schwartz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__1_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
STRASBOURG

- Séminaire de Probabilités - 1967-68

EXTENSION DU THÉORÈME DE SAZONOV - MINLOS

d'après L. SCHWARTZ (*)

Ce qui suit développe certaines parties de trois notes de L. SCHWARTZ aux Comptes-Rendus (C.R.A.S. Paris, Série A, t. 265, 1967, n° 25, pp. 832-834 et t. 266, 1968, n° 1, pp. 7-9 et n° 2, pp. 50-52), permettant d'établir que certaines applications linéaires de $\ell^{p'}$ dans ℓ^p ($1 \leq p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), transforment certaines probabilités cylindriques en des probabilités de Radon.

On s'intéresse à un espace vectoriel topologique réel E , localement convexe et séparé, et à son dual topologique E' .

(*) Exposé de Ph. ARTZNER.

Première Partie : ALGÈBRE DES CYLINDRES, PROBABILITÉS CYLINDRIQUES.

§ 1. CYLINDRES, PROBABILITÉS CYLINDRIQUES.

On va définir une classe de parties de E et certaines fonctionnelles additives sur celle-ci.

DÉFINITION 1.

On appelle cylindre de l' e.ℓ.c. séparé E tout sous-ensemble $C = \pi_F^{-1}(A)$ de E , où F est sous-espace vectoriel fermé de E , de codimension finie, π_F la projection canonique de E sur E/F, et A une partie borélienne de E/F .

L'ensemble $\mathcal{C}_F$ de tous les cylindres ainsi obtenus lorsque A décrit la tribu borélienne de E/F est une tribu, que π_F met en correspondance bijective avec la précédente. Mais la réunion $\mathcal{C}$ des $\mathcal{C}_F$, lorsque F décrit l'ensemble des sous-espaces fermés de codimension finie de E , n'est pas en général une tribu. Montrons que $\mathcal{C}$ est une algèbre de Boole : on utilise pour cela les relations :

$$\pi_F^{-1}(\complement A) = \complement\, \pi_F^{-1}(A) \qquad , \qquad \mathcal{C}_{F_1} \cup \mathcal{C}_{F_2} \subset \mathcal{C}_{F_1 \cap F_2} \quad .$$

La première est évidente et la seconde résulte de ce que si $F \supset G$, alors $\mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}_G$ comme on le vérifie à l'aide du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi_G"] \arrow[dr, "\pi_F"'] & E/G \arrow[d] \\ & E/F \end{tikzcd}$$

On notera $\sigma\mathscr{C}$ la tribu, dite <u>cylindrique</u>, engendrée par $\mathscr{C}$.

<u>Exemples</u>.

1. Si $f : E \to \mathbb{R}^d$ $(1 \leq d < \infty)$ est une application linéaire continue, et si B est une partie borélienne de $\mathbb{R}^d$, $C = f^{-1}(B)$ est un cylindre de E . On prend en effet $F = \operatorname{Ker} f$ et $A = \pi_F(C) = \overline{f}^{-1}(B)$ où $\overline{f}$ est déduite de f par passage au quotient. Lorsque $d = 1$ on dit que C est une <u>bande</u> de E . Il est clair qu'inversement tout cylindre de E s'obtient par ce procédé.

2. Désignons par S l'espace topologique produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; c'est l'espace des suites de nombres réels, muni de la topologie de la convergence des coefficients. Notons $\pi_k : x \longmapsto (x_0 , x_1 , \ldots , x_{k-1})$ l'application "projection" de S sur l'espace $\mathbb{R}^k$.

Soit alors $f = (f_1, \ldots, f_d)$ une application linéaire continue de S dans $\mathbb{R}^d$. Puisque le dual topologique de S est l'espace $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites nulles à partir d'un certain rang, il existe un entier k tel que pour tout x de S on ait :

$$f(x) = \Big(\sum_{p=0}^{k-1} \alpha_{ip}\, x_p \Big)_{1 \leq i \leq d} ,$$

les nombres α_{ip} ne dépendant pas de x . Ceci montre que tout cylindre de S est de la forme $\pi_k^{-1}(B)$ pour un certain k et une certaine partie borélienne B de $\mathbb{R}^k$. On sait ainsi que la tribu cylindrique est identique à la tribu produit sur S et donc à la tribu borélienne sur S , puisque cet espace est un produit dénombrable d'espaces topologiques à bases dénombrables d'ouverts.

3. Si E est un espace de Hilbert on note $F^{\perp}$ le sous-espace orthogonal à F et p_F la projection orthogonale de E sur $F^{\perp}$. On obtient

un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "p_F"'] \arrow[dr, "\pi_F"] & \\ F^{\perp} \arrow[rr, "\theta"'] & & E/F \end{tikzcd}$$

où θ est une application linéaire bijective. Il en résulte que les éléments de $\mathscr{C}_F$ sont les parties de E de la forme $C = B + F$, où B est une partie borélienne de $F^{\perp}$, cette écriture étant unique pour $C \in \mathscr{C}_F$ donné.

4. Si $u : E_1 \to E_2$ est une application linéaire faiblement continue entre e.ℓ.c. séparés (toute forme linéaire continue sur E_2 donne par composition avec u une forme linéaire continue sur E_1), l'image réciproque d'un cylindre de E_2 est un cylindre de E_1 et l'on a $u^{-1}(C) \in \mathscr{C}_{u^{-1}(F)}$ pour $C \in \mathscr{C}_F$, F sous-espace fermé de codimension finie de E_2.

Rappelons que si X est un ensemble et $\mathscr{T}$ une tribu sur X, on appelle probabilité abstraite sur $(X, \mathscr{T})$ la donnée d'une application μ de $\mathscr{T}$ dans le segment $[0,1]$, telle que $\sum_n \mu(A_n) = 1$ pour toute partition dénombrable (A_n) de X par des éléments de $\mathscr{T}$.

