Jacques Azéma
Marie Duflo
Daniel Revuz

Mesure invariante des processus de Markov récurrents

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 24-33
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__24_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG

SEMINAIRE DE PROBABILITES Année 1967-68

MESURE INVARIANTE DES PROCESSUS DE MARKOV RECURRENTS

par J. Azéma*, M. Duflo* et D. Revuz*

Dans cet exposé nous allons reprendre quelques résultats de [3]; nous prendrons toutefois une hypothèse de récurrence un peu plus faible que l'hypothèse de récurrence fine et nous modifierons quelques démonstrations.

I. NOTATIONS ET PRELIMINAIRES.

1.1 Nos notations seront à peu de choses près, celles qui sont habituelles en processus de Markov ([8] et [5]). Soit :

$$X = \{\Omega , \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in \mathbb{R}+} , (X_t)_{t\in\mathbb{R}+} , (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}+} , (P_x)_{x\in E} \} ,$$

un processus de Hunt à valeurs dans un sous-ensemble borélien E d'un espace L.C.D. Nous supposerons que X vérifie la condition (H) suivante :

(H) Il existe une probabilité m sur E telle que :

$$m(A) > 0 \Rightarrow \forall x\in E \quad P_x \left[\int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds = \infty\right] = 1 .$$

Cette condition est la transposition au temps continu de la condition de récurrence de Harris ([7]). On peut montrer que les processus finement récurrents

* Equipe de Recherche n°1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la section n°2 "Théories physiques et Probabilités" associée au C.N.R.S.

satisfont à (H) sur leurs classes conservatives et que sous (L), (H) est équivalente à la récurrence fine (cf [1], [4]). Commençons par quelques premières conséquences de (H) :

1.2 Proposition : Les fonctions excessives sont constantes m-presque sûrement.

Démonstration :

Soit f excessive ; quitte à considérer $f \wedge n$, nous pouvons supposer f bornée. Pour tout x de E la surmartingale $\{\Omega, \mathcal{F}_t, P_x, f \circ X_t\}$ converge presque sûrement vers une limite Z et l'on a $f(x) \geq E_x[Z]$. Maintenant si $m(\{f \geq k, k \in \mathbb{R}+\}) > 0$, la condition (H) entraîne que $Z \geq k$ P_x-ps et par suite que $f(x) \geq k$ ce qui démontre la proposition.

1.3 Proposition :

Soit A une fonctionnelle additive ; on a toujours l'une des deux propriétés suivantes :

1) pour tout x de E $P_x[A_\infty = \infty] = 1$

2) m presque sûrement $P[A_\infty = 0] = 1$

Démonstration :

Supposons $P_m[A_\infty > 0] > 0$; ceci entraîne qu'il existe des nombres $\epsilon, k > 0$ tels que $m(\{x : P_x[T_\epsilon < \infty] > k\}) > 0$, où $T_\epsilon = \inf\{t > 0 : A_t > \epsilon\}$. Le lemme II.2 de [2] entraîne que $P_{X_t}[T_\epsilon < \infty]$ converge P_x-presque sûrement, vers une limite qui est nulle sur $\{T_\epsilon = \infty\}$; la condition (H) entraîne que cette limite est supérieure à $k > 0$ et par suite que $P_x[T_\epsilon = \infty] = 0$ pour tout x de E.

Soit alors $T_1 = T_\epsilon$, $T_2 = T_\epsilon + T_\epsilon \circ \theta_{T_\epsilon}$, ..., $T_n = T_{n-1} + T_\epsilon \circ \theta_{T_{n-1}}$, la suite des itérés de T_ϵ ; il est facile de montrer par récurrence en utilisant la propriété forte de Markov que $P_x[T_n < \infty] = 1$ pour tout x de E ; et comme $A_{T_n} > n\epsilon$, il s'ensuit que $P_x[A_\infty = \infty] = 1$ pour tout x de E.

II. MESURE INVARIANTE.

Rappelons que si $N(x,.)$ est un noyau sur E, on note μN la mesure $\int \mu(dx)\, N(x,.)$. Une mesure μ σ-finie est dite invariante pour X, si $\mu P_t = \mu$ pour tout t de $\mathbb{R}_+$.

2.1. Proposition : μ est invariante pour X si et seulement si $\mu U^1 = \mu$

Démonstration :

La nécessité est évidente. Supposons μ invariante par U^1.