DÉFINITION 2.

On appelle probabilité cylindrique sur l'e.ℓ.c. séparé E la donnée d'une application μ de $\mathscr{C}$ dans le segment $[0,1]$, telle que pour tout sous-espace fermé F de codimension finie, la restriction de μ à $\mathscr{C}_F$ soit une probabilité abstraite sur $(E, \mathscr{C}_F)$.

Remarques.

1. Si $C_1 \in \mathscr{C}_{F_1}$ et $C_2 \in \mathscr{C}_{F_2}$, alors $C_1 \cup C_2$ $\mathscr{C}_{F_1 \cap F_2}$, et

donc $\mu(C_1 \cup C_2) = \mu(C_1) + \mu(C_2)$ si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$; la fonctionnelle μ est additive sur $\mathcal{C}$.

Si $\mu : E_1 \to E_2$ est linéaire et faiblement continue on définit une probabilité cylindrique image $u(\mu)$ par la relation

$$u(\mu)(C) = \mu(u^{-1}(C)) \quad \text{pour } C \text{ cylindre de } E_2 .$$

En particulier, si $\xi \in E'$ est une forme linéaire continue sur E on considèrera la probabilité $_{\xi}\mu$ sur $\mathbb{R}$, image de μ par l'application

$$x \longmapsto \langle x , \xi \rangle \quad \text{de } E \text{ dans } \mathbb{R} .$$

§ 2. RELATIONS AVEC LES PROBABILITÉS DE RADON.

Rappelons que si X est un espace topologique séparé et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur X , on appelle probabilité de Radon sur X toute probabilité abstraite m sur $(X , \mathcal{B})$, telle que pour tout borélien B de X on ait la relation de régularité intérieure :

$$m(B) = \sup \{m(K) \ ; \ K \text{ compact} , \ K \subset B \} .$$

Pour une telle probabilité de Radon on établit que si $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fermés de X et si $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$, alors $\mu(F) = \inf_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \text{ dans } A} \{\mu(F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n})\}$.

On montre que si X est un espace polonais (espace métrisable et complet, à base dénombrable d'ouverts), toute probabilité abstraite sur $(X , \mathcal{B})$ est une probabilité de Radon sur X .

Toute probabilité de Radon m sur l'e.ℓ.c. séparé E définit, par sa restriction à $\mathcal{C}$, une probabilité cylindrique m_c , qui est dite provenir de m . La réciproque n'est pas toujours vraie, sauf si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; c'est le théorème de Kolmogoroff. On a le résultat :

PROPOSITION 1.

L'application $m \longmapsto m_c$ est injective (m probabilité de Radon).

Par régularité intérieure, il suffit d'établir que si $m_c = m'_c$, alors m et m' coïncident sur la classe des compacts de E. D'après la propriété rappelée sur les probabilités d'ensembles fermés, ceci résultera du

LEMME 1.

Soit K un compact d'un espace localement convexe séparé E ; K est l'intersection des cylindres fermés qui le contiennent.

On peut supposer, par translation, que l'origine n'appartient pas à K. Soit $x \notin K$; pour tout y de K il existe une forme linéaire continue f_y sur E telle que $1 < f(y) < 2$ et que $f(x) \notin [1,2]$. Lorsque y varie dans K, les bandes ouvertes $f_y^{-1}(]1,2[)$ recouvrent K, tandis que x n'appartient à aucune des bandes fermées $f_y^{-1}([1,2])$. On en déduit, par compacité de K, l'existence d'un entier d et d'une application linéaire continue $f = (f_1, \ldots, f_d)$ de E dans $\mathbb{R}^d$ telle que le cylindre ouvert $\bigcup_{1 \leq i \leq d} f_i^{-1}(]1,2[)$ contienne K, et que le cylindre fermé $\bigcup_{1 \leq i \leq d} f_i^{-1}([1,2])$ ne contienne pas x, ce qui établit le lemme, et donc la proposition 1.

§ 3. TRANSFORMATION DE FOURIER DES PROBABILITÉS CYLINDRIQUES.

Remarquant le fait que somme toute une transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^d$ se détermine à l'aide de transformations de Fourier sur la droite, on peut étendre la définition de cette opération :

DÉFINITION 3.

On appelle transformée de Fourier d'une probabilité cylindrique μ sur l'e.ℓ.c. séparé E, la fonction $\hat{\mu}$ définie sur le dual topologique E'

de E par la relation

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it} \,{}_{\xi}\mu(dt) = \widehat{({}_{\xi}\mu)} \quad (1)$$

où ${}_{\xi}\mu$ est l'image de μ par l'application $x \mapsto \langle x , \xi \rangle$ de E dans $\mathbb{R}$.

Remarques.

1. Si μ est déduite d'une probabilité de Radon m sur E , on a

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{E} e^{i\langle x,\xi \rangle} m(dx) \qquad .$$

2. Si $\mu : E_1 \to E_2$ est linéaire et faiblement continue, on a

$$\widehat{(u(\mu)} = \hat{\mu} \circ {}^t u \qquad \text{où} \quad {}^t u : E_2' \to E_1' \qquad \text{est}$$

la transposée de u .

PROPOSITION 2.

L'application $\mu \mapsto \hat{\mu}$ est une bijection de l'ensemble des probabilités cylindriques sur l'ensemble des fonctions sur E' de type positif, continues sur chaque sous-espace V de E' de dimension finie, égales à 1 à l'origine de E' .

Si V est un sous-espace de dimension finie de E' , son annulateur V^o dans E (intersection des noyaux des éléments de V) est un sous-espace fermé de codimension finie, et $E/_{V^o}$ est canoniquement isomorphe au dual V' de V . Partant d'une probabilité cylindrique μ sur E , on trouve une probabilité abstraite sur $(E , \mathcal{C}_{V^o})$, donc sur $E/_{V^o}$, donc finalement une probabilité, de Radon, m_V sur V' , dont la transformée de Fourier est la restriction de $\hat{\mu}$ à V ; ceci établit les propriétés des transformées de Fourier des probabilités cylindriques, à partir des propriétés connues dans le cas d'espaces $\mathbb{R}^d$, d fini. De plus si $\mu_1 \neq \mu_2$, il existe un F tel que μ_1

et μ_2 diffèrent sur un élément de $\mathcal{C}_F$; or F est de la forme V^o pour un certain V et l'on aura $m_{1\,V} \neq m_{2\,V}$. Par unicité de la transformation de Fourier en dimension finie on trouve que $\widehat{\mu_1}\,|\,_V \neq \widehat{\mu_2}\,|\,_V$.

Inversement la donnée d'une fonction φ sur E' satisfaisant aux propriétés indiquées dans l'énoncé, permet pour chaque F de construire par restriction de φ à l'annulateur V de F dans E' , d'après le théorème de Bochner en dimension finie, une probabilité m_F sur V' , d'où canoniquement une probabilité sur E/F , d'où une probabilité abstraite μ_F sur $(E\, ,\, \mathcal{C}_F)$; il reste à établir que si $F \supset G$, alors μ_F est la restriction de μ_G à $\mathcal{C}_F$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
(E\, ,\, \mathcal{C}_F\, ,\, \mu_F) & \xrightarrow{\pi_F} & E/F & \xrightarrow{u} & (V'\, ,\, m_F) & & V = F^o \subset E' \\
\Big\uparrow \text{identité} & & \Big\uparrow p & & \Big\uparrow q & & \\
(E\, ,\, \mathcal{C}_G\, ,\, \mu_G) & \xrightarrow{\pi_G} & E/G & \xrightarrow{v} & (W'\, ,\, m_G) & & W = G^o \subset E'
\end{array}$$

u , v sont des isomorphismes canoniques ; p se déduit de l'identité par passage au quotient, q se déduit de p par les isomorphismes u et v , et c'est la transposée de l'injection de V dans W .

Pour établir que $id(\mu_G) = \mu_F$, il suffit d'établir que $q(m_G) = m_F$, et d'après le théorème d'inversion que $\widehat{m_F} = \widehat{m}_{G^o}\, {}^t q$. Cette dernière égalité résulte de ce que $\widehat{m_F} = \varphi|_{F^o}$, $\widehat{m_G} = \varphi|_{G^o}$.

<u>Remarque</u>.

Il résulte des propositions 1 et 2 que deux probabilités de Radon sur un e.ℓ.c. séparé, qui ont même transformée de Fourier (calculée à partir des probabilités cylindriques associées), sont égales.

§ 4. PROBABILITÉS CYLINDRIQUES GAUSSIENNES.

Si E est un espace de Hilbert on définit une probabilité cylindrique généralisant les gaussiennes en dimension finie.

On définit une probabilité abstraite μ_F sur $(E, \mathscr{C}_F)$ de la façon suivante : tout élément C de $\mathscr{C}_F$ s'écrit de façon unique $C = B + F$, B borélien de $F^\perp$. Si $\dim(F^\perp) = d$ on prend :

$\mu_F(C)$ = mesure B pour la mesure m_F sur $F^\perp$ de densité $(2\pi)^{-d/2} e^{-1/2 <x,x>}$ par rapport à la mesure sur $F^\perp$ déduite de la mesure $dx_1 \dots dx_d$ sur $\mathbb{R}^d$, par n'importe quelle isométrie de $\mathbb{R}^d$ sur $F^\perp$.

Il reste à établir que si $F \supset G$, alors μ_F est la restriction de μ_G à $\mathscr{C}_F$.

Soit π la projection orthogonale de $G^\perp$ sur $F^\perp$; d'après les propriétés des mesures de probabilité gaussiennes dans les espaces euclidiens $\mathbb{R}^d$, on sait que $\pi(m_G) = m_F$.

Soit $C = B + F$ un élément de $\mathscr{C}_F$; on trouve :

$$\mu_F(C) = m_F(B) = m_G(\pi^{-1}(B)) = \mu_G(\pi^{-1}(B) + G) = \mu_G(C)$$

car on a les relations

$$B + F = B + (F \cap G^\perp) + G \quad , \quad (F \cap G^\perp) + B = \pi^{-1}(B) \quad .$$

Remarque.

Montrons que la transformée de Fourier de μ est la fonction sur E (identifié à E') définie par

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{-\frac{1}{2} < \xi,\xi >} \quad .$$

En effet la mesure $_\xi\mu$ sur $\mathbb{R}$ est normale, centrée, et de variance $< \xi,\xi >$; sa transformée de Fourier est la fonction $t \mapsto e^{-\frac{1}{2} < \xi,\xi > t^2}$.

* *
*

Seconde Partie : CONCENTRATION DE PROBABILITÉS, EXTENSION DU LEMME DE MINLOS.

On va définir différentes notions de concentration d'une probabilité cylindrique, que des inégalités dans les espaces de dimension finie permettront de relier.

§ 1. DEUX PROBABILITÉS EXTÉRIEURES.