1) Soit Γ un borélien de μ-mesure finie. L'équation résolvante conduit à la relation

$$(1) \qquad \mu(\Gamma) - \mu U^\alpha(\Gamma) = (\alpha-1)\, \mu U^\alpha(\Gamma) \qquad \forall \alpha > 0 .$$

si $\alpha > 1$
$$\mu U^\alpha(\Gamma) \leq \mu U^1(\Gamma) = \mu(\Gamma) < \infty ,$$

on peut donc retrancher $\mu U^\alpha(\Gamma)$ aux deux membres de (1) ce qui donne

$$\mu(\Gamma) = \alpha\, \mu U^\alpha(\Gamma) \qquad \forall \alpha \geq 1 ;$$

soit
$$\mu U^\alpha(\Gamma) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mu(\Gamma)\, dt .$$

mais on a aussi
$$\mu U^\alpha(\Gamma) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mu P_t(\Gamma) dt$$

soit finalement pour tout $\alpha \geq 0$:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-t} \mu P_t(\Gamma)\, dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-t} \mu(\Gamma)\, dt.$$

Il en résulte qu'il existe un ensemble N de mesure de Lebesgue nulle tel que

$$\forall t \notin N \qquad \mu P_t(\Gamma) = \mu(\Gamma)$$

2) Soit S un Π-système dénombrable d'ensembles de μ-mesure finie engendrant $\mathcal{B}$. Il existe un ensemble N de mesure de Lebesgue nulle tel que

$$\forall t \notin N , \forall \Gamma_n \in S \quad \mu P_t(\Gamma_n) = \mu(\Gamma_n) ,$$

et par suite, tel que pour tout borélien Γ et $\forall t \notin N$, $\mu P_t(\Gamma) = \mu(\Gamma)$.
Mais pour tout t de N, on peut trouver un t_0 de N^c tel que $t+t_0 \in N^c$, et l'on a pour toute fonction f borélienne :

$$< \mu P_t, f> = < \mu, P_t f> = < \mu P_{t_0}, P_t f > = < \mu P_{t+t_0}, f> = <\mu, f> .$$

On a donc $\mu P_t = \mu$, quel que soit t dans $\mathbb{R}_+$.

2.2 La proposition précédente ramène la recherche d'une mesure invariante par P_t à celle d'une mesure invariante par U^1 . Nous nous servirons pour cela de la modification suivante du théorème de Harrie [7] due à Foguel [6] .

Théorème :

Soient $(E, \mathcal{B}, m)$ un espace probabilisé de type dénombrable et $P(x,A)$ une probabilité de transition sur E vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $P(x,E) = 1$

2) S'il existe un x dans E tel que $\sum_1^\infty P^n(x,A) = 0$ alors $m(A)=0$;
il existe alors une mesure μ σ-finie surharmonique pour P et $m \ll \mu$.

2.3 Nous allons appliquer le théorème précédent à la fonction de transition $U^1(x,A)$. Il suffit de montrer qu'elle vérifie la condition 2) de l'énoncé précédent, or

$$(U^1)^n (x,A) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} P_t(x,A)dt$$

$$\sum_1^\infty (U^1)^n(x,A) = \int_0^\infty P_t(x,A)\, dt \ ;$$

Si cette quantité est nulle, la condition (H) entraîne évidemment que $m(A)=0$; il existe donc une mesure σ-finie μ , surharmonique pour U^1 et telle que $m \ll \mu$. Soit Γ un borélien tel que $m(\Gamma) > 0$ et $\mu(\Gamma) < \infty$

$$< \mu - \mu U^1, \sum_1^N (U^1)^n (\cdot,\Gamma) > = \mu U^1(\Gamma) - \mu(U^1)^{N+1}(\Gamma) \leq \mu(\Gamma) < \infty ,$$

mais d'autre part $\sum_1^\infty (U^1)^n(\cdot,\Gamma)$ est identiquement infini ce qui impose $\mu = \mu U^1$; la mesure μ est invariante. Ce raisonnement montre aussi que toute mesure excessive pour U^1 est invariante ; toute mesure excessive pour le processus est donc invariante.

2.4 Nous allons étudier la famille des mesures invariantes pour P_t , dont nous venons de voir qu'elle n'est pas vide.

Lemme 1 :

Soit A un ensemble absorbant pour X, ν une mesure invariante, alors $m(A^c) = \nu(A^c) = 0$.

Démonstration :

Si $m(A^c) > 0$, alors $P_x[\int_0^\infty 1_{A^c}(X_s)\, ds = \infty] = 1$ pour tout x de A ce qui est impossible si A est absorbant.

D'autre part, si f est borélienne positive, $P_t f(x) = P_t(f 1_A)(x)$ sur A ; on a donc :

$$\int P_t f(x)\, 1_A(x)\, d\nu(x) \leq \int P_t(f 1_A)(x)\, d\nu(x) = \int_A f(x)\, d\nu(x) ;$$

$1_A \mu$ est donc excessive et par suite invariante. $1_{A^c}\mu$ différence de deux mesures invariantes est invariante. Or comme $m(A) > 0$, pour tout x de E, $U^1(x,A)$ est strictement positif, donc si ν est une mesure positive non nulle $\nu U^1(A) = \nu(A)$ est strictement positif, $1_{A^c}\mu$ ne peut donc être que la mesure nulle.