La donnée d'une probabilité cylindrique μ sur E permet de définir deux fonctions d'ensemble : pour toute partie X de E on pose :

$$\mu^b(X) = \inf \mu(B) \quad \text{pour } B \text{ bande de } E \,,\ B \supset X$$

$$\mu^c(X) = \inf \mu(C) \quad \text{pour } C \text{ cylindre de } E \,,\ C \supset X \,.$$

On appelle $\mu^c(X)$ la probabilité extérieure cylindrique de X ; on a $\mu^c \leq \mu^b$. En analogie avec le cas des mesures abstraites on pose la

DÉFINITION 4.

Soit $0 \leq \eta < 1$; on dit que la probabilité cylindrique μ est scalairement (resp. cylindriquement) concentrée à η près sur une partie X de E , si $\mu^b(X) \geq 1 - \eta$ (resp. $\mu^c(X) \geq 1 - \eta$).

ainsi que la

DÉFINITION 5.

On dit que la probabilité cylindrique μ est scalairement (resp. cylindriquement) concentrée sur une famille $\mathfrak{X}$ de parties de E , si

$$\sup_{X \in \mathfrak{X}} \mu^b(X) = 1 \qquad \left(\text{resp. } \sup_{X \in \mathfrak{X}} \mu^c(X) = 1\right) \,.$$

Remarques.

1. Si μ est scalairement (resp. cylindriquement) concentrée sur la famille des parties bornées, alors pour tout voisinage U de l'origine dans E, on a :

$$\lim_{n\to\infty} {}_n\mu^b(U) = 1 \qquad (\text{resp. } \lim_{n\to\infty} {}_n\mu^c(U) = 1)$$

où ${}_n\mu$ désigne l'image de μ par l'homothétie $x \mapsto \frac{1}{n}x$ de E.

2. Lorsque E est un espace normé, il est nécessaire pour qu'une probabilité cylindrique μ provienne d'une probabilité abstraite (définie sur la tribu borélienne de E), que μ soit cylindriquement concentrée sur la famille des parties bornées.

On établit ainsi que la probabilité cylindrique gaussienne définie à la fin de la première partie ne provient pas d'une probabilité abstraite, ni à fortiori, d'une probabilité de Radon, lorsque l'espace de Hilbert est de dimension infinie. Pour cela on prouve que la probabilité cylindrique de la boule unité U est nulle.

Soit $(x_n)_{n>0}$ une suite orthonormale de vecteurs de E ; soient F_d le sous-espace $\{x \mid \langle x,x_1\rangle = \dots = \langle x,x_d\rangle = 0\}$ et C_d le cylindre de $\mathcal{C}_{F_d}$, ensemble des x tels que $\langle x,x_1\rangle^2 + \dots + \langle x,x_d\rangle^2 \le 1$. On a

$$\mu^c(U) \le \mu_{F_d}(C_d) = (2\pi)^{-d/2} \int_{y\in\mathbb{R}^d,\ \langle y,y\rangle\le 1} e^{-\frac{1}{2}\langle y,y\rangle}\, dy .$$

Ce dernier nombre est égal à

$$\frac{\int_0^1 \rho^{d-1} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\, d\rho}{\int_0^\infty \rho^{d-1} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\, d\rho}$$

qui se majore par :

$$\frac{\int_0^1 \rho^{d-1} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\, d\rho}{\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\, d\rho}$$

dont la limite est nulle quand $d \to \infty$.

3. Le théorème de Prokhorov se traduit en disant qu'une probabilité cylindrique provient d'une probabilité de Radon, si et seulement si elle est cylindriquement concentrée sur la famille des parties compactes de E .

PROPOSITION 3.

Une probabilité cylindrique μ sur E , est scalairement concentrée sur un ensemble $\mathfrak{X}$ de parties bornées et équilibrées de E , si et seulement si la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ est continue sur le dual topologique E' de E , muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{X}$.

. supposons $\hat{\mu}$ continue : pour tout $\epsilon > 0$ on trouve $X \in \mathfrak{X}$ tel que si $\xi \in E'$ et $\xi(X) \subset [-1\ ,\ +1]$ alors $|1 - \hat{\mu}(\xi)| \leq \epsilon$, et par conséquent aussi $|1 - \hat{\mu}(\alpha\ \xi)| \leq \epsilon$, si $0 \leq \alpha \leq 1$. Etablissons que pour un tel ξ , on a ${}_{\xi}\mu([-1\ ,\ +1]) \geq 1 - 7\epsilon$, ce qui prouvera que $\mu^b(X) \geq 1 - 7\epsilon$. En utilisant la relation :

$$h_{\alpha}({}_{\xi}\mu) = {}_{\alpha\xi}\mu \qquad (h_{\alpha} \text{ homothétie de rapport } \alpha \text{ dans } \mathbb{R})$$

on trouve pour tout α :

$$\widehat{({}_{\xi}\mu)}(\alpha) = \widehat{({}_{\xi}\mu)}(\alpha.1) = \widehat{h_{\alpha}({}_{\xi}\mu)}(1) = \widehat{{}_{\alpha\xi}\mu}(1) = \hat{\mu}(\alpha\xi) \quad .$$

Par ailleurs on a l'inégalité classique

$$\int_{|t|\geq 1} {}_{\xi}\mu(dt) \leq 7 \int_0^1 (1 - \mathrm{Re}\widehat{({}_{\xi}\mu)}(\alpha))\, d\alpha \quad ;$$

on en déduit bien que la première intégrale est majorée par 7ϵ .

.. supposons inversement μ scalairement concentrée sur $\mathfrak{X}$; pour tout $\epsilon > 0$ existe $X \in \mathfrak{X}$ tel que pour tout $\xi \in E'$ on trouve que ${}_{\xi}\mu\ ([-\ell\ ,\ +\ell]) \geq 1 - \epsilon$ si $\overline{\xi(X)} = [-\ell\ ,\ +\ell]$. Prenant $a > 0$ et tel que $\sup_{|t|\leq a} |1 - e^{it}| \leq \epsilon$, et $V(0) = \{\xi \in E'\ ;\ \xi(X) \subset [-a\ ,\ +a]\}$ on a

$\xi \in V(0)$, $|1 - \hat{\mu}(\xi)| \leq 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon$, ce qui prouve la continuité de $\hat{\mu}$ à l'origine de E' . La continuité sur tout E' en résulte formellement à partir de l'inégalité

$$|\hat{\mu}(\xi + \eta) - \hat{\mu}(\xi)|^2 \leq 2(1 - \mathrm{Re}\,\hat{\mu}(\eta)) ,$$

conséquence du fait que $\hat{\mu}$ est de type positif.

Remarque.

Cette proposition établit à nouveau qu'une probabilité cylindrique gaussienne sur un espace hilbertien séparable E ne provient pas d'une probabilité abstraite. En effet celle-ci serait en fait de Radon et donc cylindriquement concentrée sur les compacts. Sa transformée de Fourier $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\langle x,x\rangle}$ serait alors continue sur E' , identifié à E , muni de la topologie $\mathcal{C}$ de la convergence compacte. Mais ceci n'est pas : désignons par (e_n) une base orthonormée de E : la suite $\|e_n\|$ ne tend pas vers zéro alors que la suite (e_n) tend vers zéro pour $\mathcal{C}$ comme le prouve le

LEMME 2.

Soient E un espace hilbertien séparable, (e_n) une base orthonormée de E ; pour tout compact K de E et tout $a > 0$, existe un entier n_o tel que pour tout $n \geq n_o$ et tout $x \in K$ on ait l'inégalité $|\langle x , e_n\rangle| \leq a$.

Pour tout x de K existent en effet un entier n_x et une boule ouverte centrée en x tels que toutes les coordonnées d'indice $\geq n_x$ de tous les points de cette boule soient en valeur absolue majorées par a . Il suffit de considérer un sous-recouvrement fini du recouvrement ainsi obtenu de K et de prendre pour n_o le plus grand des entiers n_x intervenant en nombre fini.

Par certaines applications, certaines probabilités cylindriques se transforment bien :

DÉFINITION 6.

On dit qu'une application linéaire faiblement continue u d'un espace E dans un espace F est radonifiante, si l'image par u de toute probabilité cylindrique scalairement concentrée sur la famille des parties bornées de E , provient d'une probabilité de Radon sur F .

La troisième partie donne un exemple de telle application.

§ 2. LE LEMME FONDAMENTAL.

On a des exemples quantitatifs de concentrations grâce au

LEMME FONDAMENTAL.

Soit $1 \leq p < 2$. Il existe un nombre $C > 0$, tel que pour tout entier d , tout $\eta \in]0,1[$, toute suite $(a_m)_{1 \leq m \leq d}$ de nombres positifs, toute probabilité μ scalairement concentrée à η près sur la boule unité $B_1 = \{ x \in \mathbb{R}^d \; ; \; \Sigma_1^d \, |x_m|^{p'} \leq 1\}$, soit concentrée à ϵ près sur la boule $B_2 = \{ x \in \mathbb{R}^d \; ; \; \Sigma_1^d \, |a_m \, x_m|^p \leq 1\}$, où

$$\epsilon = C(\eta + (U/\eta p)\ (1 + \log(1/\eta)))$$

$$U = \Sigma_1^d \, a_m{}^p \ (1 + |\log(1/a_m)|) \quad .$$

Pour majorer la probabilité du complémentaire de B_2 on va intégrer une fonction positive bornée que l'on sache minorer sur cet ensemble et qui se rattache à la transformation de Fourier.

Puisque les normes généralisent la norme ℓ^2 on considère la fonction de variable réelle $t \mapsto e^{-|t|^p}$: c'est la transformée de Fourier d'une loi stable de densité θ_p vérifiant l'inégalité $\theta_p(t) \leq \dfrac{C_p}{|t|^{p+1}}$, C_p indépendant de t (cf. W. FELLER, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. II p. 549, Lemma 2). Alors la fonction sur $\mathbb{R}^d$: $x \mapsto \exp(-\Sigma_1^d \, |a_m \, x_m|^p)$ est la transformée de Fourier de la probabilité τ de densité égale à

$$\frac{1}{a_1 . a_2 . \,\dots\, . a_d} \, \theta_p \left(\frac{y_1}{a_1}\right) . \, \theta_p \left(\frac{y_2}{a_2}\right) . \,\dots\, . \, \theta_p \left(\frac{y_d}{a_d}\right) \quad .$$

Par application de la formule de Plancherel-Parseval et de la formule d'inversion, on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 - \exp(-\Sigma_1^d \, |a_m \, x_m|^p))\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \hat{\mu}(y)) \, \tau \, (dy) \; .$$

La première intégrale se minore par $(1 - e^{-1}) \, \mu \, (\complement \, B_2)$; la seconde intégrale se décompose en $\int_{\|y\|_\infty \leq \eta}$ et $\int_{\|y\|_\infty > \eta}$, où $\|y\|_\infty = \sup(|y_1|, \ldots, |y_d|)$.

Dans l'intégrale $\int_{\|y\|_\infty > \eta}$ on majore $|1 - \hat{\mu}|$ par 2 . On est amené à chercher la mesure pour τ du complémentaire d'un cube ; elle se majore par la somme des mesures des bandes $\{y| \; |y_m| > \eta\}$, et ces dernières se ramènent à des intégrales à une variable :

$$\left|\int_{\|y\|_\infty > \eta} (1-\hat{\mu}(y))\tau(dy)\right| \leq 2 \, \Sigma_1^d \, \tau\{y| \; |y_m| > \eta\} = 2 \, \Sigma_1^d \int_{|u|>\eta} \theta_p\left(\frac{u}{a_m}\right) \frac{du}{a_m} \; .$$

On trouve donc le majorant $\dfrac{4}{p} \cdot \dfrac{C_p}{\eta^p} \, \Sigma_1^d \; a_m^{\;p}$.