Remarque :

Dans la proposition 1.3 on peut remplacer m-ps par ν-ps

Lemme 2 :

Toute mesure invariante non nulle est équivalente à la mesure mU^1

Démonstration :

$mU^1(B) > 0$ entraîne $m\{x : U^1(x,B) > 0\} > 0$, donc d'après la proposition 1.3, $U^1(x,B) > 0$ partout; si ν est invariante non nulle on a donc $\nu(B) = \nu U^1(B) > 0$.

Inversement $mU^1(B) = 0$ entraîne $m\{x : U^1(x,B) > 0\} = 0$, soit d'après la proposition 1.3 $P_\bullet[\int_0^\infty 1_B(X_s) ds = 0] = 1$ m-presque partout, or l'ensemble $\{x : P_x[\int_0^\infty 1_B(X_s)\, ds = 0] = 1\}$ est absorbant, donc d'après le lemme 1 son complémentaire est de ν-mesure nulle et par suite $\nu(B) = \nu U^1(B) = 0$.

2.5 Théorème :

Il existe pour le semi-groupe P_t, une mesure excessive σ-finie unique. Cette mesure est invariante et équivalente à mU^1.

Démonstration : Il reste à montrer l'unicité.

Remarquons tout d'abord que P_t est pour tout t une contraction positive et conservative de $L^1(\mu)$, en effet si F est un ensemble de mesure finie et positive la fonction

$$f(x) = \int_o^t P_s(x,F)\, ds$$

est un élément de $\mathcal{L}^1_+(\mu)$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (P_t)^n f(x) = E_x \int_o^{\infty} 1_F(X_s)\, ds = \infty$$

quelque soit x de E d'après la proposition 1.3 . Soit P_t^* le transposé de P_t , on peut le prolonger à toutes les fonctions mesurables finies et positives ([9]) et l'on sait que $P_t^* h \leq h$ si et seulement si $P_t^* h = h$. Maintenant d' après ce qui précède, toute mesure invariante est de la forme $h\mu$, où h vérifie $P_t^* h = h$ pour tout t . Et l'on sait [9] que $1_{\{h<a\}}$ et $1_{\{h\geq a\}}$ sont encore des fonctions de ce type. Il en résulte que $1_{\{h<a\}}\mu$ et $1_{\{h\geq a\}}\mu$ sont des mesures invariantes qui ne peuvent être équivalentes ; une des deux est donc nulle et par suite $h = \text{cte}\ \mu - \text{ps}$. La mesure μ est la seule mesure invariante.

Remarque :

Le processus X satisfait à la condition (H) relativement à la mesure μ .

2.6 La mesure invariante ne charge pas les ensembles semi-polaires. Sous l'hypothèse (L) elle admet donc un support fin qui est finement parfait([1]). Ce support est un ensemble absorbant et tous ses points sont finement récurrents ([2]). μ est alors équivalente à $U^\lambda(x,.)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout x du support ([3]). Si le processus est de plus à résolvante fortement fellerienne, le support de μ est fermé au sens ordinaire et l'on a la proposition suivante :

Proposition :

Si X est à résolvante fortement fellerienne la mesure invariante est une mesure de Radon.

Démonstration :

Soit H un ensemble tel que $0 < \mu(H) < \infty$, et K un compact ; soit

$a > 0$ la borne inférieure de $U^1(.,H)$ sur K ; on a

$$\mu(H) \geq \int_K \mu(dx)\; U^1(x,H) \geq a \int_K \mu(dx) = a\mu(K)$$

ce qui démontre la proposition.

III. THEOREMES ERGODIQUES

3.1 Si A est une fonctionnelle additive du processus X, la fonction $t \to E_\mu\,[A_t]$ est linéaire et par suite l'application

$$f \leadsto \frac{1}{t}\; E_\mu\; [\int_0^t f(X_s)\, dA_s]$$

pour f borélienne, définit une mesure que nous appellerons ν_A. Nous poserons $\|\nu_A\| = \frac{1}{t}\; E_\mu\,[A_t]$.

Définition :

Si $\|\nu_A\|$ est finie, A sera dite intégrable. Si E est réunion d'une suite d'ensembles E_n tels que les fonctionnelles $1_{E_n} A$ soient intégrables, A sera dite σ-intégrable.

Nous allons énoncer quelques propriétés des mesures ν_A.

Théorème :

Soient A et B deux fonctionnelles additives et supposons $\|\nu_B\| > 0$, alors

1) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{E_x[A_t]}{E_x[B_t]} = \dfrac{\|\nu_A\|}{\|\nu_B\|}$ μ - ps

2) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{A_t}{B_t} = \dfrac{\|\nu_A\|}{\|\nu_B\|}$ P_x-ps pour tout x de E

Nous ne démontrerons pas ici ce théorème ; la démonstration est exactement celle de [3] auquel nous renvoyons.