Pour évaluer l'intégrale $\int_{\|y\|_\infty < \eta}$ on va majorer $1 - \hat{\mu}$ à l'aide de l'hypothèse de concentration qui permet d'appliquer le

LEMME 3.

Pour tout entier d , tout $p' \geq 1$, tout $\eta > 0$, toute probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$, scalairement concentrée à η près sur la boule unité $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \; ; \; \Sigma_1^d \, |x_m|^{p'} \leq 1\}$, a une transformée de Fourier $\hat{\mu}$ telle que pour tout y de $\mathbb{R}^d$:

$$|1 - \hat{\mu}(y)| \leq 2\pi(\eta + \|y\|_p) \; .$$

Considérons, pour $y \neq 0$, l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto \frac{1}{\|y\|_p} < x , y > \qquad \text{et l'image } \mu_y \text{ de } \mu$$

par cette application. On a l'égalité

$$1 - \hat{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{2i\pi<x,y>})\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{2i\pi\, t\|y\|_p})\, \mu_y(dt) .$$

On est ramené à un problème de transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$,avec une mesure μ_y concentrée à η près sur l'image de B_1 , c'est-à-dire sur $[-1 , +1]$, d'après la définition des normes duales.

Puisque pour tout réel A on a $|1 - e^{iA}| \leq \inf (2 , |A|)$, on trouve bien la majoration indiquée.

Pour faciliter les calculs on va remplacer le terme $\|y\|_p$ apparu dans le lemme précédent par un terme en $\|y\|_p^p$:

appliquons l'inégalité

$$a^{1/p}\, b^{1/p'} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p'} \qquad \text{valable pour } p > 1 , a \geq 0$$

et $b \geq 0$, à $a = \dfrac{\|y\|_p^p}{\eta^p}$ et $b = \eta^{p'}$; on trouve

$$\|y\|_p \leq \frac{1}{p} \frac{\|y\|_p^p}{\eta^p} + \frac{1}{p'} \eta^{p'} \qquad ;$$

le second membre se majore par $\dfrac{\|y\|_p^p}{\eta^p} + \eta$ puisque $\eta < 1$, et que $0 < \dfrac{1}{p'} < \dfrac{1}{2}$.

Cette majoration est encore valable si $p = 1$.

On a donc à majorer l'intégrale :

$$2\pi \int_{\|y\|_\infty \leq \eta} (2\eta + \frac{\|y\|_p^p}{\eta^p})\, \tau(dy) \qquad ;$$

le terme en η donne une contribution inférieure à $4\pi\eta$; pour le suivant on est amené à considérer d intégrales simples :

$$\frac{2\pi}{\eta^p}\Sigma_1^d \int_{|u|\leq\eta} u^p\,\theta_p\left(\frac{u}{a_m}\right)\frac{du}{a_m} = \frac{2\pi}{\eta^p}\Sigma_1^d\, a_m^p \int_{|v|\leq\frac{\eta}{a_m}} v^p\,\theta_p(v)\,dv \quad .$$

Lorsque $\eta \leq a_m$ chaque intégrale se majore par 2 ; sinon on utilise l'évaluation de θ à l'infini, trouvant finalement la majoration valable dans les deux cas : $\frac{4\pi}{\eta^p}\sup(C_p\,,\,1)\,\Sigma_1^d\, a_m^p\,(1 + |\log\frac{\eta}{a_m}|)$. Puisque $\theta_p(t)$ est équivalent à $\frac{1}{t^{p+1}}$ pour $|t|$ grand on ne compte pas pouvoir l'améliorer et faire disparaître le terme logarithmique. On majore le terme trouvé en remplaçant $1 + |\log\frac{\eta}{a_m}|$ par $(1 + \log\frac{1}{\eta})(1 + |\log\frac{1}{a_m}|)$; au total on a majoré $(1 - e^{-1})\,\mu(\complement B_2)$ par l'expression

$$4\pi\eta + \frac{4\sup(C_p,1)}{\eta^p}\Sigma_1^d\, a_m^p\left[1 + \left(1 + \log\frac{1}{\eta}\right)\left(1 + \left|\log\frac{1}{a_m}\right|\right)\right]$$

donc $\mu(\complement B_2)$ par l'expression indiquée dans l'énoncé du lemme fondamental, avec $\frac{2}{3}C = 8\sup(\pi\,,\,C_p)$.

* *
*

Troisième Partie : UN EXEMPLE D'APPLICATION RADONIFIANTE.

Le théorème de Sazonov-Minlos assure que pour une suite bornée (α_n) de nombres réels, l'application $(x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$ de ℓ^2 dans ℓ^2 est radonifiante si et seulement si $\Sigma \alpha_n^2$ est fini. L'extension du théorème concerne l'application analogue de $\ell^{p'}$ dans ℓ^p sous les conditions $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p < 2$.

Soient donc $1 \leq p < 2$, et pour toute suite $\alpha = (\alpha_n)$ de nombres réels, $a_n = |\alpha_n|$ et

$$U(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,p} \left(1 + \left|\log \frac{1}{a_n}\right|\right)$$

(si a_n est nul on prend zéro pour le terme correspondant de la série).

LEMME 4.

Pour toute suite α telle que $U(\alpha)$ soit fini il existe λ_o dans $]0,1[$ tel que dans l'intervalle $]0, \lambda_o[$ la fonction φ définie par

$$\varphi(\lambda) = U(\lambda\alpha)$$

soit finie et strictement croissante. Par ailleurs $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \varphi(\lambda) = 0$.

En effet il existe un entier k tel que pour $n > k$ on ait $a_n \leq 1$; il existe λ_o dans $]0,1[$ tel que $\lambda_o a_o, \lambda_o a_1, \dots, \lambda_o a_k$ soient inférieurs à 1. Puisque la fonction $t \mapsto t^p(1 + \log \frac{1}{t})$ est strictement croissante dans $[0,1]$ et a une limite nulle à l'origine, on obtient le lemme d'après le théorème de convergence dominée.

L'énoncé du théorème est le suivant :

THEOREME.

Soit $1 \leq p < 2$. Soit (α_n) une suite de nombres réels telle que le nombre :

$$U(\alpha) = \Sigma\, |\alpha_n|^p \left(1 + \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right)$$

soit fini. Alors l'application u de $\ell^{p'}$ dans ℓ^p définie par :

$$x \mapsto u(x) = (\alpha_n x_n)_n$$

est radonifiante.

Remarque.

La démonstration montrera que si $p = 1$, on peut munir $\ell^{p'} = \ell^\infty$ soit de la topologie d'espace normé, soit de la topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$. Il est facile de vérifier que pour ces deux topologies les bornés sont les mêmes, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus.

Etudions l'application u : on trouve que $\|u(x)\|_1 = \Sigma |\alpha_n x_n|$, se majore par $\|\alpha\|_p \cdot \|x\|_{p'}$, de façon évidente si $p = 1$, et par application de l'inégalité de Hölder si $p > 1$. C'est donc à une application continue de l'espace normé $\ell^{p'}$ dans l'espace normé ℓ^1, lequel s'injecte continûment dans l'espace normé ℓ^p, que l'on a affaire.

Montrons que l'application u égale sa transposée. Soit $\xi \in \ell^{p'}$; son transformé par ${}^t u$, si $p > 1$, est un élément ℓ^p, ayant pour k-ième coordonnée le nombre

$$< {}^t u(\xi), e_k > \quad \text{où} \quad e_k = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kième place}}}{1}, 0, \ldots)$$

soit encore $< \xi, u(e_k) >$ qui égale le produit de α_k par la k-ième coordonnée de ξ. Lorsque $p = 1$ on vérifie de même que les valeurs de ${}^t u(\xi)$ sur les vecteurs e_k, forment une suite sommable $(\alpha_k \xi_k)$ et que pour tout x de ℓ^∞ on a $< {}^t u(\xi), x > = \Sigma \alpha_k \xi_k x_k$.

L'application du lemme fondamental conduit ici à la

PROPOSITION 4.

Quels que soient p, (α_k) vérifiant les hypothèses du théorème et quelle que soit la probabilité cylindrique μ scalairement concentrée sur les bornées de $\ell^{p'}$, on a

$$\lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} u(\mu)(A_{r,n}) = 0 \quad ,$$

<u>où</u> $$A_{r,n} = \{y \in \ell^p \ ; \ \Sigma_1^n |y_k|^p \geq r^p\} \quad .$$

Toutes les limites considérées existent car on a affaire à des suites monotones et bornées. Si nous effectuons l'homothétie de rapport λ dans $\ell^{p'}$ et considérons la probabilité image $_\lambda\mu$, nous obtenons la même double limite puisque $\lambda \cdot A_{r,n} = A_{\lambda r,n}$. Soit $\eta = 1 - \mu^\ell \{x \ ; \ \|x\|_{p'} \leq 1\}$; l'ensemble $u^{-1}(A_{r,n})$ est un cylindre de $\ell^{p'}$ dont l'image par application $x \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est l'ensemble $F = \{t \in \mathbb{R}^n \ , \ \Sigma^n |\frac{\alpha_k}{r} t_k|^p \geq 1\}$, tandis que l'image de μ est scalairement concentrée à η près sur l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \ , \ \Sigma_1^n \ |t_k|^{p'} \leq 1\}$ et donc concentrée sur $\complement F$ à moins de $C(\eta + \frac{1}{\eta^p} U(\frac{\alpha}{r})(1 + \log \frac{1}{\eta}))$ près. Le double passage à la limite implique que la quantité considérée dans l'énoncé de la proposition 4 est inférieure à C_η . La première remarque suivant la définition 5, et le début de cette démonstration prouvent alors qu'en fait cette quantité est nulle.

Pour la démonstration du théorème on considère l'injection i de l'espace normé ℓ^p dans l'espace topologique produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = S$, qui est continue. Ces espaces étant polonais toute partie borélienne de ℓ^p est aussi une partie borélienne de S (on peut le voir directement en sachant que la tribu borélienne de S est sa tribu cylindrique et que toute boule $\{y \in \ell^p \ ; \ \|y\|_p \leq a\}$ de ℓ^p est une intersection dénombrable de cylindres $\complement B_{a,n}$ de S , où $B_{a,n} = \{z \in S \ ; \ \Sigma_1^n \ |z_k|^p \geq a^p \})$. Puisque $i^{-1}(B_{a,n}) = A_{a,n}$, la proposition 4 se traduit immédiatement avec $\xi = i(u(\mu))$.

Prenant donc une probabilité cylindrique μ comme dans l'énoncé du théorème, on sait que la probabilité image ξ provient d'une probabilité de Radon q sur S : $\xi = q_c$. Nous allons d'abord montrer que q est portée par la partie borélienne ℓ^p de S : $q(\ell^p) = 1$, et donc qu'il existe une probabilité de Radon m sur ℓ^p telle que $i(m) = q$. D'après les propriétés séquentielles des mesures abstraites nous avons :

$$q(\ell^p) = \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \alpha_{r,n}$$

où $\alpha_{r,n} = q\,(\complement B_{r,n}) = u(\mu)\,(\complement A_{r,n})$, puisque l'on a $\ell^p = \bigcup_r \bigcap_n (\complement B_{r,n})$. De la traduction de la proposition 4 découle l'assertion.