3.2 Proposition :

Si A est finie continue et σ-intégrable alors ν_A est invariante pour où τ_t est le changement de temps associé à A ; et c'est la seule mesure excessive pour P_{τ_t} .

Démonstration :

Sur la vue du lemme 2.1 il suffit de montrer que ν_A est invariante pour la résolvante V^1 de P_{τ_t} ; or

$$V^1 f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-A_t} f(X_t)\, dA_t \; .$$

Soit f une fonction positive telle que $< \nu_A, f > < \infty$ et calculons $< \nu_A, V^1 f >$

$$< \nu_A, V^1 f > = \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s \left(E_{X_u} \int_0^\infty e^{-A_t} f(X_t)\, dA_t \right) dA_u \right]$$

$$= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s d A_u \int_0^\infty e^{-A_t \circ \theta_u} f(X_{t+u})\, d A_{t+u} \right]$$

$$= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s e^{A_u}\, dA_u \int_u^\infty e^{-A_v} f(X_v)\, dA_v \right]$$

$$= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s e^{-A_v} f(X_v)\, dA_v \int_0^v e^{A_u} dA_u + \int_s^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \int_0^s e^{A_u} dA_u \right]$$

$$= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s e^{-A_v} f(X_v)(e^{A_v} - 1) dA_v + (e^{A_s} - 1) \int_s^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \right]$$

$$= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s f(X_v) dA_v - \int_0^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v + e^{A_s} \int_s^\infty e^{-A_v} f(X_v)\, dA_v \right] ;$$

or $$= E_\mu \left[e^{A_s} \int_s^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \right] = E_\mu \left[\int_0^\infty e^{-A_v} f(X_v)\, dA_v \right] ,$$

il vient donc

$$< \nu_A \, , \, V^1 f > = \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s f(X_v) dA_v \right] = < \nu_A, f >$$

ce qui démontre la première assertion ; la seconde se montrerait comme en 2.3 .

3.3 Il est clair que les mesures ν_A ne chargent pas les ensembles polaires et que si A est continue ν_A ne charge pas les ensembles semi-polaires.

Nous allons énoncer un résultat en sens inverse. Rappelons tout d'abord ([1]) que si F est un ensemble presque analytique on a :

$$\forall x \in E \qquad \lim_{t \to \infty} P_{X_t}[T_F < \infty] = 1_{R_F} \qquad P_x\text{-ps}$$

où
$$R_F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [T_F \circ \theta_n < \infty] = [\overline{\lim_{t \to \infty}}\ 1_F(X_t) = 1] \ ;$$

on en déduit que la fonction excessive $P.[T_F < \infty]$ n'a que deux comportements possibles

- ou bien $\forall x \in E \quad P_x[T_F < \infty] = P_x[R_F] = 1$
- ou bien μ - ps $P_x[T_F < \infty] = P_x[R_F] = 0$.

on posera donc la définition suivante :

Définition :

Un ensemble presque-analytique F est dit transient si $P_\mu[T_F < \infty] = 0$
Un ensemble est dit transient s'il est contenu dans un ensemble presque-analytique transient. Un ensemble non transient est dit récurrent.

Sous l'hypothèse (L) si tous les points de E sont finement récurrents les ensembles transients sont les ensembles polaires.

Proposition :

Un ensemble est transient si et seulement si il est de mesure nulle pour toutes les mesures ν_A associées aux fonctionnelles additives intégrables.

Cette proposition est démontrée dans [4] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AZEMA, M. DUFLO, D. REVUZ : Classes récurrentes des Processus de Markov. Sém. Cal. Prob. Fac. Sciences, Strasbourg 1967, Springer-Verlag.Lect. Notes in Math.Vol.51.

[2] Récurrence fine des Processus de Markov. Ann. Inst. Henri Poincaré, II n°3, 185-220 (1966).

[3] Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 8, 157-181 (1967).

[4] Propriétés relatives des Processus de Markov récurrents. A paraître.

[5] R.M. BLUMENTHAL, R.K. GETOOR : Markov processes and Potential theory. Academic Press, 1968.

[6] FOGUEL S.R. : Limit theorems for Markov processes. T.A.M.S. 121, n° 1 pp. 200-209, 1966.

[7] T.E. HARRIS : The existence of stationary measures for certain Markov processes. Proceedings of the third Berkeley symposium, vol. II, pp.113-124.

[8] P.A. MEYER : Processus de Markov. Lectures Notes. Springer.

[9] J. NEVEU : Bases mathématiques du calcul des Probabilités. Paris, Masson, 1963.

--ooOoo--