Il reste à montrer que $u(\mu)$ provient de m, pour établir que u est radonifiante. Etablissons que les transformées de Fourier φ et Ψ de $u(\mu)$ et de m_c sont égales. Celles de ξ et de $i(m_c)$ sont égales, donc $\varphi \circ {}^t i = \Psi \circ {}^t i$, ce qui signifie que φ et Ψ sont égales sur le dual $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dans le cas $p > 1$, on conclut que $\varphi = \Psi$ sur $\ell^{p'}$ en utilisant le fait que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une partie dense de cet espace normé, et que φ et Ψ sont continues sur cet espace normé en vertu de la proposition 3 et de ce que $u(\mu)$ est l'image d'une probabilité cylindrique scalairement concentrée sur les bornées de $\ell^{p'}$, donc scalairement concentrée sur les bornées de ℓ^p.

Dans le cas $p = 1$, on va montrer que φ et Ψ passent à la limite sur certaines suites particulières. Pour tout $a \in \ell^\infty$, dual de ℓ^1, on note $a^{(k)}$ la suite tronquée, définie par

$$a_n^{(k)} = a_n \quad \text{si} \quad n \leq k \quad , \quad a_n^{(k)} = 0 \quad \text{si} \quad k < n \quad .$$

On a donc $a = \lim_k a^{(k)}$ pour la topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$, et $\Psi(a) = \lim_k \Psi(a^k)$, d'après le théorème de convergence dominée appliqué à la suite de fonctions sur $\ell^1 : x \mapsto \langle x , a^{(k)} \rangle$, et à la probabilité de Radon m sur ℓ^1.

Pour étudier φ nous donnons une interprétation de la probabilité cylindrique μ sur $\ell^\infty = E$, en termes de variables aléatoires. Pour chaque suite $(b_1, \ldots, b_n)$ d'éléments de E', l'image ${}_{b_1,\ldots,b_n}\mu$ de μ par l'application $x \mapsto (\langle x, b_1\rangle, \ldots, \langle x, b_n\rangle)$ de E dans $\mathbb{R}^n$, est élément d'un système de marges compatibles. D'après le théorème de Kolmogorov, il existe sur l'espace $\Omega = \mathbb{R}^{E'}$, muni de la tribu produit, une probabilité abstraite P unique, telle que ${}_{b_1, \dots, b_n}\mu$ soit toujours l'image de P par l'application $(x_b)_{b \in E'} \mapsto (x_{b_1}, \dots, x_{b_n})$. En particulier, à chaque $b \in E'$ est associée la variable aléatoire X_b sur Ω : $(x_t)_{t \in E'} \mapsto x_b$, dont la loi est ${}_b\mu$. La correspondance $b \mapsto X_b$ est linéaire, entre l'espace E' et l'espace $\mathfrak{M}$ des variables aléatoires sur Ω .

Nous allons montrer que la restriction de X au sous-espace ℓ^1 de E' , a des propriétés de continuité séquentielle : pour tout $b \in \ell^1$, la variable aléatoire X_b est limite en probabilité des variables $X_{b^{(k)}}$. Soient en effet $\epsilon > 0$, $\eta > 0$; il existe r tel que pour tout $y \in \ell^1$ on ait

$$\mu\{x \in \ell^\infty ; |< x , y >| > r \|y\|_1\} \leq \epsilon \quad ,$$

puisque μ est scalairement concentrée sur les bornées de ℓ^∞ . Soit alors n tel que $\Sigma_n^\infty |b_m| < \frac{1}{r} . \eta$; alors pour tout $k \geq n$ on a :

$$\mu\{x \in \ell^\infty ; | \Sigma_{k+1}^\infty x_m b_m | > \eta\} \leq \epsilon$$

ce qui équivaut à :

$$P\{|X_b - X_{b^{(k)}}| > \eta \} \leq \epsilon \quad .$$

Etudions en termes de variables aléatoires, l'effet de l'application u . Soit Y la composée de ${}^t u : \ell^\infty \to E'$, et de $X : E' \to \mathfrak{M}$. Je dis que pour tout $a \in \ell^\infty$, la loi de Y_a égale ${}_a u(\mu)$; on a en effet :

$${}_a u(\mu) = {}_{{}^t u(a)}\mu = \text{loi de } X({}^t u(a)) = \text{loi de } Y_a \ .$$

Puisque l'image de ℓ^∞ par ${}^t u$ est en fait contenue dans ℓ^1 , ce qui précède montre que pour tout $a \in \ell^\infty$, Y_a est la limite en probabilité des variables $Y_{a^{(k)}}$, pour $k \to \infty$.

Utilisons la transformation de Fourier : puisque $\varphi(a)$ est l'intégrale de la fonction $t \to e^{it}$ pour la mesure ${}_a u(\mu)$ sur $\mathbb{R}$, c'est aussi l'espérance mathématique de la variable aléatoire e^{iY_a} sur Ω.

Lorsque $k \to \infty$, les variables $e^{iY_{a^{(k)}}}$ sont uniformément bornées et convergent en probabilité vers e^{iY_a} ; elles convergent donc en moyenne et l'on a établi ainsi que $\varphi(a)$ est la limite des $\varphi(a^{(k)})$, ce qui établit l'égalité de φ et Ψ sur ℓ^∞, et donc l'égalité de $u(\mu)$ et de m_c, ce qui prouve que u est une application radonifiante.

* *
*